ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10 класса общеобразовательных организаций

Под редакцией
академика РАН В.В. Козлова
и академика РАО А.А. Никитина

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Экспертное заключение № 10106-5215/283 от 12.10.2012 г.
(научная экспертиза)
Экспертное заключение № 520 от 29.01.2014 г. (педагогическая экспертиза)
Экспертное заключение № 793 от 10.02.2014 г. (общественная экспертиза)

Учебник соответствует Федеральному
государственному образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2014

УДК 373.167.1:51*10(075.3)
ББК 22.1я721
М34

Авторы: В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов, А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин

М34 **Математика**: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 10 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2014. — 464 с. — (Инновационная школа).

ISBN 978-5-00007-559-3

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, является частью учебно-методического комплекта «Математика» и входит в систему учебников «Инновационная школа».

Учебник предназначен для общеобразовательных организаций: школ, гимназий и лицеев.

Учебник снабжён мультимедийным приложением, размещённым на сайте издательства «Русское слово» — русское-слово.рф.

УДК 373.167.1:51*10(075.3)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-00007-559-3

Предисловие

Данная книга — шестая в серии трёхуровневых учебников по математике, созданных коллективом авторов из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одарённости детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета.

Эта серия разрабатывается с 1993 года и охватывает весь курс школьной математики с 5 по 11 класс. За прошедшие годы авторами сформирована цельная концепция преподавания математики в средней школе, которая во многом принципиально отличается от большинства других подобных разработок.

Прежде всего авторы отказались от традиционного деления математики на несколько дисциплин: арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, основы анализа и так далее. Все перечисленные предметы предлагается изучать в общем курсе. Это подчёркивает единство математической науки, тесную взаимосвязь развиваемых в ней идей и методов, фундаментальную роль математики как важного элемента общей культуры.

Потребности использования математики в различных областях человеческой деятельности различны, так же как различны и природные различия в склонностях и способностях учащихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объёме. В настоящем учебнике приняты три уровня изложения, отличающиеся не только объёмом, но главным образом глубиной и сложностью изучаемого материала. Первый уровень содержит сведения, умения и навыки, необходимые каждому культурному человеку. Второй уровень предполагает изучение математики в объёме, достаточном для последующего обучения в техническом вузе. Наконец, третий уровень должен способствовать подготовке к продолжению образования на математическом факультете университета. Материал первого уровня может изучаться независимо от второго и третьего, а материал второго не зависит от изучаемого на третьем уровне. Разделы, относящиеся ко второму уровню, отмечены в тексте звёздочкой, а материал третьего уровня — двумя звёздочками.

Учебник состоит из 15 глав, разбитых на параграфы, которые делятся на более мелкие разделы — пункты. К каждому параграфу предлагаются контрольные вопросы, задачи, упражнения и тесты, а к каждому пункту — подходящий «открытый вопрос». Наличие открытых вопросов — важная особенность изложения учебного материала. Фактически эти вопросы — специальные темы для размышления и обсуждения. Ответы на них не всегда однозначны. Более того, иногда сознательно предполагается, что существует несколько различных правильных ответов. Многие из них можно найти на страницах учебника, а в некоторых случаях их подсказывает окружающая действительность. Часто именно ответ на открытый вопрос дополняет материал пункта до логического завершения.

Учебник прошёл апробацию в школах нескольких регионов, получил положительные экспертные заключения РАН и РАО, рекомендован Министерством образования и науки Российской Федерации.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровневого обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе в формировании содержания трёхуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — доцента В.В. Войтишека, профессора Т.И. Зеленяка и профессора Д.М. Смирнова.

Глава 1

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В МАТЕМАТИКЕ

В этой главе рассказывается о роли аксиом в математике и приводятся примеры аксиоматического подхода к изучению геометрии и арифметики.

§ 1. АКСИОМЫ И «НАЧАЛА» ЕВКЛИДА

1.1. Аксиомы. Вы уже знакомы с тем, что в математике принята строгая система доказательств. Некоторые исходные совершенно ясные для нас утверждения мы считаем истинными без доказательства и называем их *аксиомами*.

Аксиомы содержат некоторые начальные понятия, которые называются основными и которым не даётся никаких определений. Тем самым аксиомы представляют собой принимаемые без доказательства утверждения о свойствах основных понятий. Все последующие утверждения выводятся как логические следствия из аксиом и уже доказанных утверждений.

Вопрос. Какие аксиомы вы знаете?

1.2. Аксиоматический метод. Метод последовательного получения утверждений, исходя из аксиом, получил в математике название *аксиоматического метода*. Аксиоматический метод позволяет сводить сложные математические понятия к простейшим, которые не требуют пояснений.

Яркий пример применения аксиоматического метода в древней математике — это попытка изложения геометрии великим Евклидом в его знаменитых «Началах».

Вопрос. Как доказывается, что если a, b и c — такие числа, что $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$?

1.3. Возникновение геометрии. Накопление геометрических знаний в виде конкретных фактов началось в глубокой древности.

За несколько тысячелетий до нашей эры египтяне умели возводить грандиозные пирамиды. Например, высота известной пирамиды Хеопса первоначально составляла около 147 метров. Такие постройки требовали точных измерений и предварительных геометрических расчётов. Постоянные разливы Нила принуждали египтян ежегодно измерять и перераспределять земельные участки. В переводе с греческого слово геометрия и означает «землемерие».

Вопрос. Какие измерения достаточно произвести, чтобы вычислить площадь участка, имеющего форму трапеции?

1.4. «Начала» Евклида. Приблизительно за 700 лет до начала нашей эры геометрические знания египтян проникли в Грецию. Здесь геометрия возникла уже как наука. На рубеже IV–III столетий до нашей эры древнегреческий геометр Евклид, живший в Александрии, опубликовал своё знаменитое сочинение «Начала» в тринадцати книгах. В нём впервые было дано логическое построение геометрии.

Каждая книга «Начал» содержит описание основных геометрических понятий. Приведём некоторые из них:

1. **Точка есть то, что не имеет частей.**
2. **Линия есть длина без ширины.**
3. **Прямая линия есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.**
4. **Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.**
5. **Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.**
6. **Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.**

В первой книге «Начал» изложены постулаты и аксиомы, то есть утверждения, принимаемые без доказательств как очевидные.

Постулаты:

1) **через две точки можно провести одну прямую линию;**
2) **отрезок можно продолжить до прямой;**
3) **из любого центра можно описать окружность любого радиуса;**
4) **все прямые углы равны между собой;**
5) **две прямые, которые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекаются.**

Аксиомы:

1) **равные порознь третьему, равны между собой;**
2) **если к равным прибавить равные, то получим равные;**
3) **если от равных отнять равные, то остатки будут равны;**
4) **совмещающиеся друг с другом равны;**
5) **целое больше своей части.**

Вслед за аксиомами в первой книге «Начал» идут теоремы, расположенные в таком порядке, что последующие утверждения выводятся строго логически из постулатов, аксиом и предыдущих теорем. «Начала» Евклида были основным учебным пособием по геометрии в течение двух последующих тысячелетий.

Вопрос. Какие свойства точек на прямой вы знаете?

1.5. Пятый постулат. Уже ближайшие последователи Евклида обратили внимание на пятый постулат, который был не столь очевиден, как другие постулаты и аксиомы. Попытки доказать пятый постулат на основе остальных постулатов и аксиом Евклида безуспешно продолжались более 2000 лет. Было замечено, что пятый постулат Евклида равносилен следующей аксиоме, которую принято называть «аксиомой параллельности»:

на плоскости через данную точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) также пытался доказать пятый постулат Евклида. Сохранив все остальные аксиомы, он заменил аксиому параллельности её отрицанием, надеясь обнаружить противоречие в последующих рассуждениях. Однако вместо противоречия Лобачевский пришёл к новому учению, которое он назвал «воображаемой геометрией». Доклад о своём открытии Н.И. Лобачевский представил совету Казанского университета, где он работал, в 1826 году. В 1829 году вышла из печати большая работа Н.И. Лобачевского «О началах геометрии», в которой он детально изложил новую теорию. В настоящее время «воображаемая геометрия» называется геометрией Лобачевского.

Три года спустя после выхода в свет работы Лобачевского венгерский учёный Янош Бойяи (1802—1860), не зная об исследованиях Лобачевского, также опубликовал работу, где изложил начала неевклидовой геометрии, но в менее развитой форме по сравнению с Лобачевским. К выводу о существовании новой геометрии независимо пришёл также великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), как впоследствии стало известно из его писем к современникам.

Непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана позже французским учёным Анри Пуанкаре (1854—1912) и немецким математиком Феликсом Клейном (1849—1925). Подробное исследование аксиом евклидовой геометрии было проведено немецким математиком Давидом Гильбертом (1862—1943) в 1899 году.

Вопрос. Как сформулировать отрицание аксиомы параллельности?

Контрольные вопросы и задания

1. Что вы понимаете под словом «аксиома»?
2. Что вы понимаете под словом «теорема»?
3. Приведите пример математического доказательства.

16220_Mat_KozNi_U_10_FGOS_Ver_1.indd 7 11.07.2014 14:45:59

4. Какой смысл в греческом языке имеет слово «геометрия»?

5. Каковы свойства основных понятий евклидовой геометрии?

6. Сформулируйте постулаты Евклида.

7. Что утверждают аксиомы евклидовой геометрии?

8. Сформулируйте аксиому параллельности.

9.* Каково главное отличие «воображаемой геометрии» Лобачевского от геометрии Евклида?

Задачи и упражнения

1. Существует ли четырёхугольник, у которого три угла по 60°?

2. Докажите, что если у треугольника две медианы равны, то такой треугольник равнобедренный.

3. В трапеции средняя линия делится диагоналями на три равные части. Найдите соотношение оснований трапеции.

4.* В прямоугольном треугольнике ABC проводятся высота BH к гипотенузе и биссектриса AL, которая пересекает BH в точке M. Докажите, что треугольник BML равнобедренный.

5.** Найдите площадь трапеции с основаниями 3 и 10 и диагоналями 5 и 12.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость три прямые?

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

1.2. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость две окружности и прямая?

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

1.3. Какую величину имеют углы правильного десятиугольника?

1) 108° 2) 126° 3) 144° 4) 162°

1.4. Сколько различных действительных корней имеет уравнение $\left(x^2+\sqrt{2}\right)^2+x^2=2$?

1) ни одного 2) один 3) два 4) четыре

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Каким из указанных неравенств равносильно неравенство $\frac{1}{x^3}\le 8$?

1) $8x^3\ge 1$ 2) $2x\ge 1$ 3) $\frac{8x^3-1}{x}\ge 0$ 4) $\frac{1-2x}{x}\le 0$

2.2. Какие из указанных четырёх чисел могут быть длинами последовательных сторон некоторого четырёхугольника?

1) 1; 2000; 3; 4000 2) 10; 2000; 30; 4000

3) 100; 2000; 300; 4000 4) 1000; 2000; 3000; 4000

2.3. Какие из приведённых равенств являются следствиями тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

1) $x^4+2x^2+1=(1+x^2)^2$ 2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2=30+6\sqrt{6}$

3) $(x^3+x)^2=x^6+2x^5+x^4$ 4) $a+a^2+2a\sqrt{a}=(a+\sqrt{a})^2$

2.4. Сколько различных действительных корней может иметь уравнение вида $x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ в зависимости от параметра a?

1) ни одного 2) один 3) два 4) три

§ 2. СИСТЕМА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА

2.1. Аксиомы связи.** При построении геометрии Д. Гильберт использовал основные понятия, отношения между ними и аксиомами. Основными понятиями, которые не определяются через другие понятия, являются, как и у Евклида, точки, прямые и плоскости, а также следующие главные отношения между ними: «лежать на», «лежать между», «быть конгруэнтными» (или равными), «быть параллельными».

Система аксиом Гильберта состоит из пяти групп аксиом. В этом пункте мы приведём аксиомы первой группы (или *аксиомы связи*), которые описывают свойства отношения «лежать на».

1_1. **Для любых двух точек существует прямая, на которой лежат эти точки.**

1_2. **Для любых двух различных точек существует не более одной прямой, на которой лежат эти точки.**

1_3. **На каждой прямой лежат по крайней мере две точки; на каждой плоскости лежат по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.**

1_4. **Для любых трёх точек существует плоскость, на которой лежат эти точки. На любой плоскости лежит хотя бы одна точка.**

1_5. **Для любых трёх точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, на которой лежат эти точки.**

1_6. **Если две точки прямой m лежат на плоскости α, то все точки прямой m лежат на этой плоскости.**

1_7. **Если точка лежит на плоскости α и на плоскости β, то существует по крайней мере ещё одна точка, которая лежит на каждой из этих плоскостей.**

16220_Mat_KozNi_U_10_FGOS_Ver_1.indd 9 11.07.2014 14:45:59

1_8. Существуют по крайней мере четыре точки, которые не лежат на одной плоскости.

Для изучения аксиоматической теории полезно построить её модель, то есть сопоставить основным понятиям и отношениям какие-нибудь конкретные объекты и утверждения об этих объектах, которые могут быть истинными или ложными.

Нетрудно построить модель геометрии, которая удовлетворяет перечисленным аксиомам связи, но значительно отличается от евклидовой геометрии. Пусть $ABCD$ — тетраэдр (рис. 1). Будем считать «точками» вершины A, B, C, D, «прямыми» — пары вершин $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ и $\{C, D\}$, «плоскостями» — тройки вершин $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$. Определим отношение «лежать на» как «входить в состав» соответствующей пары или тройки вершин. В результате получаем модель, в которой выполняются все аксиомы 1_1 — 1_8. Эта модель показывает, что в геометрии, определяемой лишь аксиомами связи, прямая может иметь всего две точки, а плоскость — три точки.

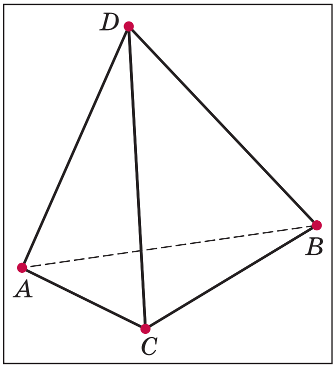

Рис. 1

Вопрос. Будут ли выполняться аксиомы 1_1 — 1_8, если в указанной модели из числа «прямых» удалить $\{A, B\}$?

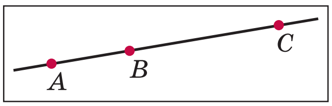

Рис. 2

2.2. Аксиомы порядка.** Аксиомы второй группы, или *аксиомы порядка*, описывают свойства отношения «лежать между».

2_1. Если точка B лежит между точками A и C, то B лежит также между C и A. При этом A, B, C — различные точки одной прямой (рис. 2).

2_2. Для любых двух точек A и B на одной прямой AB существует по крайней мере одна точка C такая, что точка B лежит между A и C.

2_3. Среди любых трёх различных точек существует не более одной, лежащей между двумя другими.

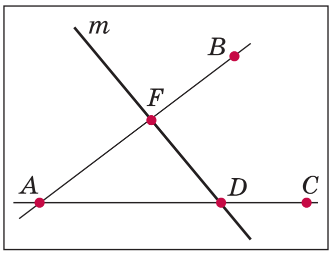

Рис. 3

2_4 (аксиома Паша). Пусть A, B, C — три точки в плоскости α и m — прямая в плоскости α, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда если на прямой m найдётся точка D,

лежащая между A и C, то на этой прямой найдётся также точка F, которая лежит либо между A и B, либо между B и C (рис. 3).

Отношение «лежать между» позволяет определить отрезок с концами в данных точках. Из аксиомы Паша вытекает, в частности, что если прямая пересекает одну из сторон треугольника, то она обязательно пересечёт ещё какую-то сторону этого треугольника. С помощью аксиом первой и второй групп можно также доказать, что на каждой прямой имеется бесконечное множество точек.

Вопрос. Как с помощью аксиомы Паша доказать, что каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости?

2.3. Аксиомы конгруэнтности.** Аксиомы третьей группы, или *аксиомы конгруэнтности*, описывают свойства отношения конгруэнтности, или, другими словами, отношения равенства геометрических фигур, соответствующие наглядному представлению о совмещении при наложении копии одной из фигур на другую.

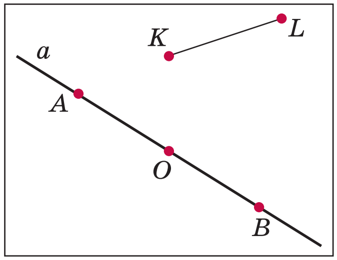

Рис. 4

3_1. **Если даны пара точек K, L и прямая a с расположенной на ней точкой O** (рис. 4), **то на прямой a найдутся такие точки A и B, что отрезки AO, OB конгруэнтны отрезку KL и точка O лежит между точками A и B (символически $AO = KL$, $OB = KL$).**

Аксиома 3_1 даёт возможность откладывать на прямой от заданной точки O отрезки данной длины.

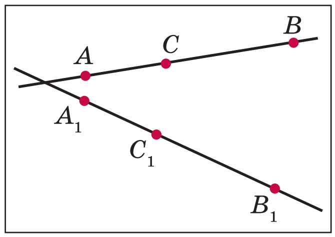

Рис. 5

3_2. **Два отрезка, конгруэнтные третьему отрезку, конгруэнтны между собой.**

Каждый отрезок AB конгруэнтен самому себе и отрезку BA (символически $AB = BA$).

3_3. **Если точка C лежит между точками A и B, а точка C_1 — между A_1 и B_1, причём $AC = A_1C_1$, $CB = C_1B_1$, то $AB = A_1B_1$** (рис. 5).

Аксиома 3_3 позволяет складывать отрезки.

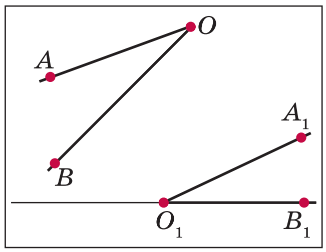

Рис. 6

3_4. **Пусть даны угол AOB, луч O_1B_1 и полуплоскость относительно прямой O_1B_1** (рис. 6). **Тогда в этой полуплоскости существует единственный луч O_1A_1 такой, что угол AOB конгруэнтен углу $A_1O_1B_1$.**

16220_Mat_KozNi_U_10_FGOS_Ver_1.indd 11 11.07.2014 14:45:59

Аксиома 3_4 даёт возможность откладывать углы, конгруэнтные (равные) данному. Кроме того, из этой аксиомы следует, что каждый угол конгруэнтен самому себе.

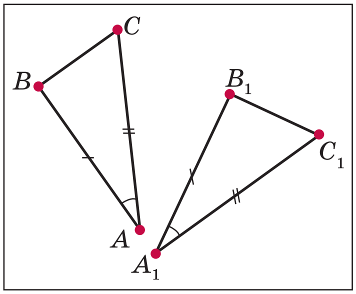

Рис. 7

3_5. Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполнено: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 7), то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Эта аксиома позволяет вывести признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Вопрос. Как доказать, что из аксиом 3_1, 3_4 и 3_5 следует утверждение о конгруэнтности сторон BC и B_1C_1 рассматриваемых треугольников?

2.4. Аксиома параллельности.** Четвёртая группа состоит из единственной *аксиомы параллельности*, уже упоминавшейся в предыдущем параграфе.

4_1. Через данную точку вне данной прямой на плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Вопрос. Выполняется ли аксиома параллельности для модели из пункта 2.1?

2.5. Аксиомы Архимеда и Кантора.** Пятая группа содержит две аксиомы.

5_1 (аксиома Архимеда). Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Тогда на прямой AB можно указать конечное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенных так, что отрезки $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD, точка A_1 лежит между A и A_2, точка A_2 лежит между A_1 и A_3, ..., точка A_{n-1} лежит между A_{n-2} и A_n, а точка B лежит между A_{n-1} и A_n.

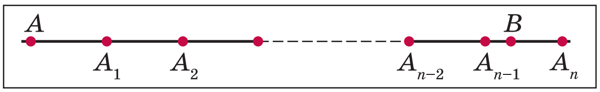

Рис. 8

Эта аксиома утверждает, что для любых двух отрезков AB и CD всегда найдётся отрезок AA_n, конгруэнтный кратному $n \cdot CD$ отрезка CD и такой, что AB является частью отрезка AA_n, то есть AA_n больше AB (рис. 8).

5_2 (аксиома полноты). К системе элементов геометрии (точек, прямых и плоскостей), удовлетворяющей аксиомам групп I, II, III, IV и

аксиоме 5_1, нельзя добавить новых точек, прямых и плоскостей таким образом, чтобы полученная система образовывала новую геометрию, удовлетворяющую всем этим аксиомам.

Справедлива теорема, которую иногда называют *аксиомой Кантора*, потому что она эквивалентна аксиоме полноты 5_2. Прежде чем сформулировать аксиому Кантора, определим понятие «стягивающейся» последовательности отрезков. Бесконечная последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... называется *стягивающейся,* если каждый последующий отрезок является частью предыдущего и для любого наперёд заданного отрезка CD найдётся такой номер n, что A_nB_n меньше CD.

Аксиома Кантора. На прямой для всякой стягивающейся последовательности отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам одновременно.

Вопрос. Пусть задан отрезок AB. Обозначим через A_1 середину отрезка AB, через A_2 — середину отрезка AA_1, через A_3 — середину отрезка AA_2 и так далее. Как доказать, что последовательность отрезков AA_n является стягивающейся?

2.6. Непротиворечивость.** Система аксиом Гильберта *непротиворечива*. Это значит, что из неё нельзя логически вывести два взаимно отрицающих друг друга предложения.

Если в системе аксиом Гильберта заменить аксиому параллельности аксиомой Лобачевского, то получится система аксиом геометрии Лобачевского. Эта система также непротиворечива. Непротиворечивость той или иной системы аксиом доказывается путём построения для неё конкретной модели (или интерпретации).

Вопрос. Как доказать, что прямая, пересекающаяся со всеми сторонами треугольника, обязательно проходит через одну из его вершин?

Контрольные вопросы и задания

1.** Сформулируйте аксиомы связи.

2.** Сформулируйте аксиомы порядка.

3.** Сформулируйте аксиомы конгруэнтности. Какие возможности построений предоставляют эти аксиомы?

4.** Сформулируйте аксиому параллельности.

5.** Сформулируйте аксиому Архимеда.

6.** Какая последовательность отрезков называется стягивающейся? Сформулируйте аксиому Кантора.

7.** Сформулируйте аксиому полноты.

8.** Что означает непротиворечивость системы аксиом?

Задачи и упражнения

1.** Дана прямая a и точка A вне её. С помощью аксиом связи докажите, что существует единственная плоскость, на которой лежат прямая a и точка A.

2.** а) Можно ли доказать с помощью аксиом связи, что на прямой найдутся по крайней мере три различные точки?

б) Откуда следует, что на прямой найдутся по крайней мере три различные точки?

3.** Какое наименьшее число точек может содержать плоскость в модели аксиом связи?

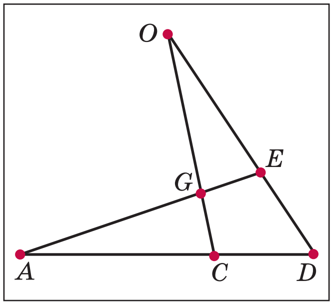

Рис. 9

4.** С помощью аксиом связи и порядка докажите, что если точки A, O, D не лежат на одной прямой и при этом точка C лежит между A и D, точка E лежит между O и D, то существует такая точка G, которая одновременно лежит между A и E и между O и C (рис. 9).

5.** С помощью аксиом связи и порядка докажите, что для любых различных точек A и B существует точка C, которая лежит между A и B.

6.** С помощью аксиом конгруэнтности докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

7.** Угол называется прямым, если он конгруэнтен (или равен) своему смежному углу. С помощью аксиом конгруэнтности докажите, что все прямые углы конгруэнтны между собой.

8.** Докажите, что из аксиом связи, порядка и конгруэнтности выводимы следующие утверждения:

а) первый и второй признаки равенства треугольников;

б) через каждую точку A прямой a можно провести перпендикулярную ей прямую, и притом только одну;

в) каждый отрезок AB можно разделить пополам;

г) в равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой;

д) внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, с ним не смежного;

е) из данной точки на данную прямую можно опустить единственный перпендикуляр;

ё) два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются.

9.** Докажите, что из системы аксиом Гильберта следует пятый постулат Евклида.

10.** Докажите, что из аксиом связи, порядка, конгруэнтности и аксиомы параллельности выводимы следующие утверждения:

а) каждая прямая в пересечении с двумя параллельными прямыми образует равные соответственные углы;

б) сумма внутренних углов любого треугольника равна двум прямым.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько рёбер имеет треугольная пирамида?

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

1.2. На сколько частей разделяют пространство плоскости всех граней куба?

1) 27 2) 9 3) 16 4) 12

1.3. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость четыре прямые?

1) 10 2) 11 3) 12 4) 13

1.4. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость три окружности?

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) любые три различные точки лежат на одной окружности

2) существуют три различные точки, которые не лежат ни на какой окружности

3) существуют четыре различные точки, которые не лежат ни на какой окружности

4) если четыре различные точки лежат на одной окружности, то такая окружность единственная

2.2. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

2) если четыре угла одного четырёхугольника равны соответственно четырём углам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники подобны

3) если диагонали одного ромба соответственно пропорциональны диагоналям другого ромба, то такие ромбы подобны

4) если стороны одного параллелограмма соответственно пропорциональны сторонам другого параллелограмма, то такие параллелограммы подобны

2.3. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный

2) если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то треугольник тупоугольный

3) если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то треугольник остроугольный

4) если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны

2.4. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) прямая параллельна сама себе

2) если на плоскости две прямые параллельны одной прямой, то такие прямые параллельны

3) если на плоскости две прямые перпендикулярны одной прямой, то такие прямые перпендикулярны

4) если на плоскости две прямые перпендикулярны одной прямой, то такие прямые параллельны

§ 3. АКСИОМЫ ПЕАНО ДЛЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

3.1. Система аксиом Пеано.** Аксиоматический метод успешно применяется не только в геометрии, но также и в других разделах математики. Здесь мы продемонстрируем аксиоматический метод в арифметике натуральных чисел.

Натуральные числа возникли как из подсчёта (один, два, три и так далее), так и из перечисления предметов (первый, второй, третий и так далее). Система аксиом для натуральных чисел, которую мы сейчас рассмотрим, отражает эти процессы счёта и перечисления.

Основными понятиями в системе аксиом, предложенной знаменитым итальянским математиком Джузеппе Пеано (1858—1932), являются натуральные числа и основное отношение — «непосредственно следовать».

Система аксиом Пеано состоит из четырёх утверждений:

1. **Число 1 есть натуральное число, которое не следует непосредственно ни за каким натуральным числом.**

2. **Каково бы ни было натуральное число n, существует лишь одно натуральное число n', которое непосредственно следует за числом n.**

3. Каждое натуральное число, отличное от единицы, следует непосредственно лишь за одним натуральным числом.

4. Если некоторое множество M натуральных чисел содержит число 1 и вместе с каждым натуральным числом n содержит непосредственно следующее за ним число n', то M содержит все натуральные числа.

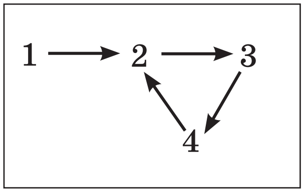

Рис. 1

Аксиома 4 называется *аксиомой математической индукции* и позволяет утверждать, что если некоторое предложение или свойство $P(n)$ справедливо для числа $n = 1$ и для всякого натурального числа k из справедливости $P(k)$ следует справедливость $P(k')$, то $P(n)$ справедливо для всех натуральных чисел.

Это утверждение называется *принципом математической индукции*.

Вопрос. Какие аксиомы Пеано выполняются на множестве натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4\}$, в котором отношение «непосредственно следовать» определено стрелками на схеме (рис. 1)?

3.2. Сложение натуральных чисел.** Используя отношение непосредственного следования, определим сложение натуральных чисел.

Сложение есть операция на множестве натуральных чисел, которая любым двум числам x и y сопоставляет такое число $x + y$, что:

1) $x + 1 = x'$ для всякого натурального x;

2) $x + y' = (x + y)'$, если число $x + y$ уже определено.

Вследствие данного определения, чтобы прибавить к натуральному числу x число 1, достаточно взять натуральное число, непосредственно следующее за x; для того чтобы к натуральному числу x прибавить число, непосредственно следующее за y, достаточно к x прибавить y и от числа $x + y$ перейти к непосредственно следующему за ним. Таким образом, сложение натуральных чисел определяется шаг за шагом, то есть по индукции.

В соответствии с определением сложения устанавливаются свойства этой операции. Например, докажем, что $2 + 2 = 4$. В самом деле, по определению имеем: $2 + 1 = 2' = 3$, откуда $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = 3' = 4$.

Вопрос. Как доказать, что $2 + 3 = 5$?

3.3. Умножение натуральных чисел.** Имея операцию сложения, определим умножение натуральных чисел.

Умножение есть операция на множестве натуральных чисел, которая любым двум числам x и y сопоставляет такое число $x \cdot y$, что:

1) $x \cdot 1 = x$ для всякого натурального x;

2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$, если число $x \cdot y$ уже определено.

Умножение натуральных чисел тоже определяется шаг за шагом, то есть по индукции.

Вопрос. Как доказать, что $3 \cdot 2 = 6$?

3.4. Ассоциативность сложения.** Перечисленных простейших свойств натуральных чисел и определений сложения и умножения достаточно для доказательства всех свойств натуральных чисел, которыми мы обычно пользуемся. Приведём, например, доказательство ассоциативного закона сложения:

для любых x, y, z справедливо равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные x и y. Пусть P — свойство натуральных чисел, определённое так: число z обладает свойством P, если $x + (y + z) = (x + y) + z$. Покажем, что все натуральные числа обладают свойством P. Для этого воспользуемся принципом математической индукции.

Сначала проверим, что число 1 обладает свойством P. Действительно, $x + (y + 1) = x + y'$ (по первому условию из определения сложения), $x + y' = (x + y)'$ (по второму условию из определения сложения), а это равно $(x + y) + 1$ (снова по первому условию). Таким образом, число 1 обладает свойством P: $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.

Предположим теперь, что некоторое натуральное z обладает свойством P, то есть $x + (y + z) = (x + y) + z$. Покажем, что тогда и непосредственно следующее за ним число z' также обладает свойством P:

$$\begin{aligned} & x + (y + z') \overset{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \\ & = x + (y + z)' \overset{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \\ & = \big(x + (y + z)\big)' \overset{\text{(так как } z \text{ обладает свойством } P)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \\ & = \big((x + y) + z\big)' \overset{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \\ & = (x + y) + z'. \end{aligned}$$

Следовательно, число z' обладает свойством P.

Итак, мы доказали, что если число 1 обладает свойством P и если любое натуральное число z обладает свойством P, то и непосредственно следующее за ним число z' также обладает этим свойством. По четвёртой аксиоме Пеано свойство P справедливо для любого натурального числа, то есть для всех натуральных чисел z выполняется равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$. Ввиду того что зафиксированные ранее натуральные числа x и y были произвольными, равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$ выполняется для любых натуральных чисел x, y и z. Утверждение доказано.

Вопрос. Как с помощью ассоциативного закона доказать, что $117 + 3 = 115 + 5$?

3.5. Коммутативность сложения.** В этом пункте мы установим закон коммутативности сложения натуральных чисел:

для любых x и y справедливо равенство $x + y = y + x$.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение: для любого натурального числа x справедливо равенство $x + 1 = 1 + x$. Снова воспользуемся методом математической индукции.

Сначала проверим, что это свойство выполнимо для $x = 1$. Действительно, в данном случае $x + 1 = 1 + 1$ и $1 + x = 1 + 1$.

Предположим теперь, что свойство $x + 1 = 1 + x$ выполнимо для некоторого натурального x, и докажем, что оно справедливо для x'. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
&x' + 1 \xlongequal{\text{(по пункту 1 определения сложения)}} \\
&= (x')' \xlongequal{\text{(по пункту 1 определения сложения)}} \\
&= (x + 1)' \xlongequal{\text{(используем предположение } x + 1 = 1 + x\text{)}} \\
&= (1 + x)' \xlongequal{\text{(по пункту 2 определения сложения)}} \\
&= 1 + x'.
\end{aligned}
$$

По принципу математической индукции равенство $x + 1 = 1 + x$ доказано для всех натуральных x.

Теперь приступим к доказательству закона коммутативности в общем случае: $x + y = y + x$.

Доказательство. Для $y = 1$ это утверждение только что было доказано. Допустим, что наше утверждение верно при некотором y. Тогда для y' мы имеем:

$$
\begin{aligned}
&x + y' \xlongequal{\text{(по пунктам 1 и 2 определения сложения)}} \\
&= (x + y) + 1 \xlongequal{\text{(по предположению } x + y = y + x\text{)}} \\
&= (y + x) + 1 \xlongequal{\text{(из ассоциативности сложения)}} \\
&= y + (x + 1) \xlongequal{\text{(по свойству } x + 1 = 1 + x\text{)}} \\
&= y + (1 + x) \xlongequal{\text{(из ассоциативности сложения)}} \\
&= (y + 1) + x \xlongequal{\text{(по пункту 1 определения сложения)}} \\
&= y' + x.
\end{aligned}
$$

По принципу математической индукции равенство $x + y = y + x$ доказано для всех натуральных x и y.

Вопрос. Как доказать, что $(x + y) + z = (z + y) + x$?

3.6. Об основных свойствах других операций над натуральными числами.** Доказав основные свойства сложения натуральных чисел, можно аналогично установить основные свойства операции умножения, определить степень с натуральным показателем, вывести другие привычные нам свойства натуральных чисел.

Вопрос. Как для натуральных чисел определить неравенство $x > y$?

Контрольные вопросы и задания

1.** Сформулируйте аксиомы Пеано.

2.** Докажите ассоциативность сложения.

3.** Докажите коммутативность сложения.

Задачи и упражнения

1.** Докажите дистрибутивный закон: $x(y+z) = xy + xz$.

2.** Используя свойства операции сложения, докажите коммутативность умножения.

3.** Докажите ассоциативность умножения.

4.** Положим $x > y$, если найдётся такое натуральное число z, что $x = y + z$. Докажите, что:

а) если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$;

б) если $x > y$, то $x + z > y + z$ для любого z.

5.** Определите операцию вычитания меньшего натурального числа из большего натурального числа.

6.** Докажите, что $x - (y - z) = (x - y) + z$, если определены $x - y$ и $y - z$.

7.** Докажите, что каждое натуральное число можно единственным способом представить в виде $a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \ldots + 10^k \cdot a_k$, где a_k — натуральное число, меньшее 10, а каждое из чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ либо равно нулю, либо является натуральным числом, меньшим 10; k — либо 0, либо натуральное число.

Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из следующих равенств является верным, если $y = x'$, $z = y'$?

1) $x + z = (2x)'$ 2) $(x + z)' = 2z$

3) $x + z = 2y$ 4) $(x + z)' = 2y$

1.2. Какое из следующих равенств является верным, если $y = x'$, $z = y'$?

1) $xz = (x^2)'$ 2) $(xz)' = z^2$

3) $xz = y^2$ 4) $(xz)' = y^2$

1.3. Чему равна сумма всех натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 3?

1) 1683 2) 1693 3) 1703 4) 1713