ФГОС

ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

к учебнику
«Математика: алгебра и геометрия»
7 класс

под редакцией академика РАН В.В. Козлова
и академика РАО А.А. Никитина

Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2013

УДК 372.016:51*07(072)
ББК 74.262.21
К53

Авторы-составители:
В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин

К53 **Книга** для учителя к учебнику «Математика: алгебра и геометрия». 7 класс. Под редакцией акад. РАН В.В. Козлова и акад. РАО А.А. Никитина /авт.-сост. В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2013. — 256 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

ISBN 978-5-00007-191-5

Издание адресовано учителям математики общеобразовательных учреждений, методистам.

УДК 372.016:51*07(072)
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-00007-191-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Книга для учителя» к учебнику «Математика: алгебра и геометрия» для 7 класса общеобразовательных учреждений[1] учебно-методического комплекса из серии «ФГОС. Инновационная школа. Математика» в составе трехуровневых учебников, рабочих тетрадей и дидактических материалов с 5 по 11 класс рассчитана на то, чтобы облегчить работу преподавателей, уменьшить затраты времени и усилий на восприятие замысла и содержания многоуровневого учебника.

Изучать математику целесообразно в единстве ее идей и методов. Единое изложение материала подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов, тесную связь с другими науками, а также красоту математики как важного элемента общей человеческой культуры.

Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

Развитие интереса к математике является одним из залогов ее качественного усвоения. Использование увлекательных задач позволяет подчеркнуть красоту математики и помогает сделать преподавание математики живым и менее формальным.

Математика носит абстрактный характер, имеет свои законы развития и применяется в различных сферах человеческой деятельности. Умение абстрактно мыслить вырабатывается постепенно, опираясь на конкретные реальные объекты.

---

[1] Математика: алгебра и геометрия: учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. М.: ООО «Русское слово — учебник», 2013.

Потребности использования математики в разных областях человеческой деятельности различны, так же как различны и природные склонности, способности и типы мышления учащихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объеме. Кроме того, изучение и осознанное восприятие многих математических понятий, свойств и методов требует постепенного перехода от наблюдений и экспериментов к точным формулировкам и доказательствам, неоднократного возвращения к фундаментальным понятиям.

Авторским коллективом из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одаренности детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета создан учебно-методический комплекс, в котором предложены три уровня обучения математике.

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности. Многоуровневое обучение математике, начиная с 5 класса, способно обеспечить минимальные запросы общества к уровню математической подготовки и предоставить всем учащимся широкие возможности для развития своих способностей и получения дополнительных математических знаний. При этом учителя получают возможность строить преподавание с учетом специфики учебных заведений, интересов и уровня подготовки учащихся и при наличии возможности осуществлять углубленное изучение математики. Допредпрофильным обучением мы будем называть обучение более высокого уровня в 5 — 6 классах, при котором уделяется повышенное внимание элементам логических рассуждений на основе конкретных примеров в дополнение к освоению фактических знаний и алгоритмов. Предпрофильным обучением принято считать обучение более высокого уровня в 7—9 классах, которое отличается не столько тем, что ученики решают в целом более трудные задачи, а скорее более точными и основательными рассуждениями, установлением взаимосвязей различных утверждений. Профильное обучение, наряду со специализированной подготовкой, осуществляемое в старших классах и реализуемое в рамках различных организационных и дидактических форм изучения предмета, рассчитано на то, чтобы учащиеся по окончании старших классов приобретали компетенции, необходимые для последующего обучения в вузах с высокими требованиями к математическим дисциплинам.

Первый уровень предполагает овладение таким минимумом знаний и умений, которые необходимы каждому культурному человеку.

Второй уровень развивает и дополняет первый уровень, тесно с ним связан и содержит часть материала для углубленного изучения математики. Он позволяет обеспечить умения и навыки, необходимые для успешного продолжения обучения в вузе.

Третий уровень — специализированный — рассчитан на воспитание профессионального интереса к математике и сознательное овладение логикой рассуждений.

В многоуровневом учебнике по математике для 7 класса продолжается формирование единого цельного восприятия математики по основным направлениям, опираясь на материал учебников 5 и 6 классов.

Первое направление продолжает работу над техникой вычислений на основе изучения тождественных преобразований алгебраических выражений, уравнений, неравенств и некоторых систем уравнений.

Второе направление отражает практическое значение математики. Рассматриваются основные понятия, связанные с приближенным измерением величин, изучаются правила действий с приближенными значениями и даются некоторые приближенные формулы, которые позволяют упростить вычисления, приводя к практически значимым результатам.

Третье направление относится к систематическому изучению геометрии. Во всей полноте рассматриваются признаки равенства треугольников; вводится понятие параллельности и на основе аксиомы параллельности изучаются свойства параллельных прямых, свойства параллелограмма и трапеции; теорема Фалеса в классическом и обобщенном виде; рассматриваются новые свойства окружностей и многоугольников.

Известные сведения об углах и площадях треугольников обобщаются на случай четырехугольников и других многоугольников.

Четвертое направление связано с применением алгебраических методов в геометрии, что достигается введением общего понятия графика уравнения, позволяющего сопоставлять геометрическим объектам алгебраические соотношения, и обратно.

Пятое направление относится к изучению функциональных зависимостей и представлено в большем объеме, чем в 5 и 6 классах. С достаточной полнотой изучаются линейные функции, приводятся примеры других функциональных зависимостей.

Шестое направление отражает главную особенность математики — логическое обоснование формулируемых результатов. По сравнению с 5 и 6 классами значительно увеличивается количество тех утверждений, которые приводятся с соответствующими доказательствами.

Изучение теоретического материала предполагает решение задач и упражнений, ответы на тесты как из учебника, так и из рабочей тетради.

В целом структура учебника по математике для 7 класса достаточно традиционна: учебник разбит на главы, главы — на параграфы, параграфы разбиты на пункты, в конце каждого параграфа формулируются контрольные вопросы и приводятся задачи, упражнения и тесты.

К особенностям изложения материала следует отнести распределение пунктов по уровням изучения и наличие в конце каждого пункта так называемого «открытого» вопроса, который предназначен для того, чтобы учащиеся осмыслили прочитанное и могли найти ответ на поставленный вопрос либо из самого текста пункта, либо на основе ранее изученного материала. Иногда для ответа учащимся нужно попытаться самим дать определения понятий, обобщить некоторые рассуждения и т. п. Чаще всего предполагается, что смысл открытого вопроса является естественным продолжением основной идеи пункта. Тем самым ответ на открытый вопрос можно считать промежуточным итогом по изучению соответствующего пункта. Открытые вопросы не являются контрольными и не всегда подразумевают наличие точных или конкретных ответов. Открытый вопрос позволяет читателю остановиться и задуматься над только что прочитанным материалом. Иногда ответ на вопрос приводит материал пункта к определенному логическому завершению. Именно поэтому необходимо найти ответы на открытые вопросы либо самостоятельно, либо с посторонней помощью. Разумеется, иногда учащиеся могут дать неверные или неудовлетворительные с математической точки зрения ответы на эти вопросы. В таком случае имеет смысл сравнить приведенный ответ с правильным и выяснить, из каких соображений проистекает правильный ответ. Тем самым делается попытка подвести учащихся к пониманию естественности математических определений, приемов рассуждений.

Материал учебника рассматривается, следуя структуре учебника, по определенной схеме. Сначала определяются **цели,** которые должны достигаться в процессе изучения данной главы, данного параграфа. Затем уточняются **особенности** изложения учебного материала данной главы, данного параграфа, особенности распределения учебного материала по уровням обучения. При этом указываются **предварительные знания, умения и навыки,** предполагаемые у учащихся. Перечисляются также **новые математические понятия и свойства**, изучение которых производится в данном параграфе или данной главе и которые могут быть определены и обоснованы с различной степенью строгости. Указываются также **вспомогательные понятия.** Это преимущественно понятия из жизненной практики или других учебных дисциплин. Вспомогательными на текущем этапе обучения могут оказаться термины, которые только упоминаются в тексте, в полном объеме будут изучаться в дальнейшем, но математическое определение которых давать преждевременно. Многократное возвращение к важнейшим понятиям способствует их лучшему восприятию, расширению кругозора, привитию ощущения «широты мира», осознанию того, что понятия могут вмещать в себя значительно больше, чем изучено на данном этапе.

В пособии приводятся варианты ответов на **открытые вопросы к пунктам**. Во многих случаях это только варианты ответов, так как со стороны учащихся можно ожидать разнообразных, а иногда и неожиданных правильных ответов.

Учебник 7 класса и рабочие тетради к нему содержат значительное число непростых задач, преимущественно рассчитанных на третий уровень. В пособии приводятся **указания к**

решению большинства **наиболее трудных** или нестандартных **задач.**

В пособии также приведены **указания по работе с наиболее трудными тестами.** В учебнике и рабочих тетрадях к нему содержатся образцы двух видов тестовых заданий. Задания первого вида достаточно традиционны — это одновариантные тесты, рассчитанные на выбор одного верного варианта из числа приведенных. Задания второго вида — многовариантные тесты, рассчитанные на выбор нескольких правильных ответов из числа приведенных. Работа над многовариантными тестами чаще всего предполагает анализ предлагаемых заданий и поиск закономерностей, с учетом которых можно получить правильный ответ, состоящий **в выборе всех верных вариантов.** Среди многовариантных тестов можно найти значительное число непростых задач, в основном рассчитанных на второй и третий уровень. В конце пособия приводятся **ответы ко всем тестам** из учебника.

В конце пособия приведены **образцы вариантов самостоятельных и контрольных работ.**

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровневого обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе работы в формировании содержания трехуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — доцента В.В. Войтишека, профессора Т.И. Зеленяка и профессора Д.М. Смирнова.

Глава 1
УГЛЫ

Цель главы — напомнить основные сведения об углах, изучавшиеся в 5 классе, рассмотреть обобщение на углы, большие развернутого, и способы измерения этих углов.

Особенности главы. Значительная часть данной главы рассчитана на повторение непростого понятия угла. К изучению этого материала целесообразно систематически привлекать учащихся. Важно, чтобы при этом учащиеся усвоили два возможных подхода к понятию угла: угол как геометрическая фигура, образованная двумя различными лучами с общим началом, и угол как часть плоскости, образуемая при построении двух лучей с общим началом (плоский угол). Оба подхода имеют право на существование и используются в зависимости от тех конкретных задач, которые требуется решать. Однако рассмотрение плоских углов позволяет содержательнее подходить к определению суммы углов и к процедуре измерения углов.

Работа с данной главой на первом и втором уровне в основном рассчитана на содержательное повторение ранее изученного материала. Новое содержание главы рассчитано преимущественно на третий уровень и имеет отношение к обобщению измерения плоских углов. Для этого рассматривается соответствие между плоским углом и дугой вспомогательной окружности с центром в вершине угла. С помощью этого соответствия рассматривается понятие радианной меры угла и измерение плоских углов, больших развернутого угла.

§ 1. УГЛЫ, ПЛОСКИЕ УГЛЫ

Цель параграфа — вспомнить понятие угла и выяснить различие между углом, образованным двумя лучами, и плоским углом, то есть углом, как частью плоскости.

Особенности параграфа. В самом начале угол определяется как геометрическая фигура, образованная двумя лучами с общим началом. Затем угол рассматривается как часть плоскости, образуемая при построении двух лучей с общим началом, то есть вводится понятие плоского угла. Далее опре-

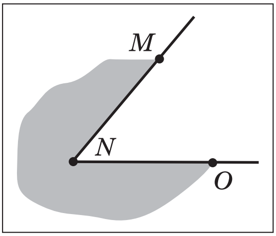


Рис. 1

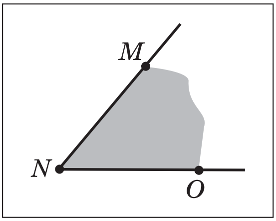


Рис. 2

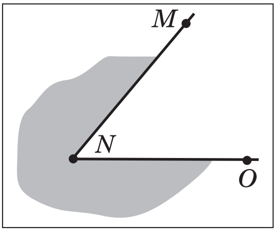


Рис. 3

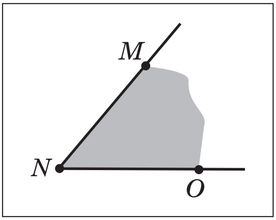


Рис. 4

деляется угол между двумя отрезками с общей вершиной и, наконец, определяются внутренние углы треугольника. Частично на примере прямоугольника обращается внимание на понятие внутреннего угла четырехугольника.

Для закрепления рассматриваемых особенностей в понятии угла необходимо обратить внимание учащихся на многозначность в обозначении углов, что без привлечения иллюстраций сделать практически невозможно. В результате одно и то же обозначение угла, например $\angle MNO$, содержит в себе несколько смыслов:

1) угол, образованный двумя лучами NM и NO;

2) плоский угол, образованный лучами NM и NO; при этом, вообще говоря, подразумеваются две возможности, указанные на рис. 1 и 2;

3) угол между отрезками MN и NO (рис. 3 и 4).

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: угол между двумя лучами; плоский угол; смежные углы; вертикальные углы.

Новые математические понятия: угол между отрезками с общей вершиной; внутренний угол треугольника.

Вспомогательные понятия: луч; плоскость; полуплоскость.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как еще можно обозначить угол на рис. 5?

Ответ. $\angle CBA$.

1.2. В чем разница между углом, образованным двумя лучами с общим началом и плоским углом, ограниченным этими же двумя лучами?

Ответ. Угол, образованный двумя лучами с общей вершиной, состоит только из точек этих лучей. У плоского угла, ограниченного этими лучами, к точкам лучей добавляется множество точек, принадлежащих одной из областей, ограниченных лучом.

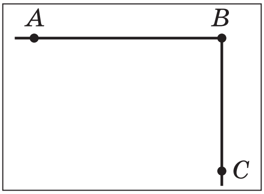


Рис. 5

1.3. Чем отличается развернутый плоский угол от полуплоскости?

Ответ. Допустим, что рассматривается развернутый угол ANB (рис. 6) и ему соответствует полуплоскость с границей AB. Тогда полуплоскость — это просто множество точек плоскости, а развернутый угол — это геометрическая фигура, у которой есть вершина N, есть стороны NA и NB и есть внутренность, которая совпадает с полуплоскостью без ее границы.

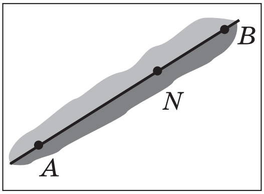


Рис. 6

1.4. В каком случае плоский угол является суммой шести плоских углов?

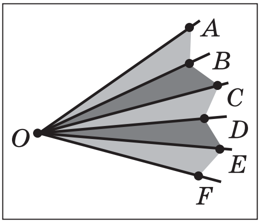


Рис. 7

Ответ. Если для заданных углов определена сумма четырех из этих углов, как указано в данном пункте, то, составляя сумму этого угла с пятым из заданных плоских углов, получим сумму пяти плоских углов из числа заданных. Составляя сумму полученного в результате угла с шестым из заданных плоских углов, найдем сумму всех шести заданных плоских углов.

1.5. Для каких углов на рис. 7 луч OD является биссектрисой, если угол AOF является суммой пяти равных углов: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$?

Ответ. Для $\angle COE$, для $\angle BOF$.

1.6. Сколько плоских углов образуют диагонали квадрата с его сторонами?

Вариант ответа. Одна диагональ квадрата и одна из сторон квадрата определяют два плоских угла (рис. 8). Если взять другую диагональ или другую сто-

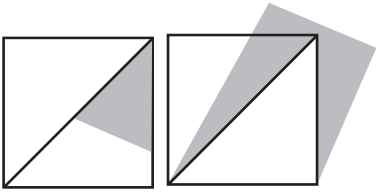


Рис. 8

рону квадрата, то получим другие плоские углы на плоскости. Таким образом, выбирая по очереди одну из двух диагоналей, одну из четырех сторон и рассматривая два соответствующих плоских угла, всего получим $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ плоских углов.

1.7. Сколько плоских углов образуют все пары соседних сторон четырехугольника?

Ответ. Одна пара соседних сторон четырехугольника образует два плоских угла. Поэтому всего: $4 \cdot 2 = 8$ плоских углов.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Сколько неразвернутых углов разного вида вы можете указать на рис. 9?

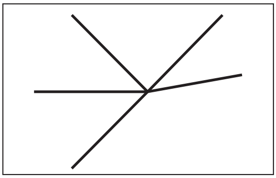


Рис. 9

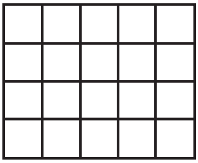


Рис. 10

Указание. Так как на рисунке проведено 5 лучей, то из них можно составить $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ пар лучей, образующих углы. Но из них нужно удалить развернутый угол. Всего получается 9 углов.

3. Сколько всего плоских углов вы можете указать на рис. 9?

Указание. Каждая пара лучей определяет два плоских угла, включая и развернутые углы. Всего получается 20 углов.

8.** Сколько всего плоских неразвернутых углов вы можете указать на рис. 10?

Указание. Первый способ. Для каждой из 12 внутренних точек можно указать по 8 плоских углов; для каждой из 14 точек на границе, не совпадающих с вершинами, можно указать по 4 плоских угла; для каждой из 4 вершин можно указать по 2 плоских угла. Всего получается 160 углов.

Второй способ. Ориентируя стороны углов так, как расположен угол прямоугольника с вершиной в правом верхнем углу, и сдвигая вершину влево по каждому горизонтальному отрезку, получим $5 \cdot 4$ углов величиной в $90°$. Поступая аналогично для каждой из вершин прямоугольника, получим $5 \cdot 4 \cdot 4$ углов величиной в $90°$. Умножив последнее число на 2, получим ответ.

9.** Сколько развернутых углов образуют часовая и минутная стрелки за 12 часов?

Указание. В промежутке от 12 до 13 часов будет одно положение; от 13 до 14 часов одно положение и т. д. Однако в промежутке от 17 до 19 часов — только одно положение (ровно в 18 часов). Всего получается 11 развернутых углов.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Три прямые расположены так, как на рис. 11, то есть имеют одну общую точку. Сколько неразвернутых углов можно указать на этом рисунке?

1) 8 2) 12 3) 24 4) 32

Указание. Всего на рис. 11 есть лучи, из которых можно составить $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ пар лучей. Из них три пары образуют развернутые углы. Следовательно, неразвернутых углов — 12.

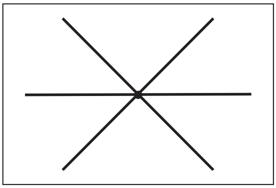


Рис. 11

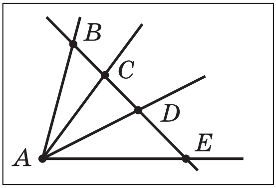


Рис. 12

2.1. На рис. 12 рассматриваются плоские углы, меньше развернутого. Какие из указанных плоских углов содержат плоский угол DAC?

1) $\angle EAB$ 2) $\angle CAE$

3) $\angle ADE$ 4) $\angle ADB$

Указание. Плоский угол из варианта 1 содержит вершину A, лучи AC, AD и поэтому содержит весь плоский угол DAC. Аналогично устанавливается, что и плоский угол CAE из варианта 2 содержит плоский угол DAC. Вариант 3 не подходит, потому что точка C не содержится в плоском угле ADE. Вариант 4 не подходит, потому что плоский угол ADB содержит только часть лучей AC и AD.

§ 2. ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОГО УГЛА

Цель параграфа — вспомнить градусную меру угла, основное свойство градусной меры, рассмотреть новые единицы измерения величин углов.

Особенности параграфа. Изложение материала в значительной степени опирается на те сведения об углах, которые рассматривались в 5 классе. Определение меры плоского угла проводится по аналогии с процедурой измерения длин отрезков. Это упрощает восприятие довольно сложного понятия объединения множеств в применении к определению суммы плоских углов. Более того, такой подход позволяет естественным образом перейти к плоским углам, градусная мера которых больше 180°.

В конце параграфа рассматривается соответствие между углами и дугами окружности, центр которой совпадает с вершиной угла. Это позволяет на третьем уровне ознакомить учащихся с радианной мерой угла.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: определение градусной меры; измерение углов при помощи транспортира.

Новые математические понятия и свойства: угловая минута; угловая секунда; соответствие между плоскими углами и дугами окружности; градусная мера плоского угла, который больше развернутого угла.

Вспомогательные понятия: радианная мера угла.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Могут ли неравные углы иметь одинаковую градусную меру?

Ответ. Нет, так как, по одному из свойств градусной меры, если два угла имеют одну и ту же градусную меру, то эти углы равны.

2.2. Почему от любого луча можно отложить только два различных угла величины 90°?

Ответ. Луч является частью только одной прямой. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. В каждой полуплоскости от этого луча можно отложить только один угол величиной 90°.

2.3. Чем отличается угол от величины угла?

Ответ. Угол — это геометрическая фигура, а величина угла — это числовая характеристика угла, которая зависит от единицы измерения.

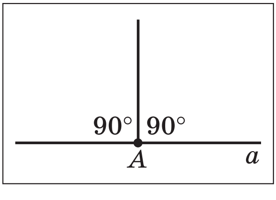


Рис. 1

2.4. Как представить развернутый угол в виде суммы двух равных углов?

Ответ. Развернутый угол с вершиной A является полуплоскостью, ограниченной прямой a с точкой A. Отложим угол в 90° от одного из лучей этой прямой в одну из полуплоскостей. Получим искомое представление (рис. 1).

2.5. Как на практике сравнить два плоских угла?

Вариант ответа. Сделать копию одного плоского угла, вершину, одну из сторон и еще некоторую точку этой копии совместить соответственно с вершиной, стороной и некоторой точкой второго угла. При этом копия либо полностью совместится со вторым углом, либо будет частью второго угла, либо второй угол будет частью копии.

2.6. Какую часть прямого угла составляет угол между лучами, определяющими направления зюйд-зюйд-вест и зюйд-ост-ост?

Ответ. Зюйд-зюйд-вест — биссектриса угла между лучами зюйд и зюйд-вест, а зюйд-ост-ост — это биссектриса угла между лучами зюйд-ост и ост. Поэтому направления зюйд-зюйд-вест и зюйд-ост отличаются на два румба, направления зюйд-ост и зюйд — на 4 румба, направления зюйд и зюйд-зюйд-вест — на 2 румба. Всего получается 8 румбов или $90°$.

2.7. Сколько угловых секунд содержит прямой угол?

Ответ. В одной угловой минуте содержится 60 угловых секунд. В одном угловом градусе содержится 60 угловых минут. Поэтому прямой угол, то есть угол в d, содержит 324 000 угловых секунд, так как $324\,000 = 90 \cdot 60 \cdot 60$.

2.8. Чему равна градусная мера угла, смежного к углу, величина которого $\alpha°$?

Ответ. Угол вместе со смежным ему углом в сумме составляют развернутый угол, поэтому если угол имеет величину $\alpha°$, то смежный ему угол имеет величину $180° - \alpha°$.

2.9. Какую часть окружности образуют дуги, принадлежащие двум смежным углам с вершиной в центре окружности?

Ответ. Половину окружности.

2.10. На сколько равных частей нужно разделить окружность, чтобы получить дугу окружности, соответствующую углу в $1''$?

Ответ. В одной угловой минуте содержится 60 угловых секунд. В одном угловом градусе содержится 60 угловых минут. Всей окружности соответствует 360 градусов. Поэтому окружность нужно разделить на 1 296 000 угловых секунд, так как $1\,296\,000 = 360 \cdot 60 \cdot 60$.

2.11.** Какую часть радиана содержит одна угловая секунда?

Ответ. Один угловой градус равен $\frac{\pi}{180}$ радиан, поэтому одна угловая минута содержит в 60 раз меньшее количество радиан, то есть $\frac{\pi}{180 \cdot 60} = \frac{\pi}{10\,800}$ (радиан).

2.12.* Как изображается плоский угол величиной в 270°?

Ответ. Это угол, дополняющий угол в 90° до угла в 360°, то есть до полного угла.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают: а) 5 ч; б) 8 ч; в)* 2 ч 30 мин; г)* 7 ч 30 мин; д)** k ч m мин, где k — некоторое натуральное число от 1 до 12, а m — некоторое натуральное число от 1 до 60?

Указание. При решении задач со стрелками часов необходимо учитывать следующее: между двумя соседними часовыми делениями угол равен 30°, половине часа соответствует смещение часовой стрелки на половину этого угла, $\frac{3}{8}$ часа — на $\frac{3}{8}$ от угла в 30° и т. д. Соответственно получаются ответы: а) 150°; б) 120°; в) 105°; г)* 45°; д)** часовая стрелка сместится от нулевой отметки (0 ч 0 мин) по ходу стрелок на угол $k \cdot 30° + \frac{m}{60} \cdot 30°$, а минутная стрелка — на угол $m \cdot 6°$.

9.** Из бумаги вырезан угол в 19°. Как с помощью этого угла изобразить угол в 1°?

Указание. Заметим, что 19 · 19 = 361, а полный угол, соответствующий окружности, имеет величину 360°. Отсюда следует, что если последовательно 19 раз откладывать углы по 19°, то угол между первым и последним лучом будет равен 1°.

10.** Предположим, что угол между стрелками часов измеряется в градусах по ходу часовой стрелки от часовой до минутной стрелки. Чему равен угол между стрелками, когда часы показывают: а) 8 ч 15 мин; б) 2 ч 15 мин; в) 7 ч 45 мин; г) 2 ч 5 мин?

Указание. Смотрите указание к задаче 6. Соответственно получаются ответы: а) 157°30″; б) 22°30′; в) 42°30′; г) 32°30.

11.** Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки часов совпадают, если считать, что первое совпадение происходит в 0 ч, а последнее — в 24 ч?

Указание. За один час минутная стрелка проходит 360°, а часовая — 30°. Следовательно, «угловое расстояние» между ними изменяется на 330°. Совпадение происходит, когда это расстояние составит 360°, то есть через $\frac{360}{330} = \frac{12}{11}$ ч. За 24 ч произойдет $24 : \frac{12}{11} = 22$ совпадения. Если учесть, что первое совпадение произошло в 0 часов, то получится 23 совпадения.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Какую часть от половины развернутого угла составляет угол в 1,8°?

1) $\frac{1}{200}$ 2) $\frac{1}{100}$ 3) $\frac{1}{50}$ 4) $\frac{1}{10}$

Указание. Половина развернутого угла — это 90°. Поделив 1,8 на 90, получаем $\frac{1}{50}$.

2.2.** Плоский угол в $\frac{\pi}{3}$ радиан — это:

1) угол в 90° 2) угол в 60°
3) угол в 3600′ 4) угол в 3600″

Указание. Учесть, что заданный в условии угол соответствует третьей части развернутого угла, а также то, что угол в 60° равен углу в 3600′.

Глава 2
СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Цель главы — установить основные свойства степеней с натуральными показателями, распространить понятие степени и свойства степеней на случай целых показателей, на примере квадратных корней указать на возможность и дальнейшего обобщения понятия степени.

Особенности главы. На первом и втором уровнях обучения определение степени с целым показателем и свойства степеней формируются на основе конкретных примеров. В дополнение к этому на третьем уровне обращается внимание на два принципиально важных момента.

Первое. Задание степеней с натуральными показателями отражает часто встречающееся на практике появление измеряемых величин в виде последовательности чисел. В связи с этим возникают задачи, относящиеся к изучению последовательностей, в том числе и определенных для бесконечного числа номеров. В математике доказательства закономерностей для бесконечных последовательностей часто основаны на методе математической индукции. Учитывая важность этого метода, в данной главе на третьем уровне обращается внимание на возможность индуктивного определения степени с натуральным показателем. В итоге на примере определения степени с натуральным показателем проводится важная подготовительная работа для последующего изучения математической индукции в старших классах.

Второе. Определение степени в неявном виде задает функцию, которая при фиксированном значении основания степени сначала каждому натуральному значению показателя степени, а в последующем и целому ставит в соответствие определенное число. В связи с этим, как и для других функций, возникает задача о нахождении обратной функции. Заметим, что идея обратимости напрямую связана с решением уравнений и поэтому уже неоднократно встречалась ранее. В этой главе также уделяется внимание обратимости показательной функции. В итоге в порядке ознакомления на третьем уровне рассматриваются логарифмы чисел, являющихся натуральными степенями основания. При изучении этого материала важно подчеркнуть, что понятие логарифма позволяет по значению степени данного положительного числа находить показатель этой степени.

Задачи и упражнения к этой главе в основном несложные и рассчитаны на приобретение начальных навыков преобразования числовых и буквенных выражений со степенями. В последующем, при изучении тождественных преобразований, уравнений и неравенств аналогичные упражнения будут встречаться неоднократно.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Цель параграфа — напомнить известное с 5 класса понятие степени с натуральным показателем, привести примеры задач на применение степени числа.

Особенности параграфа. На первом и втором уровнях материал параграфа рассчитан на повторение известных понятий. Однако в пунктах, рассчитанных на третий уровень обучения, содержится довольно много нового. Прежде всего индуктивный подход к определению степени с натуральным показателем. При изучении этого материала важно, чтобы учащиеся осознали естественность определения по индукции и научились записывать схему индуктивного перехода при конкретных значениях переменной. Далее, также на третьем уровне предполагается знакомство учащихся с понятием логарифма. Главное, к чему следует стремиться при изучении этого материала, чтобы ученики поняли, что логарифм по значению степени положительного числа позволяет найти соответствующий показатель степени.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: арифметические операции для дробных чисел; признаки делимости.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: логарифм.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Что означает запись $((-3)^1)^{100}$?

Ответ. Сначала число (–3) возводится в степень 1, а затем полученное число, равное (–3), возводится в степень 100.

1.2.** Чему равно произведение чисел, одно из которых равно трем в девяносто девятой степени, а другое равно трем в степени сто один?

Ответ. Так как 3^{99} есть произведение 99 чисел, равных 3, а 3^{101} — произведение 101 числа, равных 3, то $3^{99} \cdot 3^{101}$ равно произведению 200 чисел, равных 3, то есть равно 3^{200}.

1.3.* На каком месте в последовательности всех степеней числа 5 с натуральными показателями находится число 3125?

Ответ. Число 3125 равно 5^5. Поэтому в последовательности степеней числа 5 это число расположено на пятом месте.

1.4. Как вы будете находить число, равное кубу числа (–4) в квадрате?

Ответ. Ответ на вопрос имеет двоякое толкование. С одной стороны, можно считать, что куб числа (–4) возводится в квадрат, и тогда получается $((-4)^3)^2 = 4096$. С другой стороны, можно считать, что в куб возводится число $(-4)^2$, и тогда получается $((-4)^2)^3 = 4096$. Так что итоговое значение не зависит от указанных толкований приведенной фразы.

1.5.** Чему равен логарифм по основанию 10 от числа сто миллионов?

Ответ. Так как $100\,000\,000 = 10^8$, то $\log_{10} 100\,000\,000 = 8$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Запишите в виде некоторой степени с натуральным показателем, большим 1, числа: а) 125; б) 289; в) 243; г) 256; д) 729; е) 625; ё) 4096; ж) 1296.

Указание. В пунктах а, г — ж на основании известных признаков делимости удается достаточно быстро получить разложение на простые множители. В пункте б следует получить равенство $289 = 17^2$. В пункте в следует заметить, что 343 делится на 7.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Чему равно произведение первых трех чисел из последовательности степеней числа 2?

1) 54 2) 64 3) 74 4) 84

Указание. Важно понять, что речь идет о произведении четырех чисел 2, 4, 8 и 16.

2.2. Среди следующих чисел укажите числа, равные некоторым степеням числа 0,5.

1) 0,5 2) 0,25 3) 0,75 4) 1

Указание. Понятно, что $0{,}5 = (0{,}5)^1$, $0{,}25 = (0{,}5)^2$. При возведении числа 0,5 в натуральную степень, большую единицы, получается число, меньше 0,5. Поэтому ни 0,75, ни 1 натуральными степенями числа 0,5 не являются.

2.3.** Значения каких из указанных выражений не равны 2?

1) $\log_9 27$ 2) $\log_3 27$ 3) $\log_{11} 121$ 4) $\log_{10} 10$

Указание. $\log_9 27$ не равен 2, потому что $9^2 = 81$, поэтому подходит; $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$, поэтому тоже подходит; $\log_{11} 121 = \log_{11} 11^2 = 2$, поэтому не подходит; $\log_{10} 10 = 1$, поэтому подходит.

§ 2. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Цель параграфа — изучить основные свойства степеней с натуральными показателями, приобрести начальные навыки применения этих свойств для упрощения числовых и буквенных выражений.

Особенности параграфа. Для изучения на первом и втором уровне выделяются четыре основных свойства — правила действия со степенями. При рассмотрении этих свойств полезно обратить внимание на двойную возможность их использования. Например, свойство последовательного возведения в степень иногда используется для упрощения полученного выражения, а иногда, наоборот, полезно замечать, что некоторую степень числа можно представить в виде квадрата некоторого выражения, в виде куба и т. д. Точно так же свойство возведения произведения двух чисел в некоторую степень можно использовать для записи этого выражения в виде степени одного числа, а иногда, наоборот, оказывается нужным представление степени числа в виде произведения двух степеней.

В конце параграфа в порядке ознакомления на конкретных примерах приводятся основные свойства логарифмов, соответствующие изучаемым свойствам степеней с натуральными показателями.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: степень числа с натуральным показателем.

Новые математические понятия и свойства: правило умножения степеней одного числа; правило возведения степени в степень; правило возведения в степень произведения чисел; правило возведения в степень отношения чисел.

Вспомогательные понятия: логарифм; логарифм произведения двух чисел.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как показать, что $3^5 \cdot 3^6 \cdot 3^7 = 3^{18}$?

Вариант ответа. В обеих частях равенства стоят произведения восемнадцати сомножителей, равных 3.

2.2. Как показать, что $(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}$?

Ответ. По правилам применения скобок и свойствам степеней имеем: $(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$; $2^{(3^4)} = 2^{81}$. Ясно, что $2^{12} \neq 2^{81}$.

2.3. Чему равно произведение чисел 2^{50} и 5^{50}?

Ответ. $2^{50} \cdot 5^{50} = (2 \cdot 5)^{50} = 10^{50}$.

2.4. Чему равно значение $(-1)^{2m}$ при натуральном m?

Ответ. $(-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = 1m = 1$.

2.5. Как показать, что для любого натурального числа n имеет место равенство $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$?

Ответ. Аналогично тому, как сделано в данном пункте, получаем $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^n = 1^n = 1$, откуда $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

2.6. Почему $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$?

Ответ. $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)^n = 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n}$.

2.7.** Что больше: $\log_3 3^{100}$ или $24 \cdot \log_5 5^4$?

Ответ. По определению и по перечисленным в пункте свойствам имеем: $\log_3 3^{100} = 100$; $24 \cdot \log_5 5^4 = 24 \cdot 4 = 96$. Следовательно, первое из чисел больше второго.

2.8.** Чему равна последняя цифра числа 7^{99}?

Ответ. $7^{99} = 7^{96} \cdot 7^3 = (49)^{48} \cdot 343$. Поэтому последняя цифра такая же, как и у числа $9^{48} \cdot 3 = (81)^{24} \cdot 3$. А у этого числа последняя цифра равна 3.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Запишите в степени одного числа: д)* $2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{49}$; е)** $3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \ldots \cdot 3^{2n-1}$.

Указание. В 5 классе встречалась формула $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

6. Запишите разными способами в виде степени для заданий а — е.

Указание. Каждое число сначала представить в виде произведения простых множителей. Например, для е: $64 \cdot 729 = 2^6 \cdot 3^9 = M$. После этого можно получить запись: $M = (2^2 \cdot 3^3)^3$.

7.** г) Найдите значение выражения $\log_8 2^{111}$.

Указание. $\log_8 2^{111} = \log_8 (2^3)^{37} = \log_8 8^{37} = 37$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. На какую наибольшую степень числа 3 делится без остатка произведение $6^2 \cdot 12^3 \cdot 24^4$?

1) на 3^{24} 2) на 3^9 3) на 3^{18} 4) на 3^{28}

Указание. $6^2 \cdot 12^3 \cdot 24^4 = (3^2 \cdot 2^2) \cdot (3^3 \cdot 2^6) \cdot (3^4 \cdot 2^{12}) = 3^9 \cdot 2^{20}$.

2.3. Какие из следующих чисел больше 1?

1) $\dfrac{42^4}{7^3 \cdot 6^2}$ 2) $\dfrac{32^2}{2^8 \cdot 3^2}$ 3) $\dfrac{2^{10} \cdot 5}{64 \cdot 3}$ 4) $\dfrac{7^3 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 6^2 \cdot 14 \cdot 49}$

Указание. Заданные в вариантах выражения сначала можно упростить:

1) $\dfrac{42^4}{7^3 \cdot 6^2} = 7 \cdot 6^2$ 2) $\dfrac{32^2}{2^8 \cdot 3^2} = \dfrac{2^2}{3^2}$

3) $\dfrac{2^{10} \cdot 5}{64 \cdot 3} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3}$ 4) $\dfrac{7^3 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 6^2 \cdot 14 \cdot 49} = \dfrac{11^2}{2^3 \cdot 6^2} = \dfrac{121}{8 \cdot 36}$

2.4. Значения каких из указанных выражений равны 0,25?

1) $\dfrac{3^3 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 2}$ 2) $\dfrac{7^3 \cdot 5^2}{28 \cdot 49 \cdot 25}$

3) $\dfrac{7^{18} \cdot 6^5 \cdot 4^9 \cdot 2^5}{3^5 \cdot 2^7 \cdot 14^{18}}$ 4) $\dfrac{6^3 \cdot 36^2 \cdot 9}{3^3 \cdot 18^3 \cdot 32 \cdot 2^4}$

Указание. Заданные в вариантах выражения сначала можно упростить:

1) $\dfrac{3^3 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 2} = \dfrac{2^4}{2^4} = 1$ 2) $\dfrac{7^3 \cdot 5^2}{28 \cdot 49 \cdot 25} = \dfrac{1}{4}$

3) $\dfrac{7^{18} \cdot 6^5 \cdot 4^9 \cdot 2^5}{3^5 \cdot 2^7 \cdot 14^{18}} = \dfrac{2^5 \cdot 2^{18} \cdot 2^5}{2^7 \cdot 2^{18}} = 2^3$

4) $\dfrac{6^3 \cdot 36^2 \cdot 9}{3^3 \cdot 18^3 \cdot 32 \cdot 2^4} = \dfrac{2^3 \cdot 4^2}{2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^4} = \dfrac{1}{2^5}$

§ 3. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Цель параграфа — распространить понятие степени на случай степени ненулевого числа с целым показателем.

Особенности параграфа. При изучении данного параграфа важно подчеркнуть, что степень с показателем, равным нулю, и с отрицательным целым показателем определяются таким образом, чтобы продолжали выполняться свойства, присущие степеням с натуральными показателями. В частности, желание сохранить правило произведения степеней одного и того же числа приводит к тому, что сначала с учетом этого удается пояснить, почему степень ненулевого числа с показателем, равным нулю, желательно определять как число, равное 1.

Дальнейшее определение степени ненулевого числа с отрицательным целым показателем также получает мотивированное объяснение. Занимаясь этими пояснениями, важно подчеркнуть, и в особенности на третьем уровне, что определение степени с целыми показателями вводится из стремления сохранить основные свойства, однако, после того как соответствующее определение введено, выполнимость основных свойств степени с целыми показателями требует обоснования, и соответствующее изучение свойств степени с целыми показателями предполагается в следующем параграфе.

В связи с понятием степени на втором уровне дополнительно рассматривается понятие геометрической прогрессии.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: степень числа с натуральным показателем; свойства степеней с натуральными показателями.

Новые математические понятия и свойства: степень с целым показателем.

Вспомогательные понятия: геометрическая прогрессия; первый член геометрической прогрессии; знаменатель геометрической прогрессии.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как показать, что если положить по определению $3^0 = 1$, то для любого натурального числа n выполняется равенство $3^{0+n} = 3^0 \cdot 3^n$?

Ответ. $3^{0+n} = 3^n = 1 \cdot 3^n = 3^0 \cdot 3^n$.

3.2. Какие еще выражения, не имеющие смысла, вам известны?

Ответ. Например, $\frac{0}{0}$.

3.3. Как показать, что для любого числа $a \neq 0$ и любого натурального числа n выполняются равенства $(a^n)^0 = (a^0)^n$?

Ответ. Число $(a^n)^0$ равно 1 по определению нулевой степени. Поэтому $(a^0)^n = 1^n = 1 = (a^n)^0$.

3.4. Почему степени с отрицательным показателем определяются только для ненулевых чисел?

Ответ. В определении a^{-n} участвует деление на число a^n. Но на нуль делить нельзя, поэтому $a \neq 0$.

3.5.** Какое значение имеет 2^{-11}, если известно, что $2^{-10} = \frac{1}{1024}$?

Ответ. По определению $2^{-11} = 2^{-10} = \frac{1}{2}$. Поэтому $2^{-11} = \frac{1}{1024} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2048}$.

3.6. Как показать, что сумма $18 \cdot 2^{-1} + 18 \cdot 2^{-2} + 18 \cdot 2^{-3} + 18 \cdot 2^{-4} + 18 \cdot 2^{-5} + 18 \cdot 2^{-6} + 18 \cdot 2^{-7}$ равна $18 - 18 \cdot 2^{-7}$?

Вариант ответа. Приведенные в пункте рисунки наглядно демонстрируют, что площадь незакрашенной части всегда равна площади последнего закрашиваемого прямоугольника. Поэтому общую область закрашенной части можно вычислить, вычитая из площади большего прямоугольника площадь меньшего незакрашенного прямоугольника, что дает $18 - 18 \cdot 2^{-7}$.

3.7.* Каким должен быть седьмой член геометрической прогрессии 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...?

Ответ. Седьмой член равен $486 \cdot 3$, то есть 1458.

3.8.** Как записать начальные четыре члена геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q?

Ответ. a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Упростите: $a^{m^2 - (m-1)(m+1) - 1}$.

Указание. Показатель степени равен $m^2 - (m - 1)(m + 1) - 1$. Преобразуя это выражение, получаем 0 при любом значении m.

3. г)** Найдите $a^{-p \cdot p}$, если $a = -2$ и $a^p = -128$.

Указание. При разложении числа 128 на простые множители получаем $128 = 2^7$, откуда $a^p = (-2)^7 = a^7$, и поэтому $p = 7$. Далее находим: $a^{-p \cdot p} = (-2)^{-49} = -2^{-49}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Среди приведенных чисел укажите наименьшее.

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$

Указание. Каждый очередной вариант из предложенных получается из предшествующего умножением на число, большее 1.

2.2. Какие из указанных выражений равны $\frac{a^2}{b^4}$ при всех ненулевых значениях a и b?

1) $a^2 \cdot (b^{-1})^3 \cdot b^2 \cdot \left(\frac{a}{b^2}\right) \cdot a^{-1}$ 2) $a^3 \cdot b^4 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$

3) $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^6$ 4) $\frac{a}{b^2} \cdot \left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a}{b^2}\right)^3$

Указание. Лучше по очереди находить степени каждой из переменных в заданных выражениях. В результате получим, что варианты 1, 2 и 3 не подходят из-за несовпадения степени переменной b.

2.4. Какие значения может иметь сумма нескольких начальных членов геометрической прогрессии с первым членом 3 и знаменателем $\frac{1}{2}$?

1) $20 + 4^{-1}$ 2) $5 + 4^{-1}$ 3) 5 4) 20

Указание. Можно установить, что с увеличением числа слагаемых в сумме степень числа 2 в знаменателе возрастает. Поэтому ответы нужно искать только среди вариантов 1 и 2.

§ 4. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ С ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Цель параграфа — изучить основные свойства степеней с целыми показателями, продолжить работу по выработке навыков преобразования выражений, содержащих степени.

Особенности параграфа. Формулировки изучаемых свойств в точности копируют аналогичные свойства степеней с натуральными показателями. Поэтому основное внимание следует обратить на приведенные в тексте примеры, которые, вообще говоря, предусматривают все возможные сочетания знаков показателей степеней, необходимые для полного доказательства методом перебора случаев. На третьем уровне именно такие доказательства основных свойств степеней и рассматриваются.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: свойства степеней с натуральными показателями.

Новые математические понятия и свойства: произведение степеней одного ненулевого числа с целыми показателями; возведение степени ненулевого числа с целым показателем в степень с целым показателем; степень с целым показателем произведения ненулевых чисел; степень с целым показателем отношения ненулевых чисел.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Как показать, что $3^{-1001} \cdot 3^{2001} = 3^{1000}$?

Вариант ответа. $3^{-1001} \cdot 3^{2001} = \dfrac{1}{3^{1000}} \cdot 3^{1001} \cdot 3^{1000} = 3^{1000}$.

4.2. Почему первое основное свойство степени с целым показателем записывают только для ненулевого основания степени?

Ответ. Потому что и сама степень определяется только при ненулевых основаниях.

4.3. Как показать, что равенство $(a^{-p})^q = (a^p)^{-q}$ выполняется для любого ненулевого числа a и любых целых чисел p и q?

Ответ. По свойству из данного пункта имеем: $(a^{-p})^q = a^{-pq}$; $(a^p)^{-q} = a^{p(-q)} = a^{-pq}$. Поэтому $(a^{-p})^q = a^{-pq} = (a^p)^{-q}$.

4.4.* Как показать, что равенство $\left(\dfrac{1}{b}\right)^m = \dfrac{1}{b^m}$ выполняется для любого ненулевого числа b и любого целого числа m?

Ответ. $\left(\dfrac{1}{b}\right)^m = (b^{-1})^m = b^{(-1)\cdot m} = b^{-m} = \dfrac{1}{b^m}$.

4.5. Чему равно значение выражения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 6^{-2}$?

Ответ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 6^{-2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2} = 2^{3-2} \cdot 3^{2-2} = 2^1 \cdot 3^0 = 2$.

4.6.* Как доказать, что $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}$ для любых ненулевых чисел x и y?

Ответ. $\dfrac{1}{xy} \cdot (xy) = 1$ и $\left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}\right) \cdot (x \cdot y) = \left(\dfrac{1}{x} \cdot x\right) \cdot \left(\dfrac{1}{y} \cdot y\right) = 1$, откуда и следует указанное равенство.

4.7. Какие свойства степени с целым показателем вы знаете?

Варианты ответа.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. 2. $(a^m)^n = a^m n$.

3. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$. 4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. е)* Найдите значение выражения $2^1 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot \ldots \cdot 2^{-100}$.

Указание. Значение выражения равно степени числа 2 с показателем, равным сумме $(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + (-100))$. Последнюю сумму можно представить в виде $(1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (99 - 100)$, где всего пар скобок 50, и в каждых скобках стоит выражение, равное -1.

4.** Докажите, что:

а) $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{72}$ б) $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

в) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$ г) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} - 1$

д) $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{2}$

Указание. а) $\sqrt{32} = 2\sqrt{8}$; б) воспользоваться формулой квадрата суммы двух чисел; в) воспользоваться формулой разности квадратов двух чисел; г) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)}$; д) выполнить преобразования, аналогичные указанным в г.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Чему равно $(((-2)^{-3})^4)^5$?

1) -2^{-4} 2) 2^{-4} 3) -2^{60} 4) 2^{60}

Указание. Заданное выражение равно $(-2)^{(-3) \cdot 4 \cdot (-5)} = (-2)^{60} = 2^{60}$.

1.3. Чему равно $3^{2x-1} + 3^{2x+1} + 3^{2x+2}$?

1) 3^{6x+2} 2) $3^{(4x^2+2)(2x+2)}$ 3) $9 \cdot 3^{2x}$ 4) $\dfrac{37}{3} \cdot 3^{2x}$

Указание. Заданное выражение равно $\left(\dfrac{1}{3} + 3 + 9\right) \cdot 3^{2x}$.

1.4. Чему равно $\left(\dfrac{(2^{-1}) \cdot 3}{(4^{-1}) \cdot 9^{-1}}\right)^{-1}$?

1) $\dfrac{2}{3^3}$ 2) $-\dfrac{2}{3^3}$ 3) $\dfrac{3^3}{2}$ 4) $\dfrac{1}{3^3 \cdot 2}$

Указание. Сначала можно выполнить действия внутри скобок, и в результате получится $\left(\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 9}{2}\right)^{-1}$.

2.2. Какие из указанных выражений равны $\dfrac{a^8}{b}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$?

1) $\left(\dfrac{a^3}{b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ 2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-7} \cdot \left(\dfrac{a^2}{b}\right)^7 \cdot ab$

3) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-5} \cdot a \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$ 4) $\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{10} \cdot (b^{-1})^{-5}$

Указание. Лучше по очереди находить степени каждой из переменных в заданных выражениях. В результате получим, что варианты 1, 2 и 3 не подходят из-за несовпадения степени переменной b.

2.3. При каких из указанных значений a и b верно неравенство $a < b$?

1) $a = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$, $b = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}$ 2) $a = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-5}$, $b = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-6}$

3) $a = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{5}$, $b = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{6}$ 4) $a = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}$, $b = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5}$

Указание. В варианте 1 имеем $a = 5$, $b = 6$, поэтому его нужно включать в ответ; в варианте 2 имеем $a = \left(\dfrac{5}{3}\right)^5$, $b = \left(\dfrac{5}{3}\right)^6$, поэтому $b = a \cdot \dfrac{5}{3}$, где $a > 0$, откуда $b > a$, и вариант 2 также нужно включать в ответ; в варианте 3 имеем $b = a \cdot \dfrac{4}{3}$, где $a > 0$, откуда $b > a$, и вариант 3 также нужно включать в ответ; в варианте 4 имеем $a > 1$, $b < 1$, поэтому вариант 4 не подходит.

2.4. Какие из указанных выражений равны $a^{-2} \cdot b^3$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$?

1) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{14} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-12} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-4} \cdot b$ 2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{3} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-5} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{0} \cdot b^{11}$

3) $\left(\dfrac{a}{b}\right) \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{8} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{12} \cdot a$ 4) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{7} \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} \cdot b$

Указание. Лучше по очереди находить степени каждой из переменных в заданных выражениях.

Глава 3
ТОЖДЕСТВА

Цель главы — пояснить смысл тождественного равенства всюду определенных буквенных выражений и установить основные правила тождественных преобразований буквенных выражений.

Особенности главы. Несмотря на то что в 7 классе рассматриваются в основном многочлены, уже на начальном этапе при определении значений буквенных выражений и тождественного равенства обращается внимание и на область определения, для чего приводятся соответствующие примеры.

Основное содержание главы посвящено изучению многочленов, правилам проведения тождественных преобразований. С этой целью наряду с абстрактными примерами на выполнение арифметических действий с многочленами рассматриваются также некоторые общие формулы, имеющие широкое применение в математике: двучлены вида $a^n - b^n$ и формула бинома Ньютона при небольших значениях показателя степени.

Изучаемый материал имеет исключительно важное значение, так как выражения с переменными и их тождественные преобразования постоянно приходится применять при решении многих математических задач.

§ 1. БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Цель параграфа — пояснить смысл записи чисел и букв в буквенном выражении, определить понятие значения буквенного выражения при заданном наборе значений переменных, рассмотреть подстановку буквенных выражений вместо переменных.

Особенности параграфа. Весь параграф рассчитан на первый уровень, поэтому все основные понятия разъясняются на конкретных примерах. В связи с понятием значения буквенного выражения приводится пример не всюду определенного буквенного выражения, после чего вводится понятие всюду определенного буквенного выражения. Особого внимания заслуживает понятие подстановки вместо букв, при изучении которого следует обратить внимание на то, что подстановка вместо буквы некоторого выражения производится сразу одновременно во все места, где эта буква встречается в заданном выражении. Задачи к параграфу в основном несложные.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: основные законы сложения и вычитания; основные законы умножения; примеры буквенных выражений.

Новые математические понятия: постоянные и переменные величины (буквы); подстановка вместо буквы нового буквенного выражения; значение буквенного выражения; всюду определенные буквенные выражения.

Вспомогательные понятия: число π; формула объема цилиндра.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие еще примеры буквенных выражений вы знаете?

Ответ. Вариантов много, например, можно написать несколько простейших буквенных выражений типа $x + y$, $7a^2 - 9b^2$, $0{,}5x$ и т. п.

1.2. Как называется число, обозначенное буквой k в записи $y = kx$, выражающей прямую пропорциональную зависимость переменной y от переменной x?

Варианты ответа. Число k отличается от нуля и называется коэффициентом пропорциональности. Оно показывает, что отношение $x : y$ постоянно.

1.3. Чему равно значение выражения $(a + b) \cdot (c + d)$ при $a = -0{,}5$; $b = 1{,}25$; $c = -0{,}005$; $d = 0{,}0001$?

Варианты ответа. Значение суммы $a + b$ равно $0{,}75$; значение суммы $c + d$ равно $-0{,}0049$. Поэтому значение произведения $(a + b) \cdot (c + d)$ равно $0{,}75 \cdot (-0{,}0049) = -0{,}003675$.

1.4. При каких значениях переменных имеет смысл буквенное выражение $\dfrac{1}{a - b}$?

Ответ. Это выражение имеет смысл при всех a и b, не равных друг другу.

1.5. Какой подстановкой можно получить выражение $a^2 + b^2 + a^2b^2$ из выражения $x + y + xy$?

Ответ. Надо вместо x подставить a^2, а вместо y подставить b^2.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9. Выполните подстановку выражения $z + 2t^2$ вместо переменной x в следующие выражения: д) $x + z + x^2 + t$; е) $(x - a)x + zx$.

Указание. д) Результатом подстановки будет следующее выражение: $z + 2t^2 + z + (z + 2t^2)^2 + t$; е) результатом подстановки будет следующее выражение: $(z + 2t^2 - a) \cdot (z + 2t^2) + z \cdot (z + 2t^2)$.

10. Выполните подстановку выражения $z^2 + z + t$ вместо переменной x и $2z + t$ вместо переменной y в выражения: в) $x^2 + y$; г) $x + xy + zx$; е) $x + y + xy + y^2z$.

Указание. в) Результатом подстановки будет следующее выражение: $(z^2 + z + t)^2 + 2z + t$; г) результатом подстановки будет выражение $z^2 + z + t + (z^2 + z + t)(2z + t) + z(z^2 + z + t)$; е) результатом подстановки будет следующее выражение: $z^2 + z + t + 2z + t + (z^2 + z + t)(2z + t) + (2z + t)^2 \cdot z$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Укажите все выражения, значения которых при $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ являются полными квадратами.

1) $abc + a^2b^2c^2 + bc + a$ 2) $2b^2c^2 + c^2$

3) $c^4 - ab^4$ 4) $a^3b^3 + c^3 + bc^2$

Указание. Нужно одновременно и вычислить значение каждого из выражений, и сравнить эти значения с квадратами натуральных чисел.

§ 2. ТОЖДЕСТВА

Цель параграфа — определить тождественное равенство всюду определенных буквенных выражений, сформулировать основные правила тождественных преобразований.

Особенности параграфа. В параграфе вводится новое важное понятие тождественного равенства. С самого начала для записи тождественного равенства вводится особый знак $\equiv$. Делается это с той целью, чтобы сразу же обратить внимание учащихся на различие в понятиях равенства чисел и тождественного равенства буквенных выражений. Однако, учитывая, что данный знак употребляют нечасто, и сложившиеся традиции в преподавании математики, специально введенный знак тождественного равенства для упрощения записей разрешается заменять на обычный знак равенства. В итоге учащиеся в очередной раз попадают в сложную ситуацию, так как привычному знаку равенства добавляется еще одна служебная функция. Для того чтобы избежать недоразумений, учащимся можно рекомендовать задавать вопросы во всех случаях, когда возникают затруднения, и если нужно уточнить, в каком смысле используется знак равенства.

Основные правила тождественных преобразований соответствуют основным законам арифметики и разъясняются на примерах. Относительно новым является правило подстановки, чему и следует уделить побольше внимания.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: переместительный закон сложения и умножения; сочетательный закон сложения и умножения; распределительный закон; свойства нуля при сложении и умножении; свойство единицы при умножении.

Новые математические понятия: тождественно равные буквенные выражения; тождество; рефлексивность, симметричность и транзитивность тождественного равенства; подстановка в тождественное равенство вместо переменных букв других буквенных выражений; преобразование тождеств.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как показать, что выражения abc и $a + b + c$ не являются тождественно равными?

Ответ. При поиске ответа на этот вопрос следует стремиться к тому, чтобы учащиеся осознали смысл вопроса. А именно нужно установить, что не всегда при одном и том же наборе значений переменных значения заданных выражений будут одинаковы, а для этого достаточно привести даже один пример, когда это не так, то есть надо указать числовые значения для букв a, b и c, при которых выражения abc и $a + b + c$ имеют разные значения. Например, при $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ произведение abc имеет значение 1, а сумма $a + b + c$ имеет значение 3.

2.2. Как называется закон, позволяющий записать тождество $6a - 3a = (6 - 3) \cdot a$?

Ответ. Распределительный или дистрибутивный закон для умножения разности на число.

2.3.** Какие свойства равенства геометрических фигур вы знаете?

Ответ. Равенство геометрических фигур обладает теми же свойствами, что и тождественное равенство буквенных выражений, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно: $F = F$; $F = F' \Rightarrow F' = F$; $F = F'$ и $F' = F'' \Rightarrow F = F''$.

2.4. Какие свойства применялись в приведенном примере при записи каждого очередного равенства?

Ответ. Коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы умножения, а также коммутативный закон сложения.

2.5. Как доказать тождество $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \equiv 4a^2b^2$?

Вариант ответа. В тождестве $(x + y)^2 - (x - y)^2 \equiv 4xy$, которое установлено в пункте, положить $x = a^2$ и $y = b^2$.

2.6. Как доказать, что если $A \equiv B$, то $A - X \equiv B - X$?

Ответ. Воспользуемся правилом $A = B \Rightarrow A + X = B + X$ и подставим в него вместо X выражение $(-X)$.

2.7. Как можно доказать тождество $(x + 1)^2 - x - 1 = x \cdot (x + 1)(x + 2)$?

Ответ. В тождестве $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$ вместо буквы a подставить выражение $x + 1$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Покажите, что записанное равенство не является тождеством.

а) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ б) $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2$

в) $(a - b)^2(a - 2)^2 = a^2 - 3a + 2$ г) $a^2 = b^2 + c^2$

д)* $|y| = y$ е)* $|x + 1| = x + 1$

ё)** $\sqrt{x^2} = x$ ж)** $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$

Указание. В каждом из пунктов задачи достаточно указать один набор значений переменных, при которых появляется неверное числовое равенство. Например, в пункте е при $z = -2$ имеем $|-2 + 1| = -2 + 1$, что неверно.

4.** Докажите, что если два выражения A и B с переменной a тождественно равны, то при замене в тождестве $A = B$ всюду буквы a на выражение X получается тождество.

Указание. При любых наборах переменных значение для выражения X — это некоторое значение для переменной a, что и используется при вычислении значений A и B.

7. г) Из данного тождества $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ умножением на заданное выражение $x^2 + y^2$ получите новое тождество.

Указание. $(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = x^4 - y^4$, а поэтому результатом может быть тождество $x^4 - y^4 = (x - y) \cdot (x + y) \cdot (x^2 + y^2)$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2.** Среди следующих равенств, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, найдите то, которое является тождеством:

1) $\dfrac{aba}{ab} = c$ 2) $\dfrac{|b|^2}{cb} = \dfrac{1}{c}$ 3) $\dfrac{ab + ac}{a} = b + c$ 4) $\dfrac{|b|^3}{b} = b^2$

Указание. Тождество только в варианте 3. В варианте 1 тождества нет, потому что $a = c$ не является тождеством; в варианте 2 тождества нет, потому что, например, при $b = 2$ получим $\frac{2}{c} = \frac{1}{c}$, что неверно; в варианте 4 тождества нет, потому что при $b < 0$ получаем $-b^2 = b^2$, что не является тождеством.

1.3.** Среди следующих выберите верное утверждение:

1) если $A(x) = B(x)$, то для любого $C(x)$ $\frac{A(x)}{|C(x)|} = \frac{B(x)}{|C(x)|}$

2) если $A(x) \cdot B(x) = (B(x))^2$, то $A(x) = B(x)$

3) если $4A(x) + 3 = (1 + 5\,B(x)) - (B(x) - 2)$, то $A(x) = B(x)$

4) если $A(x) = B(x)$, то $A(x) \cdot B^2(x) = A^2(x) \cdot B(x)$

Указание: В варианте 1 утверждение неверно, так как если $C(x) = 0$ при каком-то x, то в этом случае делить нельзя; в варианте 2 утверждение неверно, потому что если $A(x) \neq 0$, $B(x) = 0$ при каком-то x, то в этом случае равенства $A(x) = B(x)$ нет; в варианте 3 утверждение верное, так как второе из равенств получается из первого по правилам тождественных преобразований; в варианте 4 утверждение верное, так как второе из равенств получается из первого умножением обеих частей на одно и то же выражение.

2.3.* Укажите все верные утверждения:

1) если $a = bc$, то $abc = (cb)^2$

2) если $c^2 = abc$, то $c = ab$

3) если $a = c$, то $(a - b)^2 = (a - c)^2$ для всех b

4) $|(a^2)^2| = (a^2)^2$

Указание. В варианте 1 утверждение верно, так как если обе части равенства умножить на одно число, то всегда получается равенство; в варианте 2 утверждение неверно, потому что если $c = 0$, то первое равенство верно при любых значениях a и b, а второе не при любых; в варианте 3 утверждение неверно, потому что тогда второе из равенств будет иметь вид $(a - b)^2 = 0$, что верно не при любых значениях переменных; в варианте 4 утверждение верно, потому что квадрат числа всегда неотрицательное число.

2.4. Выберите все правильные утверждения:

1) $\frac{a^2}{a^2} = 1$, если $a \neq 0$

2) из равенства $a^2b = ac$ всегда следует равенство $ab = c$

3) если из $a^2b = ac$ следует $ab = c$ для любых b и c, то $a \neq 0$

4) из равенства $c = b$ всегда следует равенство $\frac{abc}{c} = \frac{abc}{b}$

Указание. В каждом варианте следует особо учесть случаи возможного равенства нулю значений переменных букв. В варианте 1 нулевое значение переменной удаляется по условию, поэтому утверждение становится верным; в варианте 2 при $a = 0$ и $c \neq 0$ утверждение становится неверным; если в варианте 3 предположить, что $a = 0$, то, как и в варианте 2, получаем неверное утверждение; в варианте 4 следствие невозможно при $c = 0$, $b = 0$.

§ 3. МНОГОЧЛЕНЫ

Цель параграфа — определить одночлены, многочлены и действия над ними.

Особенности параграфа. В параграфе основное внимание уделяется преобразованию многочленов к наиболее простому виду, что связано с приведением подобных членов. Такую техническую работу приходится выполнять в различных разделах математики, а поэтому при изучении данного параграфа большое значение имеют упражнения. Предлагаемые задачи в идейном отношении несложные и носят тренировочный характер.

На первом уровне правила тождественного преобразования многочленов разъясняются на примерах. На втором и третьем уровнях эти правила формулируются в общем виде.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: буквы, обозначающие переменные и постоянные; буквенное выражение.

Новые математические понятия: одночлен; стандартная форма одночлена; коэффициент одночлена; степень одночлена; нулевой одночлен; многочлен; подобные слагаемые; приведение подобных слагаемых многочлена; стандартная форма многочлена; тождественное равенство многочленов.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Какие примеры одночленов вы знаете?

Ответ. Вариантов много, например, можно написать несколько простейших одночленов: ab (площадь прямоугольника), πr^2 (площадь круга), $2\pi r$ (длина окружности), $2n$ (четное число) и т. п.

3.2. Как привести к стандартной форме одночлен $\pi R^2 \cdot 2\pi R$, где π — постоянное число?

Ответ. Стандартная форма этого одночлена есть $\pi^2 R^3$.

3.3. Каковы коэффициент и степень одночлена

$$\frac{1}{2}a^3p \cdot \frac{1}{3}b^2q^2 \cdot 6cr^3?$$

Ответ. Приведем к стандартному виду одночлен: $1 \cdot a^3b^2cpq^2r^3$. Поэтому коэффициент одночлена равен 1, а его степень равна сумме показателей степеней переменных букв, то есть $3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 = 12$.

3.4.* Как представить одночлен $\frac{1}{3}\pi R^2H$, где π — постоянное число, в виде произведения двух одночленов?

Ответ. Например, в виде $\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$, а также в виде $\frac{1}{3}R^3 \cdot \pi H$ и т. п.

3.5. Какому многочлену равно буквенное выражение $(3a - 2b)(2a - 3b)$?

Ответ. Многочлену $6a^2 - 13ab + 6b^2$.

3.6. Какому многочлену равно произведение $(3b - 1)(3b + 1)$?

Ответ. Это произведение равно $9b^2 + 3b - 3b - 1 = 9b^2 - 1$.

3.7. Какой многочлен получится, если в многочлен $a^2 + 2abc + 3$ вместо буквы a подставить выражение $2b^2$?

Ответ. Получится $(2b^2)^2 + 2 \cdot 2b^2 \cdot b \cdot c + 3 = 4b^4 + 4b^3c + 3$.

3.8. Какова стандартная форма многочлена, равного $(x^2 - x - 1)^2$?

Ответ. Стандартная форма получается после раскрытия скобок и приведения подобных членов: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

3.9. Чему равны степени слагаемых многочлена, равного выражению $(x^2 + y^3)^2$?

Ответ. Так как в стандартной форме многочлен имеет вид $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$, то степени входящих в него одночленов 4, 5 и 6.

3.10.** Как доказать, что многочлены $x^2 + y^2$ и $x^2 - y^2$ не являются тождественно равными, если применять определение из пункта 2.1?

Ответ. Для доказательства достаточно привести пример, когда при одном и том же наборе значений переменных значения данных многочленов не равны. В данном случае многочлены имеют разные значения — 1 и -1 при $x = 0$ и $y = 1$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9. Выполните указанные подстановки и запишите полученные многочлены в стандартной форме:

д)* $p^2 + pq + q^2$, где $p = x + 2y$, $q = x - 2y$

ж)** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, где $a = m - n$, $b = n - k$, $c = k - m$

Указание. д) При правильных действиях должен получиться многочлен $3x^2 + 4y^2$; ж) при правильных действиях должен получиться нулевой многочлен.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Результатом подстановки в некоторый многочлен выражения $x + 2$ вместо переменной z является $3x^2 + 9x + 8$. Этим многочленом может быть:

1) $(2z + 1)(z + 1) + (z + 1)^2 - 8z$
2) $(z + 1)^2 + (z + 2)^2 + (z - 1)^2$
3) $3z^2 - 2z + 2$
4) $3(z - 1)(z + 2) + 6(1 - z) + 2$

Указание. Первый вариант можно отбросить по несовпадению коэффициентов при второй степени переменной, второй вариант — по несовпадению коэффициентов при первой степени переменной, четвертый — по несовпадению свободных членов, остается полностью проверить только третий вариант.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ДВУЧЛЕНА $a^n - b^n$

Цель параграфа — ознакомить учащихся с одной из важных алгебраических формул, позволяющей получать разложение на множители двучлена $a^n - b^n$.

Особенности параграфа. При выводе формулы разложения двучлена $a^n - b^n$ на множители используется схема рассуждений, которая близка к методу математической индукции. При изучении этого материала целесообразно предоставить учащимся возможность самим воспроизвести переход от некоторого конкретного значения n к $n + 1$.

Знакомство с общей формулой разложения рассматриваемого двучлена на множители и ее запись при малых показателях степени позволяет более естественно воспринимать традиционные для школы формулы разности квадратов, разности кубов, а также и суммы кубов и тем самым значительно сократить время на их изучение.

Полезность изучаемой формулы демонстрируется на многочисленных примерах, в том числе для получения суммы членов некоторой геометрической прогрессии и для доказательства делимости некоторых чисел на заданное число.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: буквенное выражение; тождество; натуральная степень числа.

Новые математические понятия и свойства: формула разложения многочлена $a^n - 1$ на два множителя; формула разложения двучлена $a^n - b^n$ на два множителя.

Вспомогательные понятия: геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 2$; теорема Пифагора.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Какое тождество получится, если в последнее равенство $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$ вместо a подставить b^2?

Ответ. Получится $b^{2n} - 1 = (b^2 - 1)(b^{2(n-1)} + b^{2(n-2)} + \ldots + b^2 + 1)$.

4.2.* Как будет выглядеть формула $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ при $n = 7$, $a = x$ и $b = -y$?

Ответ. $x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$.

4.3. Как найти сумму $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{19}$?

Ответ. Возьмем формулу $a^{20} - 1 = (a - 1)(a^{19} + a^{18} + a^{17} + \ldots + a + 1)$. Подставив вместо переменной a число 3, получим $3^{20} - 1 = (3 - 1)(3^{19} + 3^{18} + 3^{17} + \ldots + 3 + 1)$. Отсюда $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{19} = \dfrac{3^{20} - 1}{3 - 1} = \dfrac{3^{20} - 1}{2} = \dfrac{81^5 - 1}{2} = 195\,392\,200$.

4.4.* Как доказать, что $3^{105} + 4^{105}$ делится на 7?

Ответ. Воспользуемся формулой $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Положим $a = 3$, $b = -4$ и $n = 105$. Получим $3^{105} - (-4)^{105} = (3 + 4)(3^{104} - 3^{102} \cdot 4 + \ldots + 4^{104})$, то есть $3^{105} + 4^{105} = 7 \cdot k$, где k — целое. Отсюда $3^{105} + 4^{105}$ делится на 7.

4.5. Чему равен катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 136 мм, а второй катет 64 мм?

Ответ. По теореме Пифагора первый катет равен $\sqrt{136^2 - 64^2} = \sqrt{(136 - 64)(136 + 64)} = \sqrt{72 \cdot 200} = \sqrt{6^2 \cdot 2^2 \cdot 10^2} = 6 \cdot 2 \cdot 10 = 120$ (мм).

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Разложите на два множителя в заданиях а — з.

Указание. В задании е заметить, что, $8m^3 + 27n^3 = (2m)^3 + (3n)^3$; в задании ж заметить, что $m^3 + 8n^3 = (m + 2n)(m^2 - 2mn + 4n^2)$; в задании з заметить, что $27a^3 + 8b^3 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$.

4.** Разложите $a^6 - b^6$ на четыре множителя.

Указание. $a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 - (-b)^3)$.

9.* Разложите на множители: а) $4a^2 - 3b^2$; б) $5a^2 - 2b^2$.

Указание. а) $4a^2 - 3b^2 = (2a)^2 - (\sqrt{3}b)^2$; б) $5a^2 - 2b^2 = (\sqrt{5}a)^2 - (\sqrt{2}b)^2$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Какие из следующих равенств верны?

1) $(7^{11} + 7^{10} + 7^9 + \ldots + 7 + 1) = (7^{12} - 1) : 6$

2) $5^{120} + 5^{119} + 5^{118} + \ldots + 5 + 1 = (5^{120} - 1) : 4$

3) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 = ((-2)^5 - 1) : (-3)$

4) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^9 = (3^{10} - 1) : 3$

Указание. Все варианты рассчитаны на применение формулы разложения двучлена $a^n - b^n$ на множители.

§ 5. БИНОМ НЬЮТОНА

Цель параграфа — изучить формулы для квадрата суммы и квадрата разности двух выражений, начать знакомство с важной алгебраической формулой бинома Ньютона.

Особенности параграфа. В параграфе сначала рассматриваются традиционные формулы, позволяющие раскрывать скобки при вычислении квадрата суммы или разности двух выражений. Затем выводится формула бинома Ньютона для $n = 3$. Для придания этим формулам некоторого содержательного смысла приводятся геометрические иллюстрации. Затем рассматривается вывод формулы бинома Ньютона при $n = 4$. На основе накопленных результатов отмечаются свойства арифметического треугольника, составленного из коэффициентов формул бинома, и без доказательства формулируются общие правила получения каждой очередной строки коэффициентов формулы бинома.

Изучаемый материал может достаточно хорошо восприниматься зрительно, так как коэффициенты формул бинома можно представить в виде арифметического треугольника, элементы которого вычисляются по простым и наглядным правилам.

Раннее знакомство с общей формулой бинома позволяет более осознанно подойти к изучению формул сокращенного умножения. При этом совсем не обязательно знать доказательство формулы бинома Ньютона, а достаточно знать естественные и наглядные свойства биномиальных коэффициентов.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: тождество; правила преобразования буквенных выражений; натуральная степень числа.

Новые математические понятия и свойства: квадрат суммы; квадрат разности; куб суммы; куб разности; бином; формулы бинома Ньютона; биномиальные коэффициенты; арифметический треугольник (треугольник Паскаля).

Вспомогательные понятия: квадрат; площадь квадрата; прямоугольный параллелепипед и его ребра; объем прямоугольного параллелепипеда.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Как геометрически при положительных a и b объяснить равенство $(2a + b)(a + 2b) = 2a^2 + 5ab + 2b^2$?

Ответ. Прямоугольник со сторонами $2a + b$ и $a + 2b$ можно разбить на два квадрата со стороной a, два квадрата со стороной b и 5 прямоугольников со сторонами a и b. По свойству площадей получаем: $(2a + b)(a + 2b) = 2a^2 + 5ab + 2b^2$.

5.2. Какому выражению равно $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$?

Ответ. Применив формулы для квадрата суммы и квадрата разности и приведя подобные члены, получим $4a^2b^2$.

5.3. Чему равно 85^2?

Ответ. $(80 + 5)^2 = 6400 + 800 + 25 = 7225$.

5.4. Как можно получить формулу для куба разности двух чисел m и n, то есть для $(m - n)^3$?

Ответ. В формулу для куба суммы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ подставить $a = m$ и $b = -n$ и получить $(m - n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$.

5.5.** Как дать геометрическую иллюстрацию формуле $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ для положительных $a > b$?

Ответ. Куб с ребром a можно составить из куба с ребром $a - b$, куба с ребром b и трех прямоугольных параллелепипедов с ребрами a, b и $a - b$. По свойству объема $a^3 = (a - b)^3 + b^3 + 3ab(a - b)$. Отсюда $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

5.6. Какие формулы бинома Ньютона вы знаете?

Ответ. Например, $(a + b)^1 = a + b$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

5.7. Какой вид имеет формула бинома Ньютона для $(a + b)^5$?

Варианты ответа. 1. Можно записать в стандартной форме многочлен $(a + b)^4(a + b)$, подставить известное разложение для бинома четвертой степени, раскрыть скобки и привести подобные. В результате получается следующая формула: $(a - b)^3 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

2. Биномиальные коэффициенты можно вычислить также по пятой строке арифметического треугольника.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. Представьте в виде квадрата некоторого выражения в заданиях д — ё.

Указание. д) $(x^2 + 1)^2 + 2x^2 + 3 = (x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1) \cdot 1 + 1^2$; е) $3a^2 + 2\sqrt{6}ab + 2b^2 = (\sqrt{3}a + \sqrt{2}b)^2$; ё) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2$.

6.** Докажите, что:

а) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt{2} - 1$ б) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$

Указание. а) Возвести правую часть в куб: $(\sqrt{2} - 1)^3 = (\sqrt{2})^3 - 3(\sqrt{2})^2 + 3(\sqrt{2})^3 - 1 = 5\sqrt{2} - 7$; б) из пункта получается, что $(\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7$, откуда можно догадаться, что $(\sqrt{2} + 1)^3 = 5\sqrt{2} + 7$, и это равенство проверить.

9.** а) Проверьте, что $\sqrt{26} - 5 < \dfrac{1}{10}$; б) докажите, что $(\sqrt{26} + 5)^3 \approx 1030$ с избытком с точностью до 10^{-3}; в) найдите $(\sqrt{26} + 5)^{10}$ с точностью до 10^{-10}.

Указание. а) $(\sqrt{26} - 5) \cdot (\sqrt{26} + 5) = 1$, откуда $(\sqrt{26} - 5) \cdot 10 < 1$; б) разность $(\sqrt{26} + 5)^3 - (\sqrt{26} - 5)^3$ есть целое число; в) вычислить $(\sqrt{26} + 5)^{10} - (\sqrt{26} - 5)^{10}$, результатом будет целое число, и затем пояснить, что это целое число и есть нужное приближенное значение, показав, что $(\sqrt{26} - 5)^{10} < 10^{10}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Укажите правильное разложение:

1) $108^2 = 100^2 + 800 + 64$

2) $108^2 = 110^2 + 4 \cdot 110 + 4$

3) $45^2 = 55^2 - 250 + 25$

4) $70^2 = 50^2 + 80 \cdot 50 + 20^2$

Указание. Все варианты рассчитаны на применение формул квадрата суммы или разности. Так как тест одновариантный, то на втором варианте перебор можно заканчивать.

Глава 4
РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Цель главы — изучить признаки равенства треугольников и приобрести навыки применения этих признаков при решении задач.

Особенности главы. Изучаемый материал довольно разнообразен, так как помимо изучения признаков равенства треугольников и их применения к решению задач рассматриваются также основные задачи на построение треугольников, а кроме этого выводится формула площади для треугольника произвольного вида.

§ 1. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Цель параграфа — напомнить первый признак равенства треугольников, сформулировать и доказать два новых признака равенства треугольников.

Особенности параграфа. В начале параграфа напоминается, что первый признак равенства треугольников был принят без доказательства: сперва для прямоугольных треугольников, затем — для произвольных. После этого формулируется и доказывается второй признак равенства треугольников. При этом важно обратить внимание на то, что основой доказательства является применение первого признака равенства треугольников. Далее формулируется и доказывается признак равенства прямоугольных треугольников по катету и острому углу. Затем с использованием свойства острых углов доказывается признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. После этого формулируется и доказывается третий признак равенства треугольников. Аналогичный признак равенства прямоугольных треугольников доказывается с использованием теоремы Пифагора.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: первый признак равенства треугольников; доказательство равенства треугольников с помощью первого признака равенства; сумма углов в треугольнике.

Новые математические понятия и свойства: второй признак равенства треугольников; третий признак равенства треугольников; признак равенства прямоугольных треугольников по катету и острому углу; признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

Вспомогательные понятия: доказательство равенства фигур перемещением (наложением).

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как доказать, что если отрезки AB и CD пересекают друг друга в середине каждого из них, то $AC = BD$?

Ответ. Пусть M — точка пересечения отрезков. С помощью первого признака равенства доказывается равенство треугольников AMC и BMD.

1.2. Как доказать, что в четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны, если диагональ AC является биссектрисой углов A и C?

Ответ. С помощью второго признака равенства доказывается равенство треугольников ABC и ADC.

1.3. Какие свойства равенства геометрических фигур вы знаете?

Варианты ответа. 1. Если первая фигура равна второй, то вторая фигура равна первой. 2. Если две фигуры равны третьей, то эти фигуры равны между собой.

1. $A = A$;

2. $A = B \to B = A$;

3. $A = B$, $B = C \to A = C$.

1.4. Как доказать этот признак равенства прямоугольных треугольников? (Имеется в виду признак равенства по катету и прилежащему острому углу.)

Ответ. В каждом прямоугольном треугольнике к равным соответствующим катетам прилегают прямой угол и острый угол. Далее либо повторяем доказательство из п.1.3, либо используем доказанный в п. 1.3 второй признак равенства треугольников.

1.5. Как доказать, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны?

Ответ. Основание равнобедренного треугольника является общей гипотенузой двух прямоугольных треугольников. А углы, прилегающие к основанию, равны острым углам в прямоугольных треугольниках. По последнему признаку прямоугольные треугольники равны. Поэтому высоты, проведенные к боковым сторонам, тоже равны.

1.6. Верно ли, что если у четырехугольника $ABCD$ равны стороны AB и AD и равны стороны BC и CD, то диагональ AC — биссектриса углов A и C?

Ответ. Треугольник ABC равен треугольнику ADC по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует, что сформулированное утверждение верно.

1.7.* Как провести доказательство в случае рис. 1? (Имеется в виду доказательство третьего признака равенства треугольников.)

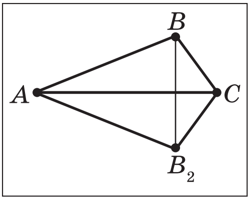


Рис. 1

Ответ. Аналогично тому, как показано в данном пункте, только вместо разностей углов рассмотреть суммы.

1.8. Как построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету?

Ответ. Строим прямой угол. На одной его стороне откладываем катет и из полученной точки как из центра проводим окружность, радиус которой равен гипотенузе.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. Докажите, что если высота и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, совпадают, то треугольник равнобедренный.

Указание. Пусть BH — высота равнобедренного треугольника ABC, проведенная к основанию. Если дано, что BH является биссектрисой, то для прямоугольных треугольников ABH и CBH можно использовать признак равенства по гипотенузе и острому углу.

10.* Постройте квадрат площадью в 32 см^2.

Указание. Для построения нужно иметь отрезок длиной 1 см. Построив квадрат со стороной 1 см, получим его диагональ $\sqrt{2}$ см. Это позволяет построить отрезок длиной $4\sqrt{2}$ см, который равен стороне нужного квадрата.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. На плоскости проведены равные отрезки AB, AC, AD так, что $\angle BAC = \angle BAD$, и отмечена точка K пересечения пря-

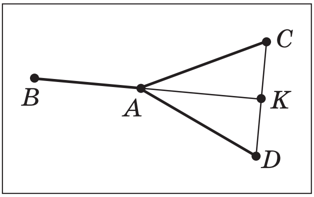


Рис. 2

мых AB и CD (рис. 2.). Какие из приведенных утверждений неверны?

1) AK — биссектриса угла CAD

2) $AB \perp CD$

3) $CK = KD$

4) $AK = AB$

Указание. Нужно установить, что является и биссектрисой, и высотой в равнобедренном треугольнике, откуда получаются верные утверждения.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Цель параграфа — рассмотреть примеры задач на построение и способы построения треугольников по трем заданным элементам, используя правила применения циркуля и линейки в задачах на построение.

Особенности параграфа. При изучении параграфа важно обратить внимание учащихся на разницу между рисунками, которые выполняются для зрительной иллюстрации геометрических объектов, и математической задачей на построение с помощью циркуля и односторонней линейки без делений. Если на рисунках и иллюстрациях закономерностей можно рисовать чертеж приближенно, то в задачах на построение рассматривается процедура, приводящая к абсолютно точной фигуре, удовлетворяющей условиям задачи. Пир этом делается предположение, что каждое из промежуточных построений выполняется абсолютно точно.

Рассматриваются основные виды задач на построение треугольников по трем элементам. Решение первой задачи приводится во всей полноте: описание построения, доказательство, исследование. Остальные задачи разбираются сокращенно. Поэтому при изучении данного материала целесообразно в качестве дополнительных заданий воспроизводить недостающие этапы. Весь материал предназначен для изучения на первом уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: признаки равенства треугольников.

Новые математические понятия и свойства: существование решения задачи на построение; количество решений задачи на построение.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как построить ромб по стороне и одной из диагоналей?

Ответ. Задача практически сводится к построению равнобедренного треугольника по трем сторонам: одна из сторон — диагональ ромба, остальные стороны треугольника — стороны ромба. Решение существует, если $2a > d$, где a — длина стороны ромба, d — длина диагонали.

2.2. Как построить угол, в два раза больший заданного острого угла?

Ответ. Пусть LAB — заданный угол (рис. 1). Построим две вспомогательные окружности: одну с центром A радиуса AL, другую с центром K радиуса KL. Отметим точку M — вторую точку пересечения окружностей и проведем луч AM. Угол LAM в два раза больше угла LAK.

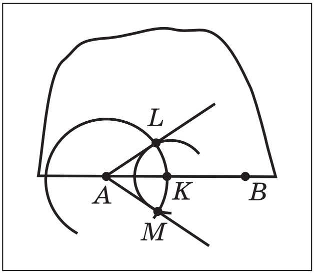


Рис. 1

2.3. Сколько решений имеет данная задача? (Речь идет о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними.)

Ответ. В силу первого признака равенства треугольников все треугольники, которые можно построить по двум сторонам и углу между ними, будут равны. Поэтому решение единственно.

2.4. Что произойдет, если вы попытаетесь строить треугольник с двумя тупыми углами?

Ответ. Это построение невозможно по следующим причинам. Если на какой-то прямой отложить отрезок, равный заданной стороне, и из его концов в одной полуплоскости провести лучи, перпендикулярные стороне, то эти лучи не пересекутся и разделят полуплоскость на три части. Следовательно, лучи, проводимые из вершин этой стороны под тупыми углами к стороне, тоже не пересекутся, так как они будут расположены в частях плоскости, не имеющих общих точек.

2.5. При каких условиях задача о построении треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон, будет иметь единственное решение?

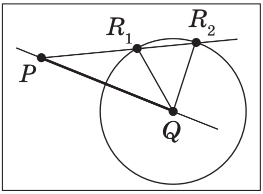


Рис. 2

Ответ. Обратимся к рисунку из текста учебника (рис. 2). Видно, что треугольник будет единственным при совпадении точек R_1 и R_2, то есть когда построенная окружность касается второй стороны угла. В этом случае треугольник будет прямоугольным. Кроме того, есть еще один случай — когда данные стороны равны. В этом случае точки R_1и P совпадут, а треугольник будет равнобедренным.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3.* Через вершину острого угла проведите две прямые, каждая из которых образует равные углы со сторонами данного угла.

Указание. Этими прямыми являются прямая, содержащая биссектрису угла, и перпендикулярная ее прямая.

8.** Даны отрезок длины a, угол с вершиной A и точка B на одной из сторон угла. Постройте точку C на другой стороне угла такую, что $|CA| + |CB| = a$.

Указание. Если на стороне угла, не содержащей точку B, отложить отрезок $AD = a$, то задача сводится к построению равнобедренного треугольника BCD.

13.** Постройте ΔABC по стороне AB, прилежащему к этой стороне углу BAC и разности сторон AC и BC, зная, что $AC > BC$.

Указание. Посмотрите указание к задаче 8.

16.** Постройте треугольник ABC, зная угол BAC, отрезки AC и $d = BC - AC$ и предполагая, что $BC > AC$.

Указание. Если на отрезке AC отложить отрезок $AD = d$, то задача сводится к проведению окружности с центром C и радиусом CD.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Из точки O проведены 6 лучей таким образом, что углы, образуемые любыми двумя соседними лучами, равны. Какие углы можно найти на получившемся чертеже?

1) $30°$ 2) $60°$ 3) $120°$ 4) $150°$

Указание. Угол между любыми двумя соседними лучами равен $60°$, поэтому возможны только углы, кратные этой величине.

2.3. На плоскости построили три окружности с общим центром O и радиусами 3 см, 5 см и 8 см. Через точку O провели прямую. Расстояния между точками ее пересечения с окружностями могут быть следующими:

1) 1 см 2) 2 см 3) 5 см 4) 8 см

Указание. Рассматривая точки по одну сторону от центра, можно получить отрезки длиной 3 см, 5 см, 8 см, (5 – 3) см, (8 – 3) см и (8 – 5) см. Рассматривая точки по разные стороны от центра, можно получить отрезки длиной (3 + 3) см, (5 + 5) см, (8 + 8) см, (3 + 5) см, (3 + 8) см и (5 + 8) см.

2.4.** Два квадрата имеют общую точку пересечения их диагоналей. При каких значениях сторон контуры этих квадратов не могут пересекаться?

1) 5 см и 7 см 2) 10 см и 15 см

3) 15 см и 23 см 4) 20 см и 27 см

Указание. Пусть стороны квадратов равны a и b. Контуры квадратов не могут пересекаться, если у меньшего квадрата диагональ меньше стороны большего квадрата, то есть при условии, что $b\sqrt{2} < a$, или $a^2 : b^2 > 2$. Проверив последнее условие, получаем верные ответы.

§ 3. ПРИМЕРЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Цель параграфа: рассмотреть несколько конкретных геометрических задач на доказательство с использованием признаков равенства треугольников.

Особенности параграфа. Рассматриваются три решения с возрастанием по уровню сложности. В дополнение к основной направленности параграфа на третьем уровне разбирается применение поворота к доказательству геометрических свойств.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: признаки равенства треугольников.

Вспомогательные понятия: поворот плоскости.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

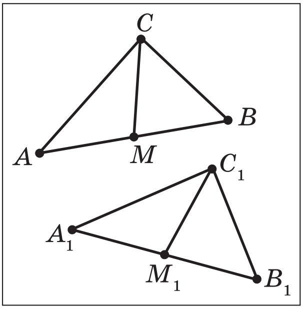


Рис. 1

3.1. На рис. 1 в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены медианы CM и C_1M_1

и известно, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $CM = C_1M_1$. *Вопрос.* Как доказать, что $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$?

Ответ. Так как точка M — середина отрезка AB, то $AM = \frac{1}{2}AB$ и аналогично $A_1M_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$. Далее, $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$ по третьему признаку равенства треугольников, так как $A_1M_1 = AM$, $C_1M_1 = CM$, что установлено в тексте пункта, $A_1C_1 = AC$ по условию.

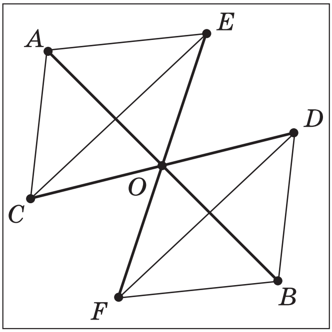


Рис. 2

3.2.* Как будет выглядеть чертеж в данной задаче (рис. 2), если точка A попадет на отрезок CE?

Ответ. Треугольники ACE и BDF превратятся в отрезки $CE = AE + AC$ и $DF = BF + BD$. Если провести отрезки CF и DE, то фигура $CEDF$ будет параллелограммом.

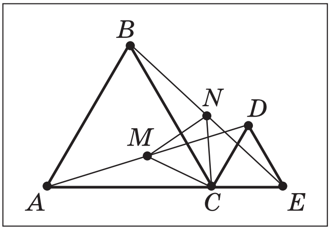


Рис. 3

3.3.** На рис. 3 даны два равносторонних треугольника ABC и CDE, где точки A, C, E принадлежат одной прямой, точки M и N — середины отрезков AD и BE. Допустим, что точку P поставили в середине отрезка AM и точку Q в середине отрезка BN. *Вопрос.* Как доказать, что треугольник PQC — равносторонний?

Ответ. Повторить проведенные в пункте рассуждения с соответствующими естественными изменениями. По условию имеем

$$AC = BC,\ CD = CE.$$

Далее,

$$\angle ACD = 180° - \angle DCE = 180° - 60° = 120°,$$
$$\angle BCE = 180° - \angle ACB = 180° - 60° = 120°.$$

По первому признаку равенства треугольники ACD и BCE равны.

Так как в равных треугольниках равны все соответствующие элементы, то в треугольниках ACD и BCE равны отрезки CP и CQ и углы PCA и QCB. Вычислим угол PCQ следующим образом:

$$\angle PCQ = (\angle ACB + \angle BCQ) - \angle ACP = \angle ACB = 60°.$$

Получаем, что в треугольнике PCQ две стороны равны, а угол между ними равен $60°$. Отсюда следует, что треугольник PCQ — равносторонний.

3.4.** Как построить равносторонний треугольник, одна вершина которого совпадает с заданной точкой, а две оставшиеся вершины лежат на двух заданных прямых?

Ответ. Повернуть на $60°$ около данной точки одну из прямых (на рис. 4 прямая b повернута вокруг точки A на $60°$ против хода часовой стрелки, при этом получилась прямая m). Пусть K — точка пересечения прямых m и a. Тогда AK — одна из сторон искомого треугольника.

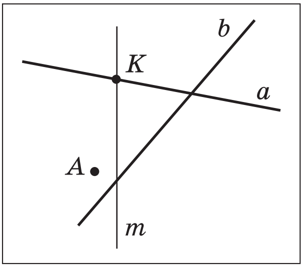


Рис. 4

Заметим, что при этом повороте возможны три случая: прямые m и a имеют одну общую точку, не пересекаются, совпадают. Соответственно будем иметь одно, ни одного и бесконечное множество разных решений.

Наконец, помимо указанного поворота можно рассмотреть также поворот прямой a вокруг точки A на $60°$ по ходу часовой стрелки и, возможно, получить дополнительные решения.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.* Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

Указание. Пусть в треугольнике ABC равны стороны AB и BC, точки M, N, K — середины сторон AB, BC, AC соответственно. Тогда с помощью второго признака можно доказать равенство треугольников AMK и CNK.

5.** Докажите, что середины сторон правильного шестиугольника являются вершинами другого правильного шестиугольника.

Указание. Докажите, что соседние стороны равны, а угол между ними равен $120°$.

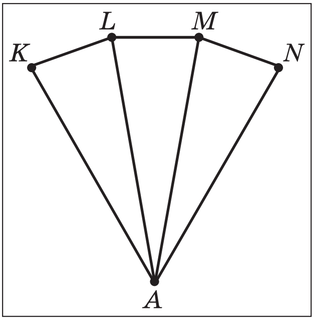


Рис. 5

8.* На рис. 5 изображены три равных равнобедренных треугольника

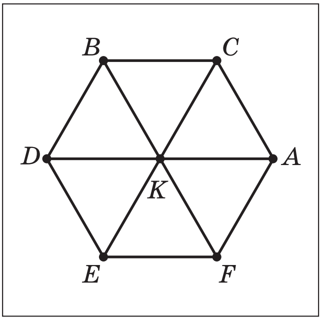


Рис. 6

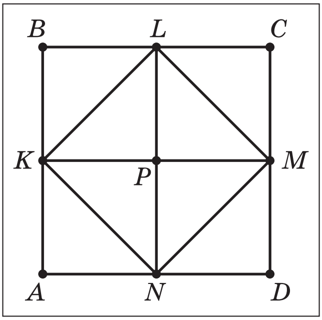


Рис. 7

AKL, ALM, AMN, причем $KL = LM = MN$. Докажите, что треугольники KMN и KLN равны.

9. На рис. 6 изображены шесть равных равносторонних треугольников. Найдите все треугольники, равные: а) треугольнику ACD; б) треугольнику BCD.

Указание. а, б) Дополнительно можно найти 11 таких треугольников.

10. На рис. 7 изображены восемь равных равнобедренных прямоугольных треугольников. Найдите все треугольники, равные: а) треугольнику ALM; б) треугольнику ACM.

Указание. а) Дополнительно можно найти 3 таких треугольника; б) дополнительно можно найти 7 таких треугольников.

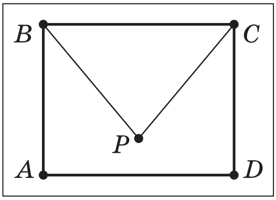


Рис. 8

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. В прямоугольнике $ABCD$ на рис. 8 угол BPC равен $80°$, угол PCB равен $50°$. Чему равен угол ABP?

1) $20°$ 2) $30°$ 3) $40°$ 4) $50°$

Указание. Угол CBP равен $50°$.

§ 4. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — напомнить основные свойства площади, вывести формулу для площади треугольника.

Особенности параграфа. Основное содержание параграфа несложное и рассчитано на первый уровень. Дифференциация по уровням достигается за счет предлагаемых задач, причем последние задачи для третьего уровня могут оказаться очень непростыми.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Чему равна площадь четырехугольника $ABCD$ на рис. 1, выраженная через площадь квадрата клетчатой бумаги?

Ответ. 13,5 площадей квадратов, что достаточно хорошо видно из приведенных на рисунке дополнительных построений.

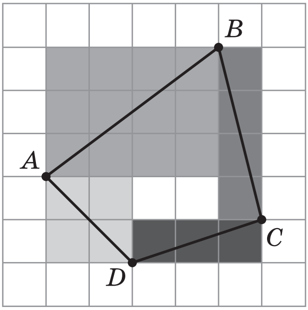


Рис. 1

4.2. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат с вершинами в узлах клетчатой бумаги?

Ответ. Единичную, если за единицу измерения площадей выбрана площадь одной клетки.

4.3. В каком случае высота треугольника, проведенная из вершины, противоположной основанию, не пересекается с основанием?

Ответ. В случае, когда один из углов при основании будет тупым.

4.4. Как доказать, что равные треугольники имеют равные площади?

Варианты ответа. 1. Можно сослаться на свойство площадей фигур: равные фигуры имеют равные площади.

2. Обозначим через c_1 и c_2 равные стороны треугольников и соответственно через h_1 и h_2 — высоты, опущенные на стороны c_1 и c_2. Тогда $c_1 = c_2$, $h_1 = h_2$. Поэтому $S_1 = \frac{1}{2}c_1h_1 = \frac{1}{2}c_2h_2 = S_2$.

4.5. Каковы длины всех сторон треугольника ABC?

Ответ. Одна сторона $AC = 7$ (см) — найдена в тексте пункта 4.5. По теореме Пифагора $AB^2 = AK^2 + BK^2 = 6^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ (см^2), $BC^2 = BK^2 + CK^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$ (см^2). Поэтому $AB = \sqrt{41}$ см, $BC = \sqrt{20}$ см.

4.6. Чему равна площадь равностороннего треугольника со стороной 1 км?

Ответ. В п. 4.7 выведена общая формула: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (кв. единиц). Здесь $a = 1$ км, значит, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (км^2).

4.7. По какой формуле можно вычислять площадь правильного шестиугольника со стороной a?

Ответ. Искомая площадь $S = 6 \cdot S_0$, где $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Итак, $S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = 1{,}5\sqrt{3} \cdot a^2$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.* а) Проверьте, что в прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 15$ см, $BC = 20$ см проведенная к гипотенузе высота равна 12 см. б) Проверьте, что значение площади такого треугольника, вычисленной по общей формуле, не зависит от того, какую сторону считать основанием этого треугольника.

Указание. а) Это легко проверить, если на клетчатой бумаге считать сторону квадрата изображением отрезка длиной 1 см и нарисовать прямоугольные треугольники с катетами 12 и 9 и с катетами 12 и 16 так, чтобы равные катеты совпали, а два других катета составили гипотенузу исходного треугольника длиной 25; б) достаточно проверить, что $\frac{15 \cdot 20}{2} = \frac{12 \cdot 25}{2}$.

8.* а) Проверьте, что в треугольнике ABC со сторонами $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $AC = 14$ см проведенная к стороне AC высота равна 12 см.

б) Найдите длины высот этого треугольника, проведенных к сторонам AB и BC.

Указание. а) Это легко проверить, если на клетчатой бумаге нарисовать прямоугольные треугольники со сторонами 15, 12, 9 и со сторонами 13, 12, 5 так, чтобы равные катеты совпали, а две другие стороны составили отрезок длины 14.

б) Сначала вычислить площадь треугольника, а затем воспользоваться формулами, выражающими площадь через другие основания.

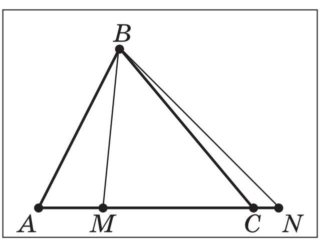


Рис. 2

11.* Площадь треугольника ABC равна 20 см^2, а точки M и N расположены на прямой AC так, как на рис. 2, причем $AM : MC = 3 : 7$, $AN : NC = 8 : 1$. Найдите площадь треугольника BMN.

Указание. Отношение площади треугольника MBN к площади треугольника ABC равно $MN : AC$.

13.* На рис. 3 изображен треугольник ABC. На продолжении высоты BH выбрана точка M так, что $HM : BH = 4 : 9$. Найдите площадь треугольника AMC, зная, что площадь треугольника ABC равна 81 см^2.

Указание. Отношение площади треугольника AMC к площади треугольника ABC равно $MH : BH$.

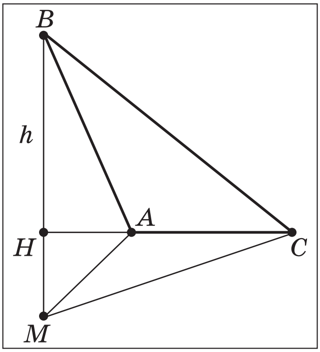


Рис. 3

14.* На рис. 4 проведены две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке H. Остальные точки расположены так, что $AH : MH = 3 : 5$, $NH : BH = 7 : 9$, $CH : KH = 2 : 5$, $MH : KH = 8 : 7$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника MNK.

Указание. Посмотрите указания к задачам 11 и 13.

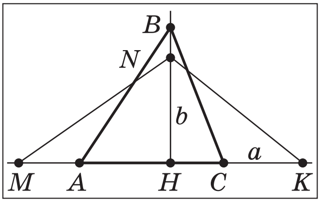


Рис. 4

15.** Площадь треугольника ABC, изображенного на рис. 5, равна 2 см^2. Точки M, N, K построены на продолжениях сторон так, что $AK = AC$, $BM = BA$, $CN = CB$. Найдите площадь треугольника MNK.

Указание. Сначала вычислите площади треугольников AMK, BMN, CNK.

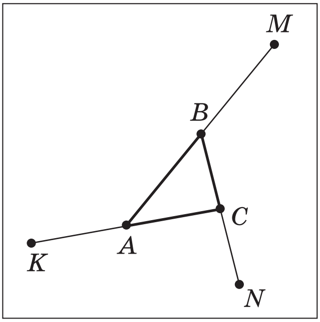


Рис. 5

16.** Площадь треугольника ABC, изображенного на рис. 6, равна S. На прямых AB, AC и BC построены соответственно точки M, N, K так, что $AM = MB$, $AC = CN$, $KC = \frac{1}{2} \cdot BC$. Найдите площадь треугольника MNK.

Указание. Можно, например, вычислить площадь четырехугольника $ABNK$ и площади треугольников AMK, MBN.

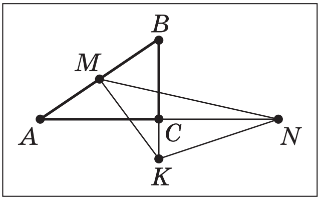


Рис. 6

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. В ромбе $ABCD$ (рис. 7) сторона BC разделена на 5 равных отрезков точками E, F, G, H. Какие из треугольников равны по площади $\frac{1}{5}$ площади ромба?

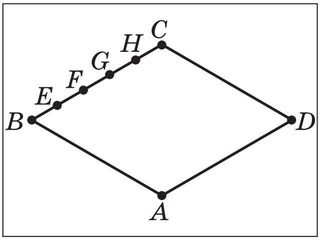


Рис. 7

1) ΔDCH 2) ΔAEG

3) ΔDEH 4) ΔDFH

Указание. Площадь треугольника должна составлять $\frac{2}{5}$ от площади треугольника BCD.

Глава 5
УРАВНЕНИЯ

Цель главы — приступить к систематическому изучению уравнений, ввести понятие равносильности уравнений, изучить основные преобразования, сохраняющие равносильность, исследовать решение линейных уравнений с одним неизвестным.

Особенности главы. На первом уровне изучение основных понятий опирается на конкретные примеры, что, впрочем, важно и для других уровней. Самое важное понятие равносильности уравнений вводится и на первом уровне. Владение навыками выполнения преобразований, сохраняющих равносильность, в будущем значительно облегчит изучение способов решения уравнений разного вида, решения неравенств и систем.

Так как понятие уравнения весьма общее, то наряду с уравнениями, в которых неизвестное одно, в последнем параграфе рассматриваются примеры уравнений с несколькими неизвестными.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Цель параграфа — научиться решать линейные уравнения с одним неизвестным.

Особенности параграфа. С примерами уравнений учащиеся встречались и в предшествующих классах. Тем не менее начало изучения материала связано с подробной постановкой задачи, называемой задачей на решение уравнения, так как уравнение — это не просто два буквенных выражения, соединенные знаком равенства, а сопоставляемая такому равенству задача о нахождении значений неизвестного (или неизвестных), при которых значения частей уравнения равны. С точки зрения математической логики уравнение — это задача о нахождении области истинности предиката, зависящего от переменных.

Основным содержанием первого параграфа является изучение правил решения линейных уравнений. Тем не менее на примере линейных уравнений прослеживается идеология замены уравнений на равносильные, что в конечном итоге приводит к уравнениям простейшего вида. Если простейшее уравнение имеет, например, вид $x = 5$, то его корень находится в соответствии со смыслом числового равенства; если простейшее уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$, то по правилу умножения на 0 устанавливается, что каждое число является корнем; если простейшее уравнение имеет вид $0 \cdot x = 1$, то также по правилу умножения на 0 устанавливается, что у этого уравнения корней нет.

Параграф отличается наличием большого числа разнообразных задач, при решении которых можно повторить темы: задачи на движение, на работу, задачи с процентами, задачи с целыми числами.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: основные правила арифметики; свойства числовых равенств.

Новые математические понятия и свойства: уравнение с одним неизвестным (с одной переменной); решение (корень) уравнения; линейный многочлен от одной переменной; линейное уравнение с одним неизвестным.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Корень какого уравнения равен разности $a - b$ двух чисел?

Ответ. Для ответа на этот вопрос нужно вспомнить определение разности: разностью $a - b$ чисел называется корень уравнения $b + x = a$.

1.2. Является ли число 5 корнем уравнения $2x + 4 = 3x - 1$?

Ответ. При $x = 5$ имеем $2x + 4 = 14$, $3x - 1 = 14$, поэтому $x = 5$ является корнем.

1.3. Сколько корней имеет уравнение $\frac{3}{4}x = 0$?

Ответ. Один корень $x = 0$, потому что $\frac{3}{4} \cdot 0 = 0$, а при $x \neq 0$ произведение $\frac{3}{4}x$ не равно нулю.

1.4. Какие корни имеет уравнение $6x - 2 = 6x - 2$?

Ответ. Корнями этого уравнения являются все числа.

1.5. Сколько корней имеет уравнение $6x - 0{,}5 = 6x + 0{,}5$?

Ответ. У этого уравнения корней нет, так как при каждом x разность между правой и левой частью равна 1, а поэтому левая и правая части уравнения не могут быть равными.

1.6. Сколько корней имеет уравнение $0 \cdot x = \frac{3}{4}$?

Ответ. У этого уравнения корней нет, так как при каждом x левая часть равна 0, а поэтому не равна правой части.

1.7. Как записать сокращенно решение уравнения $1 - 4x = \frac{5}{2}$?

Ответ. $1 - 4x = \frac{5}{2}, -4x = \frac{3}{2}, 4x = \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{8}$.

1.8. ** Какие корни имеет уравнение $ax = a$, где a — фиксированное число, x — неизвестное число?

Ответ. Если $a \neq 0$, то корень единственный $x = 0$; если $a = 0$, то корнем является каждое число.

1.9.** При каком значении параметра a уравнение $0 \cdot x = a$ имеет хотя бы два различных корня?

Ответ. При $a = 0$.

1.10. Как изменится ответ задачи в примере 7 пункта 1.10, если бы первый экскаватор работал 4 ч, а второй 11 ч?

Ответ. Нужно внести изменения и повторить рассуждения, приведенные в пункте. В результате получится, что первый экскаватор вынимает 370 м^3 земли в час, а второй — вынимает 270 м^3 в час.

1.11.* Сколько творога получится из 1 тонны молока при условии из примера 8?

Ответ. Так как количество творога, производимого из молока, изменяется прямо пропорционально от количества молока, то полученый в пункте ответ нужно умножить на 10, и получится 300 кг.

Указания к решению наиболее трудных задач.

8. Из пассажирского поезда некто заметил, что встречный товарный поезд прошел мимо за 10 с. Определите скорость товарного поезда, если известно, что его длина 250 м, а скорость пассажирского поезда равна 50 км/ч.

Указание. Пусть v км/ч — скорость товарного поезда. Переводя время 10 секунд в часы и длину товарного поезда 250 метров в километры, составляем уравнение: $(v + 50) \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{4}$.

14. Свежая малина содержит 94% воды, сушеная — 19%. Сколько сушеной малины получится из 18 кг свежей?

Указание. Предполагаем, что малина состоит из воды и некоторого «сухого вещества». Тогда в свежей малине $\frac{18 \cdot 6}{160}$ кг «сухого вещества», а если m (кг) — масса сушеной малины, то в ней $\frac{m \cdot 81}{100}$ кг «сухого вещества». Так как при сушке испаряется только вода, то $\frac{m \cdot 81}{100} = \frac{18 \cdot 6}{100}$, откуда $m = \frac{1}{4}$ кг.

17.** Произведение двух последовательных целых чисел на 14 меньше, чем произведение следующих двух последовательных целых чисел. Найдите эти числа.

Указание. Обозначив через x первое из указанных в условии чисел, получаем уравнение $(x + 2)(x + 3) - x(x + 1) = 14$, откуда $x = 2$. Отметим, что сложность задачи связана с составлением уравнения и преобразованиями, приводящими к ответу.

18. В загоне находятся страусы и лошади. У всех вместе 36 голов и 100 ног. Сколько в загоне страусов и лошадей?

Указание. Обозначив через x число страусов, из условия задачи получаем уравнение $4x + 2 \cdot (36 - x) = 100$, откуда $x = 14$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Сплавляют 2 кг сплава с 20%-м содержанием олова и 3 кг сплава с 40%-м содержанием олова. Какой процент олова в получившемся сплаве?

1) 28% 2) 30% 3) 32% 4) 34%

Указание. Для ответа можно вычислить, например, значение выражения $\frac{2 \cdot 20 + 3 \cdot 40}{2 + 3}$, что равно 32.

§ 2. УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием множества решений или корней уравнения, ввести понятие равносильности уравнений, рассмотреть основные правила, сохраняющие равносильность.

Особенности параграфа. Параграф достаточно сложен в нескольких отношениях. Прежде всего непростым является даже понятие уравнения с одним неизвестным, потому что решение уравнения предполагает нахождение всех значений переменной, при подстановке которых в обе части уравнения выполняется равенство. В связи с этим вводится понятие множества решений уравнения, в том числе и пустое множество решений. Далее определяется понятие равносильности уравнений, что также сложно, несмотря на кажущуюся простоту определения. Наконец, обоснование и запись в общем виде основных правил преобразования, сохраняющих равносильность уравнений, требует некоторого формализма и имеет довольно громоздкий внешний вид.

При изучении понятия равносильности следует стремиться к тому, чтобы учащиеся на конкретных примерах уравнений с известными множествами корней научились осознанно определять, являются ли уравнения равносильными или нет. С этой целью в параграфе приводится довольно много примеров уравнений, рассчитанных на все уровни обучения.

При изучении преобразований, сохраняющих равносильность уравнений, важно, чтобы учащиеся осознали значимость таких преобразований. А именно: если одно уравнение заменено на другое равносильное ему уравнение, то, решая второе уравнение и найдя все его корни, мы тем самым получим и все корни первого уравнения.

На третьем уровне рассматриваются примеры преобразований, которые могут нарушать равносильность.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: уравнение с одним неизвестным; корень уравнения; тождественные преобразования буквенных выражений.

Новые математические понятия: множество решений уравнения; равносильность уравнений; равносильные преобразования уравнений.

Вспомогательные понятия: преобразования, при которых может нарушаться равносильность.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Почему уравнения $A(x) = B(x)$ и $B(x) = A(x)$ имеют одни и те же корни?

Ответ. Из свойств числовых равенств имеем, что если при некотором a выполняется равенство $A(a) = B(a)$, то равенство $B(a) = A(a)$ тоже выполняется, и если при некотором b выполняется равенство $B(b) = A(b)$, то равенство $A(b) = B(b)$ тоже выполняется.

2.2. Какой пример уравнения с пустым множеством корней рассматривался в первом параграфе?

Ответ. Например, уравнение $0 \cdot x = \frac{3}{4}$.

2.3. Почему равносильны уравнения, каждое из которых не имеет корней?

Ответ. У таких уравнений одно и то же множество корней — это пустое множество.

2.4. Как показать, что уравнения $x^3 - x = 0$ и $0 = x(x - 1)(x + 1)$ равносильны?

Ответ. При разложении левой части уравнения на множители получаем, что $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$. Поэтому первое уравнение равносильно уравнению $x(x - 1)(x + 1) = 0$. При перестановке частей полученного уравнения получаем равносильное уравнение, которое совпадает со вторым заданным в условии уравнением.

2.5. Какие корни имеет уравнение $(x + 5)(x - 5) = 0$?

Ответ. Произведение двух чисел равно нулю только тогда, когда какой-нибудь множитель равен нулю. С учетом этого получаем два уравнения $x + 5 = 0$ и $x - 5 = 0$. Решая эти два уравнения, получаем два корня заданного уравнения: 2 и −2.

2.6. Как доказать, что если число b является корнем уравнения $2x - 1 + (1 - x) = 2 + x + (1 - x)$, то это число b будет также корнем уравнения $2x - 1 = 2 + x$?

Ответ. По условию выполняется равенство $2b - 1 + (1 - b) = 2 + b + (1 - b)$. Вычитая из обеих частей число $(1 - b)$, получаем $2b - 1 = 2 + b$, то есть число b является корнем второго уравнения.

2.7. Какие корни имеет уравнение $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$?

Ответ. Единственный корень $\frac{2}{3}$.

2.8. Как найти все решения уравнения $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0$, если известно, что уравнение $A(x) = 0$ не имеет корней?

Ответ. Решить два уравнения $B(x) = 0$, $C(x) = 0$ и все полученные корни записать в ответ.

2.9.** Нарушится ли равносильность при переходе от уравнения $A(x) \cdot B(x) = 0$ к уравнению $B(x) = 0$, если известно, что уравнение $A(x) = 0$ не имеет корней?

Ответ. Равносильность не нарушится, потому что нахождение всех корней первого уравнения сводится к решению двух уравнений $A(x) = 0$ и $B(x) = 0$, а так как первое из уравнений корней не имеет, то общее число корней уравнения $A(x) \cdot B(x) = 0$ такое же, как и уравнения $B(x) = 0$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6. Являются ли равносильными уравнения?

а) $(x + 1) = 0$ и $(x + 1)^2 = 0$

б) $(x - 1)(x + 3) = 0$ и $(x + 3)(x - 1) = 0$

в) $x^2 = 0$ и $x = 0$

г) $x^2 = 1$ и $x = 1$

д) $2x + 1 = 0$ и $-\frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{4}$

е) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$ и $x^4 + 4 = 0$

ё) $x^2 + 4x + 3 = 0$ и $(x + 1)(x + 3) = 0$

Указание. а) Равносильны, потому что квадрат числа равен нулю только тогда, когда само число равно нулю; б) равносильны, так как левые части уравнений тождественно равны; в) равносильны, как показано в пункте а; г) не равносильны, потому что у первого уравнения есть корень (-1), который не является корнем второго уравнения; д) равносильны, так как множество корней у каждого уравнения состоит из числа $(-0{,}5)$; е) равносильны, так как их левые части тождественно равны; ё) равносильны, так как их левые части тождественно равны.

7.* Решите уравнение.

а) $x^2 = 2x - 1$ б) $x^2 - 4x = -4$ в) $x^2 = -6x - 9$

г) $x - \frac{1}{2} = x^2$ д) $0{,}25 + x^2 = -x$ е) $x^2 - 9 = 0$

ё) $(x^2 - 2)^2 - 4 = 0$ ж) $(x^2 - 2)^2 - x^2 = 0$ з) $x^2 - 5x = 0$

и) $x^2 + 7{,}2x = 0$ й) $x^2 = 8x$ к) $-3{,}9x = -x^2$

Указание. а) Равносильно уравнению $(x - 1)^2 = 0$; б) равносильно уравнению $(x - 2)^2 = 0$; в) равносильно уравнению $(x + 3)^2 = 0$; г) равносильно уравнению $(x - 0{,}5)^2 = 0$; д) равносильно уравнению $(x + 0{,}5)^2 = 0$; е) равносильно уравнению $(x - 3)(x + 3) = 0$; ё) равносильно уравнению $x^2(x^2 - 4) = 0$; ж) равносильно уравнению $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$, которое равносильно уравнению $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$; з) равносильно уравнению $x(x - 5) = 0$; и) равносильно уравнению $x(x - 7{,}2) = 0$; й) равносильно уравнению $x(x - 8) = 0$; к) равносильно уравнению $x(x - 3{,}9) = 0$.

8.* Решите уравнение.

а) $(x+1)^2=4^2$ б) $4(x-2)^2=16$

в) $-(x+4)^2+25=0$ г) $-(-x+5)^2=-36$

Указание. а) Равносильно уравнению $(x+5)(x-3)=0$; б) равносильно уравнению $x(x-4)=0$; в) равносильно уравнению $(x+9)(x-1)=0$; г) равносильно уравнению $(x-11)(x+1)=0$.

9.** Решите уравнение.

а) $|x|=2$ б) $|x|=0$ в) $|x|+5=3$

г) $|x+5|=4$ д) $|x-4|=3$ е) $|x-6|=0$

Указание. В соответствии с определением модуля числа в каждом из примеров можно рассмотреть по два случая.

а) При $x \geq 0$ получаем $x=2$, при $x<0$ получаем $-x=2$;

б) равносильно уравнению $x=0$;

в) при $x \geq 0$ получаем $x+5=3$, при $x<0$ получаем $-x+5=3$;

г) при $x \geq -5$ получаем $x+5=4$, при $x<-5$ получаем $-x-5=4$;

д) при $x \geq 4$ получаем $x-4=3$, при $x<4$ получаем $-x+4=3$;

е) равносильно уравнению $x-6=0$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Укажите уравнения, имеющие корнем число 0:

1) $x \cdot 0=x^2 \cdot 0$ 2) $\dfrac{x}{x}=1$

3) $\dfrac{3x+5}{x}=\dfrac{7x+5}{2x+1}$ 4) $x^2=x$

Указание. В вариантах 1 и 4 при подстановке числа 0 получаем равенства, в варианте 2 при подстановке числа 0 в знаменателе дробного выражения получаем 0, но на нуль делить нельзя; в варианте 3 при подстановке числа 0 в левую часть в знаменателе дробного выражения также получается нуль.

2.2. Укажите уравнения, у которых число корней больше одного:

1) $(x-1)(x-2)=0$ 2) $x^2=0$

3) $(x-1) \cdot 5=1$ 4) $4(x+1)(2x-13)=0$

Указание. В вариантах 1 и 4 два корня, в варианте 2 уравнение равносильно уравнению $x=0$, в варианте 3 линейное уравнение, имеющее один корень.

§ 3. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Цель параграфа — ознакомиться с примерами уравнений с двумя неизвестными и с правилами преобразования таких уравнений, сохраняющими равносильность.

Особенности параграфа. На первом уровне изучение материала ориентировано на те примеры уравнений с двумя неизвестными, которые иногда появлялись в младших классах. Одним из таких уравнений является уравнение окружности, из чего можно сделать вывод, что уравнения с двумя переменными могут иметь бесконечное множество решений. Также по ассоциации с окружностью вводится общее важное определение графика уравнения, что в последующем позволяет упростить рассмотрение графиков функций и других зависимостей между двумя переменными.

На втором и третьем уровне обращается внимание на некоторые случаи вырожденных уравнений с двумя неизвестными. Несмотря на кажущуюся простоту этих вырожденных случаев, основная масса ошибок, возникающих при решении линейных уравнений, относится к уравнениям именно такого вида. Поэтому при изучении данного материала следует обратить внимание на то, что общие алгоритмы решения невырожденных линейных уравнений становятся неприменимыми в случае вырожденных уравнений. Поэтому для нахождения всех решений вырожденного уравнения приходится, в некотором смысле, придумывать особый способ действий, который в значительной степени относится к выявлению смысла возникающей задачи.

Например, при решении уравнения $3x + y = 2x + y - 1$, рассматриваемого как уравнение с неизвестными x, y, формальные преобразования позволяют получить уравнение $x = -1$, и, вообще говоря, требуется определенное время, чтобы понять, что последнее получающееся уравнение, рассматриваемое как уравнение с двумя переменными, имеет бесконечное множество решений вида $(-1; y)$, где вместо y можно подставлять любое число. Для пояснения этого результата можно либо привлечь уравнение в первоначальном непреобразованном виде, либо последнее уравнение представить в виде $1 \cdot x + 0 \cdot y = -1$.

При изучении параграфа исключительное значение приобретают иллюстрации, так как графики уравнений с двумя неизвестными хорошо иллюстрируются в виде рисунков на координатной плоскости. В частности, график линейного уравнения чаще всего изображается в виде прямой.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: элементарные преобразования уравнений с одним неизвестным.

Новые математические понятия: всюду определенное алгебраическое уравнение с двумя неизвестными; решение алгебраического уравнения с двумя неизвестными; множество решений алгебраического уравнения с двумя неизвестными; график уравнения; равносильность алгебраических уравнений с двумя неизвестными; преобразования алгебраических уравнений с двумя неизвестными, сохраняющих равносильность.

Вспомогательные понятия: уравнение окружности с центром в начале координат; уравнение окружности с центром в любой заданной точке.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Какие уравнения с двумя неизвестными вы знаете?

Варианты ответа. $x + y + 1 = 0$; $x^2 - y = 0$; $x \cdot y = 1$ и т.д.

3.2. Какие тождества с двумя переменными вы знаете?

Варианты ответа. $x + y = y + x$; $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$; $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ и т. д.

3.3. Является ли пара чисел $(1; \frac{7}{3})$ решением уравнения $3x - y + 2 - 1 = 2x + 2y - 4$?

Ответ. В пункте получено, что указанная пара чисел $(\frac{7}{3}; 1)$ является решением уравнения $3x - y + 2 = 2x + 2y - 4$, то есть при подстановке этой пары чисел значения левой и правой части равны. Однако у нового уравнения правая часть такая же, а левая уменьшена на 1, то есть при подстановке заданной пары чисел в части нового уравнения равенства уже не будет.

3.4. Какие решения уравнения $x^2 + y^2 = 0$ вы можете найти?

Ответ. Так как $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$, то из $x^2 + y^2 = 0$ следует $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, то есть $x = 0$, $y = 0$. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет единственное решение $(0; 0)$.

3.5. Почему уравнение $3x - y + 2 = 2x + 2y - 4$ равносильно уравнению $x - 3y + 6 = 0$?

Ответ. Вычитаем из обеих частей первого уравнения выражение $2x + 2y - 4$ и получаем $3x - y + 2 - 2x - 2y + 4 = 2x + 2y - 4 - 2x - 2y + 4$. После приведения подобных получаем второе уравнение.

3.6.* Какое множество решений имеет уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$?

Ответ. Пустое множество. Другими словами, уравнение не имеет решений.

3.7.* Какое множество решений имеет уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$?

Ответ. Это множество всех пар чисел $(x; y)$, потому что при подстановке любой такой пары в левую часть уравнения значение левой части будет равным нулю.

3.8. Какой график имеет уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$, рассматриваемое как уравнение с неизвестными x и y?

Ответ. График состоит из двух видов точек: точки вида $(1; b)$, b — любое число, и $(2; a)$, a — любое число. Геометрически — это две прямые, параллельные оси Oy, проходящие через точки $(1; 0)$, $(2; 0)$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Являются ли равносильными уравнения:

д) $z(z + t) = z(z - t)$ и $z + t = z - t$; е)* $x^2 + y^2 = 0$ и $|x| + |y| = 0$?

Указание. д) Все пары вида $(0; t)$ являются решениями первого уравнения, но из них только пара $(0; 0)$ является решением второго. Следовательно, данные уравнения не равносильны.

е) Можно доказать, что пара $(0; 0)$ является единственным решением как первого, так и второго уравнения. Следовательно, данные уравнения равносильны.

3.* Изобразите на координатной плоскости все решения $(x; y)$ уравнения: а) $xy = 0$; б) $x^2 + y^2 = (x + y)^2$; в) $(x + 1)(y - 1) = 0$; г) $x^2 + 0 \cdot y^2 = 1$.

Указание. а) Множество решений есть объединение двух прямых $x = 0$ и $y = 0$; б) множество решений совпадает с множеством из пункта а; в) множество решений есть объединение двух прямых $x = -1$ и $y = 1$; г) множество решений есть объединение двух прямых $x = 1$ и $x = -1$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Укажите уравнения, графики которых — две вертикальные прямые.

1) $(x - 1)(x - 2)(x - 1) = 0$ 2) $x - 1 = y - 2$

3) $(x - 1)(y - 1)(x - 2) = 0$ 4) $x^2 = 1$

Указание. В варианте 1 две прямые $x = 1$ и $x = 2$; в варианте 2 одна прямая $y - x = 1$; в варианте 3 три прямые $x = 1$, $x = 2$ и $y = 1$; в варианте 4 две прямые $x = 1$ и $x = -1$.

2.2. Укажите все уравнения, у которых нет решений:

1) $(x - 1) + (y - 2) = 3$ 2) $(x - 1)(y - 2) = xy$

3) $(x - 2)(y - 1) = xy - 2y - x + 3$ 4) $x^2 - y^2 - 1 = (x - y)(x + y)$

Указание. В варианте 1 уравнение линейное, и решение подобрать легко; в варианте 2 после раскрытия получится также линейное уравнение; в варианте 3 после раскрытия скобок и приведения подобных приходим к равенству $-2 = 3$, и решений нет; в варианте 4 после раскрытия скобок и приведения подобных приходим к равенству $-1 = 0$, и решений также нет.

2.3. Укажите уравнения, графики которых — две перпендикулярные прямые.

1) $(x - 1)(2y - 17) = 0$ 2) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

3) $(x - 2)(y - 2)(y - x) = 0$ 4) $x^2 + 2 = 0$

Указание. В варианте 1 графиком является соединение двух графиков: графика уравнения $x - 1 = 0$ и графика уравнения $2y - 17 = 0$, которые являются прямыми, перпендикулярными координатным осям, а поэтому и сами прямые перпендикулярны. В вариантах 2 и 3 получается по три прямых. В варианте 4 уравнение решений не имеет.

2.4.** У каких уравнений с одним неизвестным есть ровно два решения?

1) $x^2 + 1 = 5$ 2) $|x| = 1$

3) $x^2 = 2x^2 + 4$ 4) $x + |x| = 4$

Указание. В варианте 1 два решения: 2 и -2; в варианте 2 два решения: 1 и -1; в варианте 3 решений нет; в варианте 4 можно искать решения рассмотрением двух случаев: при $x \geq 0$ получается $2x = 4$, откуда $x = 2$; при $x < 0$ получается $0 \cdot x = 4$, и решений нет.

Глава 6
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

Цель главы — изложить теорию параллельных прямых на плоскости, основанную на аксиоматическом подходе; изучить несколько признаков параллельности прямых и доказательство теоремы о сумме углов треугольника.

Особенности главы. Начальные представления о параллельности прямых на плоскости формируются на основе известных из предыдущих классов геометрических фактов, многие из которых получались с использованием свойств клетчатой бумаги. Поэтому, например, горизонтальные линии сетки на клетчатой бумаге или вертикальные позволяют содержательно говорить о существовании непересекающихся прямых на плоскости. Эти наглядные представления подкрепляются формулировкой и доказательством теоремы о перпендикулярах к одной прямой. Тем самым делается первый шаг по переходу от наглядной демонстрации свойств прямых к их обоснованию с помощью логических рассуждений.

Последующее изучение параллельности прямых основывается на определении и аксиоме параллельности. На этом этапе важно обратить внимание учащихся на то, что установить параллельность двух прямых невозможно исходя из наглядных соображений, потому что мы не можем целиком видеть прямые. Поэтому доказывать параллельность прямых можно только путем логических умозаключений. В соответствии с этим важное значение приобретают признаки параллельности прямых, часть которых изучается в данной главе.

§ 1. НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

Цель параграфа — подготовить учащихся к восприятию нового понятия параллельности прямых, которое на плоскости означает то же самое, что и непересекаемость прямых.

Особенности параграфа. Наряду с наглядными иллюстрациями и построениями используются точные логические рассуждения. Примером такого утверждения является изучаемое свойство прямых, перпендикулярных к одной прямой, то есть что два различных перпендикуляра к прямой не пересекаются. При доказательстве этого утверждения демонстрируется непростой способ доказательства методом «от противного». Переходя к рассмотрению этого доказательства, целесообразно вспомнить изучавшееся в предшествующих классах доказательство бесконечности простых чисел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства фигур на клетчатой бумаге — квадратов, прямоугольников и т. д; признаки равенства треугольников; перпендикулярность прямых; единственность перпендикуляра к прямой.

Новые математические понятия и свойства: непересекающиеся прямые; теорема о прямых, перпендикулярных к одной прямой.

Вспомогательные понятия: названия «лемма», «предложение».

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие еще примеры непересекающихся прямых вы знаете?

Ответ. Противоположные стороны квадрата, противоположные края линейки, два ряда рельсов прямоугольного участка пути и т. д. Следует отметить, что во всех этих примерах речь идет не об отрезках, а о прямых, на которых лежат эти отрезки.

1.2. Что вы знаете о высотах треугольника?

Варианты ответа. 1. Основание высоты может лежать на основании, может совпадать с вершиной, может лежать на продолжении основания.

2. Высоты треугольника (или их продолжения) обязательно пересекаются в одной точке.

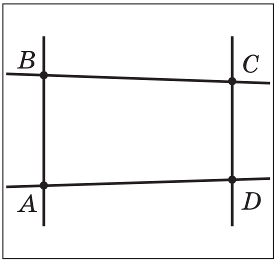


Рис. 1

1.3. На рис. 1 стороны BC и AD угла пересечены прямыми AB и CD. Как доказать, что четырехугольник $ABCD$ не является прямоугольником?

Вариант ответа. Если бы этот четырехугольник был прямоугольником, то прямые BC и AD не могли бы пересекаться. Но BC и AD являются сторонами угла, то есть пересекаются в вершине угла. Значит, $ABCD$ не может быть прямоугольником.

1.4. Почему противоположные стороны квадрата лежат на непересекающихся прямых?

Ответ. Пусть $ABCD$ — квадрат. Его противоположные стороны BC и AD перпендикулярны к стороне AB, поэтому прямые BC и AD не пересекаются.

1.5. Какие теоремы вы знаете?

Варианты ответа. Теорема Пифагора. Теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Теорема о биссектрисе угла квадрата.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Даны квадрат и прямая l. Постройте квадрат, равный данному, чтобы прямая l содержала: б)** одну из сторон квадрата; в)** середины двух противоположных сторон квадрата.

Указание. б) С помощью циркуля на прямой построить отрезок, равный стороне квадрата, а затем построить проходящие через концы отрезка прямые, перпендикулярные к заданной прямой; в) сначала построить квадрат, как в пункте б, затем перпендикулярные к заданной прямой стороны разделить пополам, получить прямоугольник и затем построить симметричный ему прямоугольник относительно заданной прямой.

2. Даны равносторонний треугольник и прямая l. Постройте треугольник, равный данному, чтобы прямая l содержала: б)* одну из высот треугольника; в)** середины двух сторон треугольника.

Указание. б) С помощью циркуля на прямой построить отрезок, равный высоте заданного треугольника, затем построить прямую, проходящую через один из концов этого отрезка, и на ней от точки пересечения отложить два отрезка, равные половине стороны треугольника; в) сначала построить равносторонний треугольник со стороной, равной половине стороны заданного треугольника и расположенной на заданной прямой.

3. б)*Даны треугольник со сторонами a, b, c и прямая l. Постройте треугольник, равный данному, чтобы прямая l содержала высоту треугольника, проведенную к стороне a.

Указание. б) Сначала построить эту высоту. Затем с помощью циркуля на прямой построить отрезок, равный этой высоте, построить проходящую через один конец отрезка прямую, перпендикулярную к заданной прямой, и на этой прямой отложить части стороны a.

4.* Два треугольника расположены так, что две их стороны лежат на одной прямой. Докажите, что проведенные к этим сторонам высоты треугольников либо лежат на одной прямой, либо не имеют общих точек.

Указание. Воспользоваться тем, что прямые, перпендикулярные к одной прямой, либо совпадают, либо не пересекаются.

5.* Постройте треугольник по двум сторонам и высоте: а) проведенной к одной из этих сторон; б) проведенной к третьей стороне.

Указание. а) Сначала построить прямоугольный треугольник, у которого катет равен высоте; б) с катетом, равным высоте, построить два прямоугольных треугольника, у которых гипотенузы равны сторонам. Обратить внимание на то, что в результате построения чаще всего получается два не равных между собой треугольника, имеющих заданную высоту и стороны.

6. Как показать, что диагональ прямоугольника не может быть перпендикулярна его стороне?

Указание. Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Если предположить, что, например, $AC \perp CD$, то с учетом того, что $BC \perp CD$, получим два различных перпендикуляра к одной прямой, проходящие через одну точку. Но этого не может быть в силу утверждения о единственности перпендикуляра.

7.* Как показать, что диагональ ромба не может быть перпендикулярна его стороне?

Указание. К диагонали перпендикулярна вторая диагональ ромба.

8.** Докажите, что противоположные стороны ромба лежат на непересекающихся прямых.

Указание. Из точки пересечения диагоналей провести к этим сторонам перпендикуляры, рассмотреть получающиеся прямоугольные треугольники и их углы.

9.** *Указание.* См. указание к задаче 8**.

10.** Дан ромб $ABCD$. Из вершины A проводится перпендикуляр к прямой CD, а из вершины C проводится перпендикуляр к прямой AB. Как показать, что эти перпендикуляры либо не пересекаются, либо совпадают?

Указание. Показать, что в четырехугольнике с вершинами A, C и основаниями перпендикуляров все углы прямые.

11.** а) Прямая l не содержит вершины и пересекает две противоположные стороны прямоугольника. Докажите, что прямая l не пересекает две другие стороны прямоугольника.

Указание. Пусть l пересекает стороны AD и BC. Прямая l делит плоскость на две полуплоскости, при этом две вершины прямоугольника A и B находятся в одной из них, а вершины C и D — в другой. Согласно известному свойству полуплоскостей, рассмотренному еще в 5 классе, если две точки принадлежат некоторой полуплоскости, то ей целиком принадлежит весь отрезок, соединяющий эти точки. Таким образом, сторона AB не пересекается с прямой l. То же самое справедливо и для CD.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Даны два прямоугольника, как на рис. 2, причем $GH \perp AB$. Сколько различных пар непересекающихся прямых изображено на рисунке?

1) ни одной 2) две
3) четыре 4) восемь

Указание. Можно получить четыре прямые, перпендикулярные к прямой AB, и четыре прямые, перпендикулярные к прямой BC.

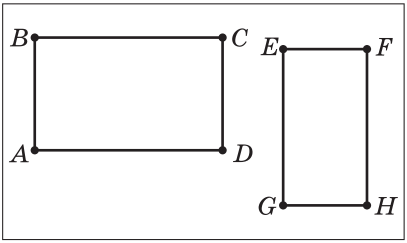


Рис. 2

1.3. Перпендикулярно к прямой a проведена прямая b, к b — прямая c, к c — прямая d и к d — прямая e. Все прямые не совпадают. Сколько имеется различных пар непересекающихся прямых?

1) две 2) три 3) четыре 4) пять

Указание. Можно представить, что все эти прямые проходят через стороны некоторого прямоугольника.

2.1. Через стороны треугольника и одну из вершин проведены прямые. Сколько различных пар непересекающихся прямых может быть на получившемся рисунке?

1) ни одной 2) одна 3) две 4) три

Указание. Может быть ни одной пары, если через вершину проведена прямая, пересекающая прямую, содержащую основание, и одна пара, если через вершину проведена прямая, не пересекающая прямую, содержащую основание.

2.2.** Какое число различных пар непересекающихся прямых могут образовывать прямые, содержащие стороны некоторого шестиугольника?

1) ни одной 2) две 3) четыре 4) шесть

Указание. Можно реализовать все приведенные варианты.

2.3.** Какое число пар взаимно перпендикулярных сторон может быть в многоугольнике?

1) одна 2) две 3) три 4) четыре

Указание. Можно реализовать все приведенные варианты.

2.4.** В некотором многоугольнике два угла — прямые. Сколько пар непересекающихся прямых могут быть среди прямых, содержащих стороны многоугольника?

1) одна 2) две 3) три 4) четыре

Указание. Можно реализовать все приведенные варианты.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Цель параграфа — определить параллельность прямых на плоскости, сформулировать аксиому параллельности, рассмотреть признаки параллельности и свойства параллельных прямых.

Особенности параграфа. К известным к данному моменту свойствам прямых на плоскости добавляется важная для евклидовой геометрии аксиома параллельности. Как следствие из нее доказывается первый основной признак параллельности прямых.

Для того чтобы рассмотреть свойства параллельных прямых и другие признаки параллельности, рассматривается понятие секущей для двух прямых и вводятся названия для некоторых пар образующихся при этом углов. Ввиду громоздкости этого материала целесообразно затратить некоторое время, чтобы учащиеся запомнили вводимую терминологию и могли распознавать тот или иной случай расположения углов на чертеже. С использованием секущей двух прямых удается сформулировать очередные признаки параллельности прямых.

Относительно доказательства этих признаков полезно обратить внимание на то, что доказательство признака, сформулированного первым, требует особого внимания, так как при доказательстве рассматривается дополнительная конструкция, которую самим придумать сложно, а последующие признаки доказываются с использованием уже доказанных естественными рассуждениями.

Из свойств параллельных прямых особое внимание следует обратить на свойство секущей параллельных прямых, которое часто применяется при решении задач.

На третьем уровне дополнительно изучаются свойства углов с взаимно параллельными сторонами.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: смежные и вертикальные углы и их свойства; способы построения непересекающихся прямых; признаки равенства треугольников.

Новые математические понятия и свойства: параллельные прямые; аксиома параллельности; секущая двух прямых; внутренние накрест лежащие углы; односторонние углы; соответственные углы; признаки параллельности прямых; свойства параллельных прямых.

Вспомогательные понятия: свойства углов с соответственно параллельными сторонами.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какие примеры параллельных прямых вам известны?

Варианты ответа. Две прямые, перпендикулярные третьей; прямые, содержащие противоположные стороны ромба, и др.

2.2. Как доказать, что два различных квадрата не могут иметь только три попарно совпадающие вершины?

Ответ. Если бы квадраты $ABCD$ и $ABCD'$ имели три общие вершины A, B, С, но разные четвертые вершины D и D', то из точки C мы имели бы два перпендикуляра CD и CD' на прямую AD, что невозможно.

2.3. Как доказать, что если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c?

Ответ. Пусть $a \parallel b$ и $b \parallel c$. Тогда $c \parallel b$. Таким образом, прямые a и c параллельны прямой b. Поэтому $a \parallel c$ по признаку параллельности из данного пункта.

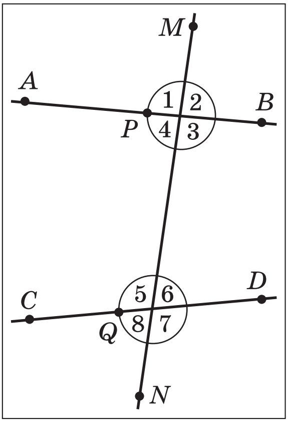


Рис. 1

2.4.** Какими свойствами обладает понятие равенства целых и дробных чисел?

Ответ. Аналогичными свойствам параллельности и свойствам равенства геометрических фигур: $a = a$; $a = b \Rightarrow b = a$; $a = b$ и $b = c \Rightarrow a = c$.

2.5. Что можно сказать о внутренних накрест лежащих углах на рис. 1, если $\angle 1 + \angle 8 = 180°$?

Ответ. Они равны. Например, потому, что $\angle 4 = \angle 8 = \angle 6$.

2.6. Что можно сказать о внутренних накрест лежащих углах, если два соответственных угла равны?

Ответ. Они тоже равны, что видно из рис. 1.

2.7. Будут ли параллельны две прямые, при пересечении которых секущая образует равные соответственные углы?

Ответ. Да, будут, так как при этом внутренние накрест лежащие углы тоже равны.

2.8. Как следует вести построение, описанное в пункте, если отрезок PQ окажется перпендикуляром к прямой CD?

Ответ. В этом случае можно построить перпендикуляр к прямой PQ в точке P.

2.9. Как сформулировать доказанное в пункте утверждение в виде теоремы?

Ответ. Если прямая m пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

2.10. Какие признаки параллельности прямых вы знаете?

Ответ. 1. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой на плоскости, параллельны.

2. Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

3. Если при пересечении двух прямых a и b секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые a и b параллельны.

4. Если при пересечении двух прямых a и b секущей соответственные углы равны, то прямые a и b параллельны.

2.11. Чему равна сумма внешних односторонних углов при двух параллельных и секущей?

Ответ. 180°, так как по теореме из п. 2.10 равные им вертикальные углы в сумме составляют 180°.

2.12.* Две параллельные прямые пересекаются второй парой параллельных прямых. Сколько пар неразвернутых углов с соответственно параллельными сторонами, лежащими на этих четырех прямых, вы можете насчитать при двух вершинах, выбранных среди точек пересечения данных прямых?

Ответ. Всего углов 16, причем каждые два из них имеют соответственно параллельные стороны. Поэтому с каждым из углов можно составить 15 пар, но при таком подсчете каждая из возможных пар встретится два раза. Поэтому всего 60 пар углов.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. в)** На рис. 2 прямые AB и CD параллельны. Докажите, что биссектрисы углов APQ и DQP параллельны.

Указание. Рассмотреть прямую MN как секущую прямых, содержащих биссектрисы, и далее рассмотреть образующиеся внутренние накрест лежащие углы.

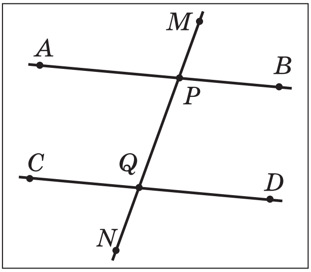


Рис. 2

10.* В равнобедренном треугольнике ABC на рис. 3 углы A и B при основании равны 50°. Точки K и D выбраны так, что $\angle KAB = 25°$ и $AD = DK$. Докажите, что прямые AB и DK параллельны.

Указание. Рассмотреть углы равнобедренного треугольника ADK и показать, что $\angle DKA = \angle KAB$.

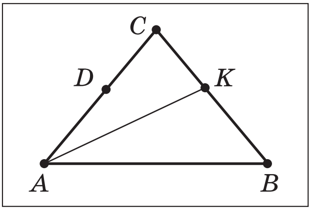


Рис. 3

12.* На рис. 4 равны отрезки AC и BD, BC и AD. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

Указание. Рассмотреть равнобедренные треугольники, получающиеся при пересечении диагоналей AD и BC четырехугольника $ACDB$, и воспользоваться тем, что сумма углов равнобедренного треугольника равна 180°.

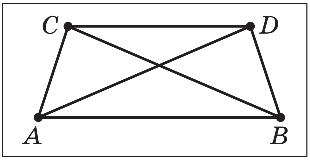


Рис. 4

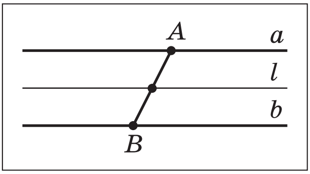


Рис. 5

14.* Точки A и B лежат на параллельных прямых a и b. Через середину отрезка AB проводится прямая l (рис. 5), параллельная прямым a и b. Докажите, что прямая l пересекает любой отрезок, один конец которого расположен на прямой a, а другой конец — на прямой b.

Указание. Сначала нужно показать, что прямые a и b расположены в разных полуплоскостях относительно прямой l.

15.* Через середину стороны AB треугольника ABC параллельно стороне AC проводится прямая l. Докажите, что прямая l пересекает сторону BC.

Указание. Сначала нужно показать, что все точки прямой AC расположены в одной полуплоскости относительно прямой l.

16.* Через середину стороны AB прямоугольника $ABCD$ проводится прямая l, параллельная стороне BC. Докажите, что прямая l проходит через середину стороны CD.

Указание. Пусть M — середина стороны AB, N — точка пересечения прямой l со стороной CD. Рассмотреть треугольники MBC и BCN и с помощью второго признака равенства доказать, что эти треугольники равны.

17.* Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A и пересекающая продолжение стороны AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

Указание. Рассмотреть углы в треугольнике ACD и показать, что $\angle ADC = \angle ACD$.

18.* Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая продолжение биссектрисы угла A в точке D. Докажите, что $AC = CD$.

Указание. Воспользуйтесь свойством параллельных AB и CD и покажите, что треугольник ADC равнобедренный.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. На рисунке имеется две пары параллельных прямых, причем некоторые пересекаются. Один из образовавшихся углов равен 63°. Какое максимальное число углов, равных 117°, может быть на рисунке?

1) ни одного 2) два 3) четыре 4) восемь

Указание. Сначала можно установить, что число точек попарного пересечения прямых равно 4, затем понять, что с вершиной в каждой из этих точек можно указать два угла указанной величины.

2.2.* На плоскости проведены три прямые. Сколько различных пар смежных углов может при этом образоваться?

1) ни одной 2) четыре 3) восемь 4) двенадцать

Указание. Если среди этих прямых нет параллельных, то получится три точки пресечения прямых, и для каждой точки пересечения можно указать по 4 пары смежных углов. Если две из прямых параллельны, то получится 2 точки пресечения. Если все прямые параллельны между собой, то точек пересечения нет.

§ 3. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — рассмотреть классические утверждения о суммах внутренних и внешних углов треугольника, а также свойство внешнего угла треугольника; сформулировать пятый постулат Евклида и ознакомить учащихся с его историей.

Особенности параграфа. Можно считать, что в параграфе завершается изучение утверждения о сумме всех углов треугольника. Несмотря на то что конечный результат известен учащимся давно, при доказательстве равенства для суммы углов треугольника следует напомнить, что в предыдущих рассуждениях использовалось принятое без доказательства утверждение о том, что существуют прямоугольники, то есть четырехугольники с четырьмя прямыми углами. Принятие аксиомы параллельности позволяет не использовать этот факт и доказать, что сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

На третьем уровне разбирается несколько способов вычисления суммы углов четырехугольника.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: аксиома параллельности; свойства параллельных прямых; признаки параллельности прямых.

Новые математические понятия и свойства: теорема о сумме внутренних углов треугольника; свойство внешнего угла треугольника; теорема о сумме внешних углов треугольника.

Вспомогательные понятия: сумма внутренних углов четырехугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как доказать, что в треугольнике не может быть двух прямых углов?

Ответ. Если предположить, что такой треугольник существует, то сумма всех его углов 180°, и сумма его двух прямых углов 180°. Но тогда величина третьего угла равна нулю, чего в треугольнике быть не может. Так как сделанное предположение приводит к противоречию, то это предположение неверно, что и требовалось доказать.

3.2. Как доказать, что сумма всех внешних углов треугольника равна 720°?

Вариант ответа. При каждой вершине треугольника — два равных внешних угла. Каждый внешний угол равен сумме внутренних углов, с ним не смежных. Если внутренние углы треугольника a, β и γ, то сумма всех внешних углов равна $2(a + \beta) + 2(\beta + \gamma) + 2(a + \gamma) = 4(a + \beta + \gamma) = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

3.3. Как доказать, что треугольник не может иметь два тупых угла?

Ответ. Сумма двух тупых углов больше 180°, тогда как сумма всех углов треугольника равна 180°.

3.4.** Чему равны углы правильного пятиугольника (то есть пятиугольника, в котором все стороны равны и все углы равны)?

Ответ. Правильный пятиугольник разбивается на 3 треугольника диагоналями, выходящими из одной вершины. Значит, сумма его углов равна $180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$. Поэтому все углы правильного пятиугольника по 108°.

3.5.** Какие примеры аксиом вы знаете?

Варианты ответа. Можно привести такие примеры:

— через любые две точки проходит единственная прямая;

— от любой точки на прямой в данном направлении можно отложить отрезок, равный данному;

— от любого луча на плоскости можно отложить угол, равный данному, по заданную от луча сторону и притом единственным способом;

— через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной (аксиома параллельности).

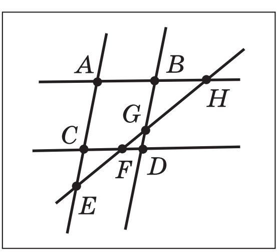


Рис. 1

Указания к решению наиболее трудных задач.

8. Две пары параллельных прямых пересекаются пятой прямой так, как указано на рис. 1. Известно, что $\angle CFE = 39^\circ$, $\angle BGH = 33^\circ$. Найдите угол CAB.

Указание. $\angle CAB = 180° - \angle AHE - \angle AEH = 180° - \angle CFE - \angle BGH$.

9.* В треугольнике ABC проведена высота AH. Известно, что $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$. Найдите углы треугольников ABH и CAH. Рассмотрите все возможные случаи чертежа.

Указание. Сложность задачи в том, что возможны следующие случаи чертежа: основание H высоты расположено внутри отрезка BC; основание H высоты расположено вне отрезка BC, и при этом точка B расположена между точками A и H; основание H высоты расположено вне отрезка BC, и при этом точка А расположена между точками B и H; основание H высоты совпадает с вершиной B; основание H высоты совпадает с вершиной C.

10.* Докажите, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в 30° один катет равен половине гипотенузы.

Указание. Этот треугольник можно достроить до равностороннего треугольника.

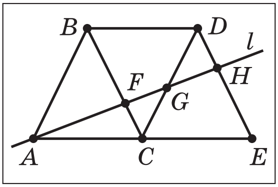


Рис. 2

11. Равносторонние треугольники ABC, BCD, CDE расположены как на рис. 2. Прямая l пересекает стороны в точках F, G, H, причем $\angle HAC = 21°$. Найдите угол DGH.

Указание. $\angle DGH = \angle AGC = 180° - \angle GAC - \angle GCA$.

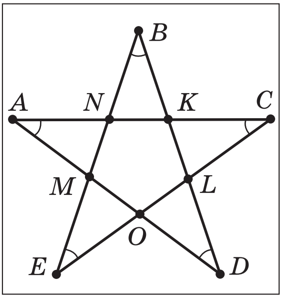


Рис. 3

13.** Точки A, B, C, D, E являются вершинами правильного пятиугольника и соединены так, что образуют пятиконечную звезду, как на рис. 3. Найдите сумму отмеченных углов.

Указание. В пятиугольнике $MNKLO$ каждый из углов равен 108°.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из пар углов являются углами некоторого остроугольного треугольника?

1) 40° и 50° 2) 30° и 70° 3) 40° и 91° 4) 41° и 51°

Указание. Вариант 1 не подходит, так как третий угол равен 90°; вариант 2 подходит, так как заданные углы острые, третий угол равен 80°; вариант 3 не подходит, так как один из заданных углов тупой.

Глава 7
НЕРАВЕНСТВА

Цель главы — напомнить свойства числовых неравенств, ввести понятие равносильности неравенств и рассмотреть, как решаются линейные неравенства с одним неизвестным.

Особенности главы. В главе естественным образом продолжается идеология, в соответствии с которой изучались тождества и уравнения. Если тот материал был освоен достаточно хорошо, то изучение понятий неравенства с переменной, равносильности неравенств, преобразований, сохраняющих равносильность, а также решение линейных неравенств сводится к воспроизведению многих рассуждений по аналогии с теми, которые проводились при изучении уравнений. На первом уровне основные преобразования, сохраняющие равносильность, разбираются на конкретных примерах. В связи с проблемой записи множества решений неравенства рассматриваются числовые промежутки на числовой прямой.

Дополнительно рассматривается также почленное сложение неравенств одной направленности, а на третьем уровне — почленное умножение неравенств одной направленности в том случае, когда части обеих неравенств неотрицательны.

§ 1. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Цель параграфа — напомнить основные свойства числовых неравенств.

Особенности параграфа. В основном излагаемый материал имеет характер повторения, так как в параграфе рассматриваются свойства строгих числовых неравенств, которые изучались в предыдущих классах при сравнении дробных чисел. Особое внимание следует обратить на то, что в случае, когда число a больше числа b, то результат сравнения можно записать двумя способами: $a > b$ или $b < a$. При изучении неравенств большое значение имеет наглядность. Поэтому иногда полезно иллюстрировать числовые неравенства $a < b$ или $a > b$ на числовой оси.

Задачи к параграфу несложные и в основном имеют характер повторения.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: неравенство «больше» для дробных чисел; неравенство «меньше» для дробных чисел; положительные числа; отрицательные числа.

Новые математические понятия и свойства: сравнение чисел по знаку их разности; свойство умножения обеих частей неравенства на положительное число; свойство умножения обеих частей неравенства на положительное число.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как сравнить по величине два числа -1 и 1?

Ответ. Изображая их точками на числовой оси, направленной вправо, замечаем, что точка -1 лежит левее точки 1. Поэтому $-1 < 1$.

1.2. Как показать, что сумма отрицательных чисел всегда отрицательна?

Ответ. Противоположные им числа положительны, следовательно сумма противоположных значений положительна, по свойству из данного пункта, а поэтому число, противоположное сумме, отрицательно.

1.3. Какое число одновременно не отрицательно и не положительно?

Ответ. Число нуль.

1.4. Как определить знак отношения двух ненулевых чисел?

Ответ. Если числа одного знака, то их отношение положительно, а если разных знаков — отрицательно.

1.5. Сколько вы знаете различных чисел, квадрат которых равен 400?

Ответ. Таких числа два: 20 и -20.

1.6. Какое из двух чисел: a или b больше другого, если $a - b < 0$?

Ответ. Больше число b.

1.7. Какое из чисел: $a = 5732 - 22\,457$ или $b = 5832 - 22\,457$ больше другого?

Ответ. Так как $5732 < 5832$, то при вычитании одного и того же числа получим, что второе число больше.

1.8. Какое из чисел больше: $a = \frac{1974}{1946}$ или $b = \frac{2006}{1946}$?

Ответ. Так как знаменатели у этих чисел одинаковы и положительны, то больше второе число, у которого числитель больше.

1.9. Что получится, если обе части неравенства $25 > -36$ умножить на число 0?

Ответ. Получится равенство $0 = 0$.

1.10.* Какое из чисел: $\frac{1}{a}$ или $\frac{1}{b}$, расположено правее на числовой прямой с положительным направлением вправо, если известно, что число a расположено правее числа 0, а число b — левее числа 0?

Ответ. Первое число $\frac{1}{a}$ положительно и расположено правее второго числа $\frac{1}{b}$, которое отрицательно.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.* Приведите примеры чисел a и b, для которых одновременно выполняются неравенства $a^2 < b^2$ и $a > b$.

Указание. Нужно заметить, что оба числа не могут быть положительными. После этого нетрудно придумывать подходящие варианты, например $2 > -7$, $10 > -100$ и т. д.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных неравенств выполняются для любых чисел a и b?

1) $a^2 + b^2 > 1$ 2) $a^2 + b^2 - 1 > 0$

3) $a^2 + b^2 + 1 > 0$ 4) $1 > -(a^2 + b^2)$

Указание. Нужно заметить, что сумма $a^2 + b^2$ всегда неотрицательна, но может быть и нулем.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВ

Цель параграфа — рассмотреть постановку задачи, которую называют задачей на решение неравенства с одной переменной, ввести понятие равносильности неравенств с переменными, изучить основные правила, сохраняющие равносильность неравенств, выработать навыки решения линейных неравенств с одним неизвестным.

Особенности параграфа. Все изучаемые понятия и свойства предназначены для изучения на первом уровне, так как имеют важное значение при решении неравенств не только в 7 классе, но и в последующих классах. При этом понятие равносильности неравенств можно считать основой, которая позволяет вырабатывать навыки безошибочного решения неравенств, так как каждый переход от одного неравенства к другому, равносильному ему, неравенству позволяет получать видоизмененную задачу, множество решений которой совпадает с множеством решений предыдущей.

Далее рассматриваются линейные неравенства с одним неизвестным и параллельно изучаются основные преобразования неравенств, сохраняющие равносильность. На первом и втором уровне правила решения линейных неравенств разъясняются на конкретных примерах.

Примеры доказательства равносильности некоторых неравенств вынесены на третий уровень. Также на третьем уровне приводится исследование линейного неравенства вида $ax < b$. Данная работа имеет важное значение, так как представляет из себя пример решения задачи с двумя параметрами. В результате учащиеся смогут приобрести определенные навыки по решению задач с параметрами.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: понятие линейного уравнения; свойства числовых неравенств.

Новые математические понятия и свойства: неравенство с одной переменной; корень или решение неравенства; линейное неравенство с одной переменной; равносильность неравенств; свойство перестановки частей неравенства; свойство прибавления одного и того же числа к обеим частям неравенства; свойство умножения обеих частей неравенства на одно и то же положительное число; свойство умножения обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число; свойство замены частей неравенства на тождественно равные выражения.

Вспомогательные понятия: свойство деления обеих частей неравенства на одно и то же ненулевое число.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какие ненулевые корни неравенства $3x - 2 > -4x - 5$ вы можете указать?

Ответ. Можно называть любое число, которое не равно нулю и больше $-\frac{3}{7}$.

2.2. Как объяснить, что всякий корень неравенства $A(x) > B(x)$ является корнем неравенства $B(x) < A(x)$, и обратно — всякий корень неравенства $B(x) < A(x)$ является корнем неравенства $A(x) > B(x)$?

Ответ. Пусть a корень первого неравенства $A(x) > B(x)$, то есть число $A(a)$ больше числа $B(a)$. Но тогда число $B(a)$ меньше числа $A(a)$, а поэтому число a является корнем второго неравенства $B(x) < A(x)$. Аналогично доказывается и обратное утверждение.

2.3. Как показать, что множество решений неравенства $0 > x^2$ является пустым множеством?

Ответ. Известно, что квадрат любого числа либо равен нулю, либо положителен, а поэтому отрицательным быть не может. Следовательно, никакое число не может быть корнем данного неравенства.

2.4. Как показать, что неравенства $2x > 10$ и $3x > 15$ равносильны?

Ответ. Каждое из неравенств равносильно неравенству $x > 5$.

2.5.** Как показать равносильность неравенств $a^3(a^2 + 1) > 0$ и $a > 0$?

Ответ. Множество решений второго неравенства — все положительные числа. Поэтому сначала рассмотрим любое положительное число a. Тогда $a^3 > 0$, $a^2 + 1 > 0$, а поэтому их произведение больше нуля, то есть число a является корнем первого неравенства. Затем рассмотрим $a = 0$. Тогда $a^3(a^2 + 1)$ равно нулю, а поэтому число 0 не является корнем первого неравенства. Наконец, рассмотрим любое отрицательное число a. Тогда $a^3 < 0$, $a^2 + 1 > 0$, а поэтому их произведение меньше нуля, и число a не является корнем первого неравенства. В результате показано, что множество корней первого неравенства совпадает с множеством корней второго неравенства, то есть данные неравенства равносильны.

2.6. Как показать, что неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $-A(x) < -B(x)$?

Вариант ответа. Прибавив к обеим частям неравенства $A(x) > B(x)$ выражение $-A(x) < -B(x)$, получим равносильное неравенство $-B(x) > -A(x)$, которое по правилу 1 равносильно неравенству $-A(x) < -B(x)$.

2.7. Как доказать, что всякое решение второго неравенства $s \cdot B(x) > s \cdot A(x)$ является решением первого неравенства $A(x) > B(x)$?

Ответ. Пусть для числа a выполняется неравенство $s \cdot B(a) > s \cdot A(a)$. При умножении обеих частей этого числового неравенства на отрицательное число $\frac{1}{s}$ получится неравенство $\frac{1}{s} \cdot s \cdot B(a) < \frac{1}{s} \cdot s \cdot A(a)$ или $B(a) < A(a)$, откуда $A(a) > B(a)$.

2.8. Как показать, что равносильны неравенства $A(x) < B(x)$, $A(x) < B(x)$ и $A(x) - B(x) < 0$?

Вариант ответа. Прибавив к обеим частям неравенства $A(x) < B(x)$ выражение $-B(x)$, получим равносильное неравенство $A(x) - B(x) < 0$.

2.9. Как показать, что неравенства $0 > x^2 + 10x + 25$ и $0 > (x + 5)^2$ равносильны?

Ответ. Имеет место тождество $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, поэтому по правилу 7 неравенства равносильны.

2.10. Какие решения имеет неравенство $7x - 4 < 8x + 2$?

Ответ. $x > -8$.

2.11. Какое множество корней имеет неравенство $2x - 10 > > 2x - 5$?

Ответ. Пустое множество.

2.12.** Как доказать, что если r — положительное число, то неравенство $A(x) > B(x)$ равносильно неравенству $r \cdot A(x) > > r \cdot B(x)$?

Ответ. Пусть a — корень неравенства $A(x) > B(x)$, то есть $A(a) > B(a)$. Умножая обе части на положительное число r, получаем $r \cdot A(a) > r \cdot B(a)$, то есть число a является корнем неравенства $r \cdot A(x) > r \cdot B(x)$. Обратно, пусть b — корень неравенства $r \cdot A(x) > r \cdot B(x)$, то есть $r \cdot A(b) > r \cdot B(b)$. Умножая обе части на положительное число $\frac{1}{r}$, получаем $A(b) > B(b)$, то есть число b является корнем неравенства $A(x) > B(x)$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.* Пусть известно, что $a^2 + b^2 = 0$. Что можно сказать о числах a и b?

Указание. Прежде всего нужно вспомнить, что квадрат любого числа либо 0, либо положительное число, а сумма положительных чисел положительна. Отсюда перебором случаев получается, что условию задачи удовлетворяет только тот случай, когда оба числа равны нулю.

4.** Решите неравенство: а) $x^2 < 0$; б) $(y + 2)^2 > 0$; в) $2z^2 + 3 > 0$; г) $x^2 + 4 < 0$.

Указание. а) Корней нет; б) квадрат числа не больше нуля только тогда, когда число равно нулю, то есть корнями являются все числа, кроме числа -2; в) корнями являются все числа, так как левая часть либо равна 3, либо больше 3; г) корней нет, так как левая часть либо равна 4, либо больше 4.

7. Решите неравенство.

г)** $(x-1)^2 > (x-2)^2$ д)** $(2x+3)^2 > 4x^2$

Указание. г) Неравенство приводится к виду $2x > 3$; д) неравенство приводится к виду $12x + 9 > 0$.

10.** Докажите, что если m и n натуральные числа и $n > m$, то:

а) $\frac{m}{n} < (m+1)(n+1)$ б) $\frac{m}{n} < \frac{m+2}{n+2}$

Указание. а) Выражение, стоящее в левой части, меньше 1, а выражение, стоящее в правой части, больше 1; б) привести дроби к общему положительному знаменателю и сравнить числители.

15.** Знаки чисел a и b противоположны и модули чисел не равны между собой. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < -2$.

Указание. Сначала доказать, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{(a+b)^2}{ab}$ меньше нуля.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1.** Пусть b — фиксированное число. Каким из указанных неравенств равносильно неравенство $-b + 1 > x$?

1) $1 > x + b$ 2) $x + b < 1$ 3) $x + 1 > b$ 4) $1 - x < b$

Указание. Применяя правила равносильного преобразования неравенств, легко получить варианты 1 и 2. Так как заданное неравенство можно преобразовать к виду $1 - x > b$, то вариант 4 не подходит. В варианте 3 для каждого значения b можно найти значение x, которое является решением неравенства $-b + {}$ $+1 > x$, но не является решением неравенства $x + 1 > b$. Для этого достаточно взять число, которое одновременно меньше $1 - b$ и меньше $b - 1$. Следовательно, вариант 3 тоже не подходит.

2.2.** Пусть b — фиксированное число. Каким из следующих неравенств равносильно неравенство $x - b > \frac{x}{2} + 1$?

1) $\frac{x-b}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ 2) $2(x-b) > x + 2$

3) $\frac{x-b}{2} > \frac{1}{2}$ 4) $-(x-b) > -\frac{9}{2} - 1 - x + b$

Указание. Заданное неравенство преобразуется к виду $x > 2b + 2$. Применяя правила равносильного преобразования неравенств, легко получаются варианты 1 и 2. Так как решениями неравенства из варианта 4 являются все числа, то этот вариант не подходит. В варианте 3 неравенство преобразуется к виду $x > b + 1$, а это неравенство не равносильно заданному. Следовательно, вариант 3 тоже не подходит.

2.3. Какие из перечисленных неравенств не равносильны неравенству $x > -\frac{1}{3}$?

1) $2x > -\frac{1}{6}$ 2) $3x > 1$ 3) $3x > -1$ 4) $2x + 12 > 1 + x$

Указание. Применяя правила равносильного преобразования неравенств, легко получается вариант 3. В каждом из остальных вариантах нетрудно подобрать значение x, которое не будет одновременно решением обеих неравенств.

§ 3. НЕСТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА

Цель параграфа — ввести понятия нестрогих числовых неравенств, выработать навыки решения нестрогих неравенств с одним неизвестным

Особенности параграфа. Каждое нестрогое неравенство $a \geq b$ и $a \leq b$ объединяет в себе две возможности: либо равенство сравниваемых чисел, либо их сравнение как двух различных чисел с соответствующим знаком строгого неравенства. На начальном этапе изучения это может создавать определенные проблемы, так как запись вида $5 \leq 5$ учащимся может показаться странной и ненужной. Тем не менее в некоторых практических задачах приходится искать оптимальные (наибольшее или наименьшее) значения переменных величин, что, по существу, приводит к необходимости использования нестрогих неравенств.

Основное содержание параграфа относится к постановке задач на решение нестрогих неравенств и изучению правил решения нестрогих линейных неравенств. Если учащиеся хорошо разобрались с решением строгих неравенств, то особых проблем в решении нестрогих неравенств возникать не должно.

Примеры доказательства правил равносильных преобразований нестрогих неравенств рассматриваются на третьем уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: строгие неравенства; строгие линейные неравенства; равносильность неравенств; правила преобразования строгих неравенств, сохраняющие равносильность.

Новые математические понятия и свойства: неравенство «больше или равно»; неравенство «меньше или равно»; неотрицательное число; неположительное число; нестрогое линейное неравенство с одной переменной (с одним неизвестным); решение, множество решений нестрогого неравенства; равносильность нестрогих неравенств; правила преобразования нестрогих неравенств, сохраняющие равносильность.

Вспомогательные понятия: свойство деления обеих частей неравенства на одно и то же ненулевое число.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Когда неравенства $a \geq b$ и $b \geq a$ выполняются одновременно?

Ответ. Когда оба числа a и b равны нулю.

3.2. Какие решения имеет нестрогое неравенство $x^2 \geq 0$?

Ответ. Решениями являются все числа.

3.3. Какие решения имеет нестрогое неравенство $x^2 \leq 0$?

Ответ. Решением является только число нуль.

3.4. Как показать, что неравенства $A(x) \geq B(x)$ и $-A(x) \leq -B(x)$ равносильны?

Вариант ответа. Прибавив к обеим частям неравенства $A(x) \geq B(x)$ выражение $-A(x) -B(x)$, получим равносильное неравенство $-B(x) \geq -A(x)$, которое равносильно неравенству $-A(x) \leq -B(x)$.

3.5.** Как доказать, что если r — отрицательное число, то неравенство $A(x) \leq B(x)$ равносильно неравенству $r \cdot A(x) \geq r \cdot B(x)$?

Вариант ответа. Пусть a — корень неравенства $A(x) \leq B(x)$, то есть $A(a) \leq B(a)$. Умножая обе части на отрицательное число r, получаем $r \cdot A(a) \geq r \cdot B(a)$, то есть число a является корнем неравенства $r \cdot A(x) \geq r \cdot B(x)$. Обратно, пусть b — корень неравенства $r \cdot A(x) \geq r \cdot B(x)$, то есть $r \cdot A(b) \geq r \cdot B(b)$. Умножая обе части на отрицательное число $\frac{1}{r}$, получаем $A(b) \leq B(b)$, то есть число b является корнем неравенства $A(x) \leq B(x)$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.* Докажите, что при любых значениях переменных выполняются неравенства.

а) $(x-6)^2 \geq 0$ б) $(x+1)^2 > -1$

в) $a^2 + 4a + 2 > a(a+4)$ г) $y(y+3) > 3y - 2$

д) $(x+2)(x+3) > (x+1)(x+4)$

Указание. а) Квадрат любого числа неотрицателен; б) неотрицательное число всегда больше -1; в) неравенство равносильно неравенству $2 > 0$; г) неравенство равносильно неравенству $y^2 > -2$; д) неравенство равносильно неравенству $6 > 4$.

9.** Докажите, что если $a > 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$. В каком случае достигается равенство?

Указание. Преобразовать неравенство к виду $\dfrac{(a-1)^2}{a} \geq 0$.

10.** Докажите, что $4x + \dfrac{1}{x} \geq 4$ при $x > 0$, но $4x + \dfrac{1}{x} \leq -4$ при $x < 0$.

Указание. Преобразовать выражение $4x + \dfrac{1}{x} - 4$ к виду $\dfrac{(2x-1)^2}{x}$ и выражение $4x + \dfrac{1}{x} + 4$ к виду $\dfrac{(2x+1)^2}{x}$.

11.** Пусть a — фиксированное число. Решите неравенство от неизвестного x.

а) $x + 3a \geq a$ б) $6x - a \leq 4a$ в) $5x + a^2 \geq 2a - x - 1$

Указание. Данная задача — пример задачи с параметрами, и нужно осознать смысл поставленной задачи. Преобразования, приводящие к ответам, совсем несложные.

17. Решите неравенство: г)*$(x-1)(x-1)(x-3) \geq 0$.

Указание. В случае, когда значение x равно 1, подстановкой проверяется, что это число является корнем неравенства. При $x \neq 1$ можно выполнить преобразование деления обеих частей неравенства на положительное выражение $(x-1)^2$ (умножение на положительное выражение $\dfrac{1}{(x-1)^2}$) и получить равносильное неравенство $x - 3 \geq 0$ (для $x \neq 1$). В результате получаем, что множество решений состоит из числа 1 и всех чисел, больших или равных 3.

18.** Решите неравенство: а) $|4x-1| \geq 7$; б) $|4x-1| \leq 7$.

Указание. Если обозначить $4x - 1$ через z, то в случае а получится неравенство $|z| \geq 7$. Далее нужно рассматривать два случая.

I. При $z \geq 0$ неравенство принимает вид $z \geq 7$. Так как все эти z неотрицательны, то они и являются частью решений неравенства $|z| \geq 7$.

II. При $z \leq 0$ неравенство принимает вид $-z \leq 7$, откуда $z \leq -7$. Так как все эти z отрицательны, то они являются другой частью решений неравенства $|z| \geq 7$.

После того как значения z получены, для нахождения решений неравенства $|4x - 1| \geq 7$ надо решить два неравенства — $4x - 1 \geq 7$ и $4x - 1 \leq 7$ и все получающиеся числа включить в ответ.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Пусть $a < b$, $b < c$. Какие из приведенных неравенств выполняются всегда?

1) $a + b < 2c$ 2) $a + c > b$ 3) $-c < -a$ 4) $2b \leq a + c$

Указание. К приведенным в условии неравенствам по свойству транзитивности можно добавить неравенство $a < c$. Это позволяет определить, что варианты 1 и 3 подходят. Для вариантов 2 и 4 можно подобрать примеры, когда условие выполняется, а указанные в вариантах неравенства не выполняются. Например, для варианта 2 можно взять числа $a = -5$, $b = -3$, $c = -1$, для варианта 4 можно взять числа $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

2.2.** Какие из неравенств всегда равносильны неравенству $A(x) \geq B(x) + 1$?

1) $2 - A(x) \leq 1 - B(x)$ 2) $A(x) - 1 \geq B(x) - 2$

3) $2A(x) + 1 \geq 2B(x) + 3$ 4) $1 - A(x) \geq 2 - B(x)$

Указание. В вариантах 1, 3 и 4 находятся преобразования, приводящие к неравенству, заданному в условии. Неравенство из варианта 2 преобразуется к виду $A(x) \geq B(x) - 1$, и после этого нетрудно понять, что оно не равносильно неравенству, заданному в условии.

§ 4. ПРОМЕЖУТКИ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Цель параграфа — изучить представление множества решений числовых неравенств на числовой прямой, ввести понятие промежутка числовой прямой и обозначения для часто встречающихся промежутков.

Особенности параграфа. Можно считать, что в данном параграфе начинается очередная линия в изучении математики, связанная с использованием теоретико-множественной символики. Известно, что для восприятия любой символики требуется привычка. При изучении данного материала следует стремиться к тому, чтобы учащиеся могли свободно переходить от одного алгебраического вида записи множества решений линейного неравенства к другому, от алгебраического вида записи к геометрическому представлению и обратно.

В дополнение к записи множества решений линейного неравенства в виде неограниченного промежутка числовой прямой в порядке ознакомления рассматриваются и другие виды промежутков.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства числовых неравенств; решение линейных неравенств; модуль числа.

Новые математические понятия и свойства: множество чисел; открытый числовой луч; числовой промежуток; символика для обозначения числовых промежутков.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Как иначе можно назвать множество всех целых положительных чисел?

Ответ. Множеством всех натуральных чисел.

4.2. Как на числовой оси расположен открытый числовой луч $(-\infty; 10)$?

Ответ. Это — множество всех чисел, которые лежат слева от числа 10, при условии, что числовая ось направлена вправо.

4.3. Как на числовой прямой расположен замкнутый числовой луч $(-\infty; 10^6]$?

Ответ. На числовой прямой это множество точек с координатами, меньшими или равными 10^6.

4.4. Какой замкнутый числовой луч является множеством решений неравенства $-2x \le -8$?

Ответ. Умножим обе части неравенства на (-1), получаем неравенство $2x \ge 8$, делим обе части на положительное число 2 и получаем $x \ge 4$. Этот результат можно записать в виде $[4; \infty)$.

4.5. Чем отличается промежуток $(-2; \infty)$ от промежутка $[-2; \infty)$?

Ответ. Только тем, что промежуток $[-2; \infty)$ содержит число 2, а промежуток $(-2; \infty)$ не содержит число 2.

4.6. Для какого линейного неравенства множество решений совпадает с промежутком $(-\infty; \infty)$?

Ответ. Например, для неравенства $0 \cdot x + 2 \geq -5$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3.** Решите неравенство.

а) $|x| > x$ б) $|x| \geq x$ в) $|x| \leq -x$

г) $|x - 1| + 1 \leq x$ д) $|x + 2| \geq |x - 2|$

Указание. Для каждого из модулей по очереди надо рассмотреть два случая: 1) под модулем неотрицательное значение; 2) под модулем отрицательное значение. Например, неравенство $|x - 1| + 1 \leq x$ можно решить так.

1. Пусть $x - 1 \geq 0$ или $x \geq 1$. Тогда неравенство примет вид $x - 1 + 1 \leq x$. Его решениями являются все x. Выбирая из них все $x \geq 1$, получаем первую часть ответов: $x \geq 1$.

2. Пусть $x - 1 < 0$ или $x < 1$. Тогда неравенство примет вид $1 - x + 1 \leq x$. Его решениями являются $x \geq 1$. Выбирая из них $x < 1$, получаем пустое множество.

Окончательный ответ: $x \geq 1$. Ответ можно записать также в виде $[1; \infty)$.

5.** Найдите общие точки промежутков.

а) $(-\infty; a]$ и $(-\infty; 2a]$ в зависимости от a

б) $(-\infty; a]$ и $(-\infty; a^2]$ в зависимости от a

Указание. а) Рассмотреть случаи $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$, в каждом из них представить указанные промежутки на числовой прямой и получить следующий ответ: промежуток $(-\infty; a]$ при $a \geq 0$ и промежуток $(-\infty; 2a]$ при $a \geq 0$; б) рассмотреть случаи $a \leq 0$, $0 < a < 1$, $a \geq 1$, в каждом из них представить указанные промежутки на числовой прямой и получить следующий ответ: промежуток $(-\infty; a]$ при $a \leq 0$, промежуток $(-\infty; a^2]$ при $0 < a < 1$ и промежуток $(-\infty; a]$ при $a \geq 1$.

6.* Решите неравенство: а) $mx \leq n$ при $m = 0$, $n = 0$; б) $px < q$ при $p = 0$, $q = 0$.

Указание. В случае а при подстановке указанных значений m и n приходим к записи $0 \cdot x \leq 0$, что верно при всех x; в случае б при подстановке указанных значений p и q приходим к записи $0 \cdot x < 0$, что неверно при всех x.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Для каких из перечисленных неравенств любое число является решением?

1) $3x + 1 \le 3x + 2$ 2) $5x - 1 \le 5x - 2$

3) $0 \cdot x \le 0 \cdot x$ 4) $2x + 1 < 3x - 1$

Указание. Каждое из неравенств можно приводить к равносильному неравенству вида $ax > b$. Среди неравенств такого вида множеством решений является множество всех чисел (пока дробных) только тогда, когда неравенство будет иметь вид $0 \cdot x > m$, где m — отрицательное число.

2.3. Решения каких из указанных неравенств входят в промежуток $(-\infty; -5)$?

1) $2x + 3 < 4x - 9$ 2) $3x + 2 < 4x - 9$

3) $2 - 5x < -(3 + 6x)$ 4) $3x < -15$

Указание. Прежде всего можно отбросить варианты 1 и 2, так как они приводятся к неравенству вида $x > b$. Оба оставшихся неравенства равносильны неравенству $x < -5$.

§ 5. ПОЧЛЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

Цель параграфа — рассмотреть правила почленного сложения и умножения неравенств.

Особенности параграфа. В отличие от предыдущего содержания данной главы, в этом параграфе рассматриваются некоторые способы получения верных неравенств исходя из других верных неравенств. Основой для вывода неравенств является свойство транзитивности, которое нужно вспомнить с учащимися. В частности, для сравнения «больше» свойство транзитивности имеет следующий вид: «если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$». Для получения нужных правил вводится понятие неравенств одного направления (одного знака; одного смысла). С учетом этого формулируется и доказывается правило сложения неравенств одного направления. Важным частным случаем этого правила является следующее свойство: сумма положительных выражений положительна.

Умножение неравенств одного направления рассматривается на втором уровне, так как условия применимости соответствующего правила достаточно сложные: записанные в частях неравенств выражения должны быть положительными. Важным частным случаем этого правила являются следующие свойства: произведение положительных выражений положительно; квадрат ненулевого числа положителен.

Применение изучаемых в параграфе правил чаще всего используется при решении задач на доказательство неравенств общего вида. Похожие задачи непростые, однако систематически встречаются на олимпиадах по математике разного ранга.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: неравенства с переменными; свойство транзитивности для числовых неравенств; правило прибавления числа к обеим частям неравенства; правило умножения частей неравенства на положительное число; правило умножения частей неравенства на отрицательное число.

Новые математические понятия и свойства: неравенства одного направления (одного смысла); неравенства противоположного направления (противоположного смысла); свойство сложения частей неравенств одного смысла; свойство умножения частей неравенств одного смысла.

Вспомогательные понятия: неявное использование математической индукции при обосновании некоторых утверждений.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Что может получиться при возведении в квадрат обеих частей числового неравенства?

Ответ. Может получиться верное неравенство: например, $1 < 2$ и $1^2 < 2^2$. Но может получиться и неверное неравенство: например, $-2 < -1$ — верно, но $(-2)^2 = 4 < (-1)^2 = 1$ — неверно.

5.2. Как доказать, что если $a \geq b$ и $b > c$, то $a > c$?

Ответ. При $a > b$ это получается по свойству транзитивности неравенств. Если же $a = b$, то из $b > c$ сразу получаем $a > c$.

5.3. Как доказать, что из неравенства $(a - b)^2 \geq 0$ следует неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$?

Ответ. Раскрывая скобки, получаем $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, откуда $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. Прибавляя к обеим частям неравенства число $2ab$, получаем: $a^2 + b^2 - 2ab + 2ab \geq 2ab$ или $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

5.4.* Как доказать, что если $a > b \geq 0$, то $a^n > b^n$ при любом натуральном n?

Ответ. Если $a > b \geq 0$, то неравенство $a > b$ можно умножить на себя, получаем $a^2 > b^2 \geq 0$. Умножая это неравенство на $a > b \geq 0$, получаем $a^3 > b^3 \geq 0$. Умножая это неравенство на

$a > b \geq 0$, получаем $a^4 > b^4 \geq 0$ и т. д. Получив, например, неравенство $a^{49} > b^{49} \geq 0$, умножим его на $a > b \geq 0$, и получаем $a^{50} > b^{50} \geq 0$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.** Докажите, что:

а) если $a > 1$, то $a > \dfrac{1}{a}$ б) если $-1 < a < 0$, то $a > \dfrac{1}{a}$

в) если $0 < a < 1$, то $a < \dfrac{1}{a}$ г) если $a < -1$, то $a < \dfrac{1}{a}$

Указание. а) Из доказанного в пункте неравенства $a^2 > 1$ делением на положительное выражение a получаем нужное неравенство; б) показать, что в этом случае $a^2 < 1$ и делением на отрицательное выражение a получить нужное неравенство; в) показать, что в этом случае $a^2 < 1$ и делением на положительное выражение a получить нужное неравенство; г) показать, что в этом случае $a^2 > 1$ и делением на отрицательное выражение a получить нужное неравенство.

5.** Докажите, что если $a < b < 0$, то:

а) $a^2 > b^2$ б) $a^3 < b^3$ в) $a^4 > b^4$

Указание. Из условия получаем, что $|a| > |b|$, откуда $|a|^n > |b|^n$ при любом натуральном n.

7.** Докажите, что если $a > b$, $b > 0$ и $ab = 1$, то $a + b \geq 2$.

Указание. Сводится к неравенству $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ при положительных a.

8.** Пусть $a > b > 0$. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$;   б) $\dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{b^2}$;   в) $\dfrac{1}{a^n} < \dfrac{1}{b^n}$, где n — натуральное число.

Указание. а) Разделить обе части заданного неравенства на положительное выражение a^2b^2; б) разделить обе части заданного неравенства на положительное выражение a^3b^3; в) разделить обе части заданного неравенства на положительное выражение $a^{n+1}b^{n+1}$.

11.** Докажите, что если $a + b = 1$, то $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$. В каком случае в неравенстве достигается равенство?

Указание. Имеем: $(a - b)^2 \geq 0$. Отсюда следует, что $a^2 + b^2 \geq$ $\geq 2ab$. Прибавив к обеим частям последнего неравенства сумму $a^2 + b^2$, получим $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 = 1$, откуда $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

12.** Докажите, что для любых положительных чисел a и b верно неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Указание. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Пусть $a + b > c + d$ и $e + f < g + h$. Какое из следующих неравенств можно получить, применяя правило почленного сложения неравенств одинакового направления?

1) $b + g + h + a > c + d + e$

2) $f + d + e + c < h + g + b + a$

3) $(a + b)(e + f) > (c + d)(g + h)$

4) $2(a + b) > c + d + e + f$

Указание. При сложении частей неравенств $c + d < a + b$ и $e + f < g + h$ получается неравенство из варианта 2. Остальные варианты не подходят.

2.2.** Множество решений каких из перечисленных неравенств одновременно содержит множество решений неравенства $2x > x + 5$ и множество решений неравенства $3x < x + 7$?

1) $5x < 2x + 12$ 2) $3x + 7 > 4x + 5$

3) $5x + 10 < 5x + 7$ 4) $(x + 6)(2 + x) < (x + 4)^2$

Указание. Решением неравенства $2x > x + 5$ является промежуток $(5;\ \infty)$, решением неравенства $3x < x + 7$ является промежуток $(-\infty;\ 3{,}5)$. Отсюда следует, что из приведенных неравенств, которые линейные или приводятся к линейному, нужно найти такие, у которых множеством решений является промежуток $(-\infty;\ \infty)$.

2.3.** Для каких из перечисленных неравенств любое его решение a удовлетворяет неравенству $|a| > 2$?

1) $x^2 > 4$ 2) $3 > 2x - 5$

3) $2x^2 + 1 \geq x^2 + 5$ 4) $x^2 + 6 > 22$

Указание. Варианты 1 и 3 подходят, потому что оба неравенства равносильны неравенству $|x| > 2$; вариант 2 не подходит, потому что, например, число 0 является решением, но не удовлетворяет условию задания; вариант 4 подходит, потому что равносильно неравенству $|x| > 4$, откуда следует, что модули всех его решений больше 2.

2.4. Какие из приведенных утверждений не выполняются при некоторых значениях чисел a, b и c?

1) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac < bc$

2) если $a > b$, то $-2b < -2a$

3) если $a > b$ и $b > 0$, то $ab < b^2$

4) если $a > b$, то $a^2 > b^2$

Указание. Верное утверждение только в варианте 2; в варианте 1 должно следовать противоположное неравенство; в варианте 3 также должно следовать противоположное неравенство; в варианте 4 можно привести примеры, когда утверждение не выполняется, например $5 > -7$, но $5^2 < (-7)^2$.

Глава 8
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Цель главы — изучить основные свойства и признаки параллелограмма, вывести формулу площади параллелограмма и в качестве приложения изучаемых свойств рассмотреть еще один вид перемещений плоскости — центральную симметрию.

Особенности главы. В главе изучение параллелограмма и его свойств основывается на применении следствий из аксиомы параллельности. По этим причинам неоднократно происходит обращение ко многим ранее встречавшимся геометрическим фигурам, таким, как прямоугольник, ромб, квадрат, и указывается на возможность получения многих свойств этих фигур исходя из общего определения параллелограмма.

§ 1. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА

Цель параграфа — рассмотреть основные свойства параллелограмма и научиться применять их при решении задач.

Особенности параграфа. В геометрии параллелограмм является одной из самых интересных фигур, которая имеет много особых свойств. В соответствии с этим целесообразно из всех свойств выделить наиболее важные. К ним можно отнести то, что диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника, а также то, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. При желании учащимся можно пояснить, что с помощью этих свойств вывод других свойств чаще всего представляет из себя несложные упражнения.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: признаки равенства треугольников; свойства углов, образованных секущей с двумя параллельными прямыми; признаки параллельности прямых.

Новые математические понятия и свойства: параллелограмм; свойство диагонали параллелограмма; свойство точки пересечения диагоналей параллелограмма; свойство противоположных углов параллелограмма; свойство соседних углов параллелограмма; свойство противоположных сторон.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как из свойств клетчатой бумаги получить, что $\angle MBA = \angle BAD$ (рис. 1)?

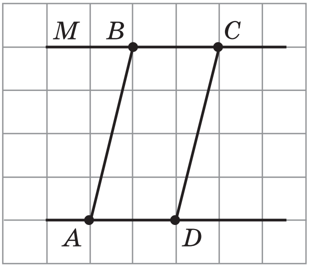


Рис. 1

Вариант ответа. Если провести перпендикуляр AM к прямой BC и перпендикуляр CN к прямой AD, то образуются равные прямоугольные треугольники AMB и CND. Из равенства этих треугольников следует равенство указанных углов.

1.2. Какой треугольник называется равнобедренным?

Ответ. Равнобедренным называется треугольник с двумя равными сторонами.

1.3. Какие свойства диагоналей прямоугольника вы знаете? *Вариант ответа.* Диагонали прямоугольника равны.

1.4. Какие свойства диагоналей ромба вы знаете?

Вариант ответа. Диагонали ромба перпендикулярны.

1.5. Как доказанное свойство позволяет найти сумму всех углов параллелограмма?

Ответ. Так как сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°, то сумма всех его углов в два раза больше, то есть равна 360°.

1.6. Как можно определить квадрат, пользуясь определением прямоугольника?

Вариант ответа. Квадрат — это прямоугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями.

1.7. Как можно определить квадрат, пользуясь определением ромба?

Вариант ответа. Квадрат — это ромб с равными диагоналями.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. На двух параллельных прямых a и b выбраны точки A, B, C, D как на рис. 2. Докажите, что прямая, проходящая через середину отрезка AB и параллельная прямой a, пересекает отрезок CD в середине.

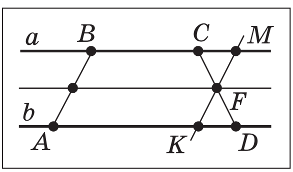


Рис. 2

Указание. Через точку F пересечения прямой, проходящей через середину отрезка AB и параллельной прямой a, и отрезком CD провести параллельно AB прямую, пересекающую прямые a и b в точках M и K соответственно. После этого доказать равенство треугольников CFM и DFK.

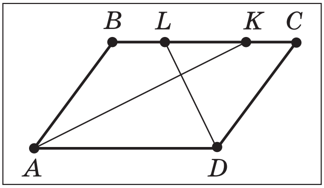


Рис. 3

5. В параллелограмме биссектрисы углов при вершинах пересекаются попарно в четырех различных точках. Вершинами какого четырехугольника являются эти точки?

Указание. При проведении биссектрис четырех внутренних углов параллелограмма получим четыре точки, являющиеся вершинами прямоугольника.

7.** В параллелограмме $ABCD$ на рис. 3 проведены биссектрисы углов A и D. Найдите длину отрезка KL, если известно, что $AB = 78$ мм, $AD = 121$ мм.

Указание. Заметим, что $\angle KAD$, $\angle KAB$ и $\angle BKA$ равны, треугольник ABK равнобедренный, $AB = BK$. Аналогично $CL = CD$.

8.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон не зависит от выбора точки.

Указание. Первый способ. Заданный равнобедренный треугольник ABC с основанием AC симметрично отразить относительно прямой AC, получив ромб $ABCD$. Для произвольной точки диагонали AC ромба рассмотреть перпендикуляры, проведенные к сторонам AB и CD.

Второй способ. Отрезок, соединяющий точку основания с вершиной, делит равнобедренный треугольник на два треугольника. Рассматривая перпендикуляры, проведенные к боковым сторонам как высоты в этих треугольниках, записать сумму площадей и приравнять к площади всего треугольника.

9.** *Указание*. Использовать результат задачи 8.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Сколько пар равных треугольников может оказаться на чертеже параллелограмма с проведенными диагоналями?

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

Указание. Четыре пары равных треугольников можно указать в каждом параллелограмме. В случае, когда параллелограмм является ромбом, число пар равных треугольников становится равным 8. Ответом к тесту являются варианты 2 и 4. Можно заметить, что приведенными вариантами ответов не описывается случай квадрата, когда число пар равных треугольников еще больше.

2.4.** Какие из приведенных утверждений всегда верны?

1) сумма длин диагоналей параллелограмма больше суммы длин любых двух его сторон

2) сумма длин диагоналей параллелограмма меньше суммы длин любых двух его сторон

3) сумма длин диагоналей параллелограмма больше его периметра

4) сумма длин диагоналей параллелограмма меньше его периметра

Указание. При отборе ответов воспользоваться свойством, что каждая сторона параллелограмма меньше полусуммы его диагоналей.

§ 2. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Цель параграфа — сформулировать и доказать признаки параллелограмма, рассмотреть примеры на применение этих признаков.

Особенности параграфа. В очередной раз в тексте учебника появляются математические утверждения, которые называются признаками. Поэтому при изучении данного материала следует еще раз обратить внимание на различие между свойствами и признаками. Для этого желательно, чтобы учащиеся вспомнили некоторые из ранее изученных признаков и на основе этого постарались понять, что каждый признак параллелограмма позволяет по указанным свойствам четырехугольника сделать вывод, что этот четырехугольник — параллелограмм.

На третьем уровне еще раз обращается внимание на полноту логического анализа при доказательстве математических утверждений. В данном параграфе это делается на основе анализа доказательства признака параллелограмма по параллельности и равенству двух противоположных сторон.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: признаки параллельности прямых; определение параллелограмма; свойства параллелограмма.

Новые математические понятия и свойства: признак параллелограмма по свойству точки пересечения диагоналей; признак параллелограмма по параллельности и равенству двух противоположных сторон; признак параллелограмма по равенству пар противоположных сторон.

Вспомогательные понятия и свойства: свойство параллелограммов с общей стороной.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какой признак прямоугольника вы можете предложить?

Вариант ответа. Например: «Если диагонали четырехугольника равны и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — прямоугольник».

2.2. Как на практике проверить параллельность двух отрезков?

Вариант ответа. На большем отрезке отложить меньший и концы полученного отрезка соединить с концами меньшего так, чтобы проведенные отрезки пересекались. После этого измерить части от концов до точки пересечения. Если каждый из построенных отрезков точкой пересечения делится пополам, то данные отрезки параллельны; если хотя бы один из них не делится пополам, то не параллельны.

2.3. Как доказать, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является параллелограммом?

Ответ: На основании признака из данного пункта, так как у этого четырехугольника противоположные стороны попарно равны.

2.4.* Как доказать, что если параллелограммы $ABCD$ и $ABKL$ прямоугольники, то $CDLK$ тоже прямоугольник?

Вариант ответа. Отрезки CD и KL параллельны, так как каждый из них параллелен AB. Отрезки CK и LD также параллельны, потому что каждый из них лежит на прямой, перпендикулярной AB. Кроме этого, CD и DL перпендикулярны.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.** В треугольнике медиана совпадает с биссектрисой, проведенной из той же вершины. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Указание. Продолжив медиану от основания и отложив отрезок, равный медиане, получим параллелограмм. Из условия медиана является биссектрисой, откуда можно получить, что построенный параллелограмм является ромбом.

3. Из точки пересечения диагоналей ромба проводятся перпендикуляры к сторонам. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами прямоугольника.

Указание. Проведенные высоты равны и являются отрезками диагоналей четырехугольника, о котором идет речь в задаче.

4.* На сторонах квадрата $ABCD$ выбраны точки M, N, K, L так, что $AM = BN = CK = DL$. Точки M, N, K и L соединены с вершинами квадрата как на рис. 1. Докажите, что образующийся при этом четырехугольник $PQRS$ — квадрат.

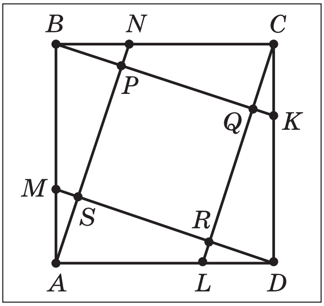


Рис. 1

Указание. Сначала доказать равенство пар треугольников ABP, BCQ и ASM, BPN. Затем рассмотреть стороны и углы этих треугольников, откуда вывести, что $SP = PQ$ и $\angle SPQ = 90°$. Аналогично рассматриваются и другие пары сторон и углы четырехугольника $PQRS$.

7.** Точки M и N — середины сторон AD и AB квадрата $ABCD$, изображенного на рис. 2. Отрезки CM и DN пересекаются в точке P. Докажите, что $BP = BC$.

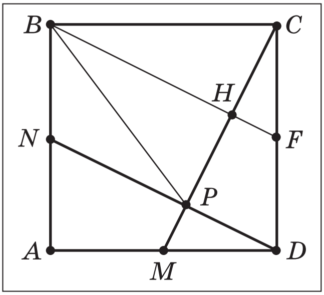


Рис. 2

Указание. Добавим на рис. 3 середину F стороны CD. Далее можно доказать, что отрезки CM и BF перпендикулярны, а отрезки CH и HP равны. Отсюда следует, что ΔPBC равнобедренный.

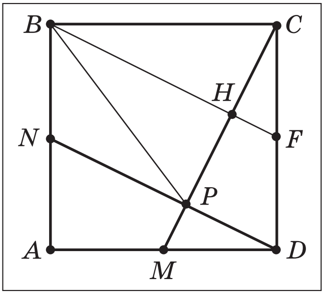


Рис. 3

8. г)** Постройте параллелограмм по стороне, сумме диагоналей и углу между диагоналями.

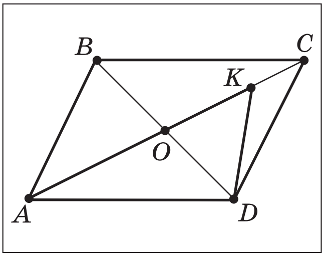


Рис. 4

Указание. Пусть в параллелограмме $ABCD$ сторона AD должна равняться заданному отрезку. Отложим от точки O пересечения диагоналей на большей диагонали AC отрезок OK, равный OD.

Тогда образуется равнобедренный треугольник OKD (рис. 4). По условию угол KOD равен заданному углу. Отсюда следует, что мы можем построить угол OKD или AKD, так как $\angle OKD = 180° - 2\angle KOD$, $\angle OKD = 90° - \frac{1}{2}\angle KOD$. После этого на одной стороне угла от вершины K можно отложить отрезок KA, равный полусумме диагоналей. Далее с центром в точке A проводим окружность с радиусом, равным заданной стороне параллелограмма, находим одну из точек D ее пересечения с лучом KD, а затем строим точку O так, что $KO = KD$.

Напомним, что после описания процедуры построения необходимо доказательство его правильности, а также должно быть исследование всех возможностей, связанных с указанной процедурой построения.

9.* Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Указание. Достроить треугольник до параллелограмма так, чтобы заданная медиана была половиной диагонали этого параллелограмма.

10.* Даны угол и точка M внутри угла (рис. 5). Проведите прямую l так, чтобы она пересекала стороны угла в точках A и B, а точка M являлась серединой отрезка AB.

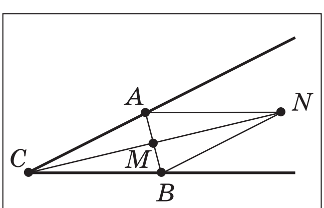


Рис. 5

Указание. На луче CM отложить отрезок MN, равный CM, затем построить параллелограмм $CANB$ (рис. 5). Его диагональ AB делится точкой M пополам.

11.* *Указание.* Смотрите указания к задаче 9.

12.* *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 11.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. В треугольнике ABC медиана AK оказалась равна половине стороны BC. Что можно сказать о таком треугольнике?

1) такого треугольника не существует
2) такой треугольник тупоугольный
3) такой треугольник остроугольный
4) такой треугольник прямоугольный

Указание. Из условия следует, что медиана делит треугольник на два равнобедренных треугольника, у которых сумма углов при вершинах равна 180°. Отсюда можно получить, что сумма углов при основаниях этих треугольников равна 90°, откуда следует, что заданный треугольник прямоугольный.

2.3. Какие свойства из перечисленных могут иметь и некоторый параллелограмм, и некоторый четырехугольник, не являющийся параллелограммом?

1) диагонали равны
2) диагонали перпендикулярны
3) диагонали являются биссектрисами углов
4) диагонали не имеют общих точек

Указание. В вариантах 1 и 2 нетрудно придумать примеры, в которых четырехугольник не является параллелограммом. Условию варианта 3 удовлетворяет только ромб. Для условия из варианта 4 параллелограмм не подходит.

2.4. Какие значения может иметь периметр параллелограмма, у которого одна из сторон равна 12 см, а сумма некоторых трех сторон равна 40 см?

1) 50 см 2) 52 см 3) 54 см 4) 56 см

Указание. Вариант ответа, когда периметр равен 40 + 12 см, находится легко, другой вариант приходится искать из условия, что в заданной сумме трех сторон дважды присутствуют стороны по 12 см, и тогда периметр равен 56 см.

§ 3. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Цель параграфа — изучить формулу площади параллелограмма.

Особенности параграфа. Основное содержание параграфа посвящено выводу формулы площади параллелограмма и ее применениям. При решении задач на вычисление площади параллелограмма важно обратить внимание на тот факт, что сторону, к которой мы собираемся проводить высоту, можно выбирать разными способами. Иногда именно эти соображения могут привести к решению задачи.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: параллелограмм; свойства параллелограмма; признаки параллелограмма.

Новые математические понятия и свойства: формула площади параллелограмма.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Сколько различных высот можно провести из всех вершин параллелограмма?

Ответ. По две высоты из каждой вершины, а всего восемь.

3.2. Как доказать, что значение площади параллелограмма не зависит от того, в каком месте проводить высоту к данному основанию?

Ответ. Все высоты параллелограмма, проведенные к заданному основанию, имеют равные длины, а из формулы площади параллелограмма следует, что ответ будет один и тот же.

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.** Найдите площадь параллелограмма, зная его периметр p и высоты m и n .

Указание. Пусть a, b — стороны параллелограмма, m, n — проведенные к ним соответственные высоты, S — площадь параллелограмма. Тогда $S = am = bn$, $a + b = \frac{p}{2}$. В итоге из первого равенства выражаем b через a, подставляем во второе равенство и приходим к уравнению относительно a и находим, что $S = \frac{pmn}{2(m+n)}$.

8. Докажите, что если любую точку внутри параллелограмма соединить с вершинами, как изображено на рис. 1, то сумма площадей треугольников AMB и CMD равна сумме площадей треугольников AMD и BMC.

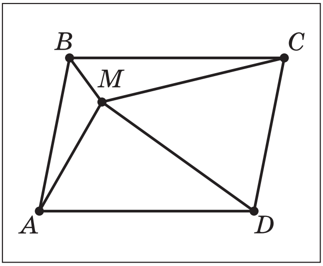


Рис. 1

Указание. Из точки M провести высоты в треугольниках AMD и BMC и через эти высоты записать сумму площадей. Далее остается заметить, что сумма проведенных высот равна высоте параллелограмма.

10.* Через вершину параллелограмма проведите две прямые, которые делят параллелограмм на три части равной площади.

Указание. Разделить каждую из двух соседних сторон на три равные части и провести прямые так, как указано на рис. 2.

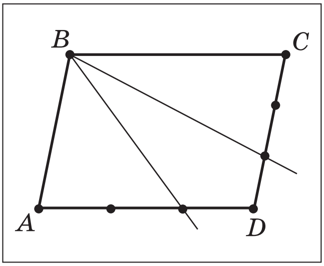


Рис. 2

11.** Проведите через заданную точку прямую, делящую площадь данного параллелограмма пополам.

Указание. Прямая должна пройти через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

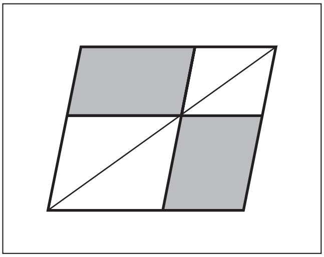


Рис. 3

12.* На диагонали параллелограмма выбрана произвольная точка и через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма, как на рис. 3. Докажите, что площади заштрихованных частей равны.

Указание. Четыре треугольника, не заштрихованные на рис. 3, попарно равны, а поэтому их площади также попарно равны.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Какова максимальная площадь параллелограмма со стороной 6 см и диагональю 10 см?

1) 60 см^2 2) 80 см^2 3) 100 см^2 4) 120 см^2

Указание. Наибольшая площадь получится тогда, когда указанная сторона перпендикулярна указанной диагонали.

2.2. Какую площадь может иметь параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см, у которого одна из высот равна 3 см?

1) 18 см^2 2) 22 см^2 3) 24 см^2 4) 28 см^2

Указание. Тест опасный, потому что высота параллелограмма, проведенная к некоторой стороне параллелограмма, не может быть больше другой стороны. В данном случае указанную высоту можно проводить к любой стороне.

§ 4. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Цель параграфа — ознакомить учащихся с центральной симметрией, пояснить, что центральная симметрия является еще одним видом перемещений плоскости, изучить основные свойства центральной симметрии.

Особенности параграфа. На первом уровне основное внимание следует сосредоточить на понятии симметричности двух точек относительно заданной точки, выработать у учащихся навыки построения точек, симметричных заданным относительно центра симметрии, и на основе практических упражнений добиться естественного восприятия основных свойств центральной симметрии. На втором и третьем уровне следует стремиться к тому, чтобы учащиеся могли достаточно четко формулировать основные свойства центральной симметрии.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Относительно какой прямой симметричен знак Σ?

Ответ. Это прямая, проведенная как на рис. 1.

4.2. Почему на числовой прямой противоположные друг другу числа симметричны относительно нуля?

Ответ. Потому что противоположные числа равноудалены от нуля и, кроме того, расположены на одной прямой, проходящей через нуль.

4.3. В каком случае фигуру можно назвать центрально симметричной?

Вариант ответа. Фигура F называется центрально симметричной, если найдется такая точка O, что фигура F_1, центрально симметричная фигуре F относительно точки O, совпадает с фигурой F.

4.4. Как построить окружность, центрально симметричную данной окружности относительно заданной точки F?

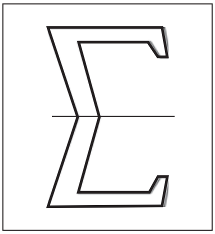


Рис. 1

Ответ. Сначала надо построить точку O_1, симметричную центру O данной окружности относительно точки F, а затем с центром O_1 провести окружность, равную данной.

4.5. Какие свойства центральной симметрии вы знаете?

Ответ. При центральной симметрии каждая фигура F_1 переходит в равную ей фигуру F_2, при этом отрезок, соединяющий любые две точки A_1 и B_1 фигуры F_1 переходит в соответственный отрезок, соединяющий A_2 и B_2 для фигуры F_2, причем $A_1B_1 = A_2B_2$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

4.6. В какую прямую при центральной симметрии переходит прямая, проходящая через центр симметрии?

Ответ. Прямая переходит сама в себя, однако пары симметричных друг другу точек как бы «меняются местами».

4.7.** Какие признаки параллельности прямых вы знаете?

Вариант ответа. Основной признак параллельности прямых связан с аксиомой параллельности и формулируется так: если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны. Другие признаки параллельности прямых относятся к понятию секущей: равенство накрест лежащих углов с секущей, соответственных углов и т. д.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Стороны двух квадратов, имеющих общий центр, пересекаются попарно в восьми точках. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника с вершинами в этих точках попарно равны. На рис. 2 противоположны, например, стороны MN и KL.

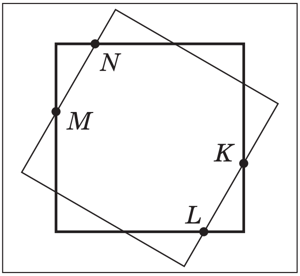


Рис. 2

Указание. Воспользуемся центральной симметрией относительно общего центра квадратов.

4. Докажите, что центрально симметричный многоугольник имеет четное число вершин.

Указание. Прежде всего центр симметрии многоугольника не может быть его вершиной. Действительно, если предположить, что вершина A есть центр симметрии, то из нее должны выходить две стороны, не лежащие на одной прямой, но тогда симметричные этим сторонам отрезки также должны быть сторонами центрально симметричного четырехугольника. Но тогда из вершины A выходит четыре стороны, чего не может быть.

Остается заметить, что вершины центрально симметричного многоугольника можно разбить на пары симметричных друг другу вершин.

5.* Приведите примеры центрально симметричных ломаных с нечетным числом вершин.

Указание. Одна из вершин ломаной должна быть центром симметрии.

6.* Приведите пример фигуры, имеющей бесконечное число центров симметрии.

Указание. Например, прямая.

8.* Даны пересекающиеся прямые a и b и точка F, не лежащая на прямых. Проведите через точку F прямую, пересекающую прямые a и b в точках A и B так, чтобы точка F была серединой отрезка AB.

Указание. Постройте прямую m, симметричную прямой b относительно точки F, точка пересечения прямых m и a — одна из искомых точек A и B.

9.** Даны прямая a, окружность S и точка F, не лежащая на прямых. Найдите на окружности точку A, на прямой точку B так, чтобы точка F была серединой отрезка AB.

Указание. Постройте прямую m, симметричную прямой a относительно точки F.

10.* Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы обе окружности высекали на этой прямой равные хорды.

Указание. Постройте окружность, симметричную второй из заданных окружностей относительно точки пересечения.

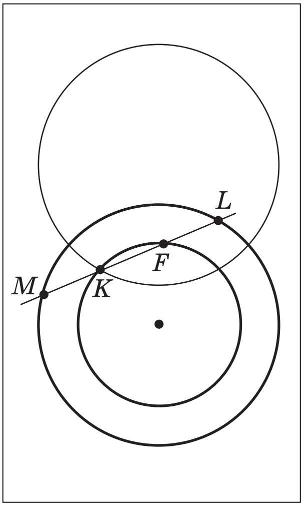


Рис. 3

11.** Даны две концентрические окружности. Проведите прямую так, чтобы при ее пересечении с окружностями образовалось три равных отрезка.

Указание. Выберите на меньшей окружности точку F и постройте окружность, симметричную большей окружности относительно точки F. Точка K пересечения новой окружности с меньшей из данных определяет искомую прямую KF (рис. 3), так как $KF = FL$ и $MK = FL$.

12.** Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то фигура имеет и центр симметрии.

Указание. Центром симметрии является точка пересечения осей симметрии.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Сколько центров симметрии может иметь фигура, составленная из двух отрезков?

1) один 2) два 3) четыре 4) сколько угодно

Указание. Фигура, имеющая более одного центра симметрии, всегда неограниченна.

2.2. Какие из указанных фигур могут иметь центр симметрии?

1) фигура, составленная из двух неравных отрезков

2) фигура, составленная из двух неравных окружностей

3) фигура, составленная из двух непересекающихся отрезков

4) фигура, составленная из окружности с хордой, не являющейся диаметром

Указание. Вариант 1 подходит, так как примером таких отрезков могут служить диагонали параллелограмма, не являющегося прямоугольником. Вариант 2 подходит, так как примером могут служить две окружности с общим центром. Вариант 3 подходит, так как примером могут служить противоположные стороны параллелограмма. Вариант 4 не подходит, так как центр симметрии окружности не совпадает с центром симметрии хорды.

Глава 9

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

Цель главы — рассмотреть свойства параллельных секущих сторон угла, доказать теорему Фалеса и обосновать свойства средних линий треугольника и трапеции.

Особенности главы. В главе закладываются основы для последующего изучения гомотетии и подобия. Основополагающим утверждением является теорема Фалеса о параллельных секущих сторон угла как в классическом случае, когда секущие проводятся через равноотстоящие точки на одной стороне угла, так и в обобщенном виде. При обобщении теоремы Фалеса общий результат формулируется на первом уровне, а его доказательство в случае рациональных отношений отрезков иллюстрируется на примере и рассчитано на второй и третий уровень. Окончательное обобщение теоремы Фалеса не доказывается и принимается фактически на уровне аксиомы. Сделано это в связи с тем, что обобщение теоремы Фалеса предполагает рассмотрение как рациональных, так и и иррациональных отношений отрезков, что на уровне 7 класса делать преждевременно.

§ 1. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — доказать теорему о средней линии треугольника и в качестве одного из следствий рассмотреть свойство точки пересечения медиан треугольника.

Особенности параграфа. В параграфе вводится определение средней линии треугольника и доказываются основные ее свойства. С помощью теоремы о средней линии треугольника доказывается свойство середин сторон четырехугольника и свойство точки пересечения медиан треугольника.

Помимо того, что свойства средней линии сами по себе представляют интерес, они важны также при изучении свойств параллельных секущих сторон угла, а в последующем при изучении гомотетии и подобия.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства параллельных прямых; свойства параллелограмма; признаки параллелограмма.

Новые математические понятия и свойства: средняя линия треугольника; свойства средней линии треугольника.

Вспомогательные понятия и свойства: свойство середин сторон четырехугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как доказать, что $|MK| = 2|NK|$ (рис. 1)?

Ответ. Из равенства треугольников BNM и CKN следует, что $|MN| = |NK|$, а поэтому $|MK| = |MN| + |NK| = 2|NK|$.

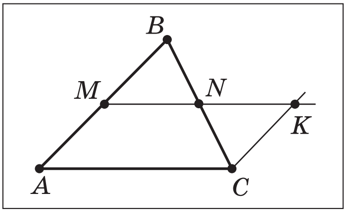


Рис. 1

1.2.** Как доказать, что отрезки AC и BD, изображенные на рис. 2, не пересекаются?

Вариант ответа. Точки C и D, а вместе с ними и отрезки AC и BD лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB.

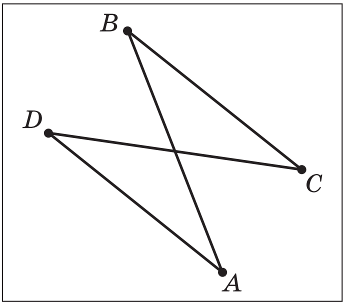


Рис. 2

1.3. Сколько всего средних линий в треугольнике?

Ответ. Три средних линии.

1.4. Чему равна площадь треугольника, образованного средними линиями, если площадь данного треугольника равна S?

Ответ. $\frac{1}{4}S$.

Вариант решения. Средние линии делят треугольник на 4 равных треугольника.

1.5.* Как доказать, что прямые AC, NL и MK на рис. 3 параллельны между собой?

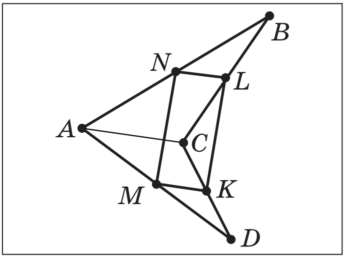


Рис. 3

Ответ. AC — диагональ четырехугольника. Она является стороной треугольников ABC и ADC, в которых NL и MK — соответственно средние линии. Значит, $AC \parallel NL$ и $AC \parallel MK$, откуда $NL \parallel MK$.

1.6. Чему равно расстояние от вершины равностороннего треугольника со стороной 10 см до точки пересечения медиан?

Ответ. Если h — медиана треугольника, то искомое расстояние равно $\frac{2}{3}h$, то есть $\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ (см).

Указания к решению наиболее трудных задач.

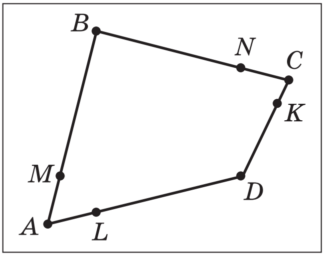


Рис. 4

6.* На рис. 4 точки M, N, K, L расположены на сторонах четырехугольника $ABCD$ так, что $AM : MB = AL : LD = CN : NB = CK : KD = 1 : 3$. Докажите, что $MNKL$ — параллелограмм.

Указание. Если в треугольнике BCD провести среднюю линию EF, параллельную BD, то отрезок NK будет средней линией в треугольнике CEF. Аналогично, если в треугольнике ABD провести среднюю линию GH, параллельную BD, то отрезок ML будет средней линией в треугольнике AGH.

7.* По разные стороны от данной прямой на расстоянии 10 см и 4 см от нее даны две точки A и B. Найдите расстояние от середины отрезка AB до этой прямой.

Указание. Сначала проведите перпендикуляры к прямой из точек A, B и середины отрезка AB, а затем через точку B прямую, параллельную заданной прямой.

12.** Постройте параллелограмм, зная середины трех его сторон.

Указание. Середины всех сторон параллелограмма являются также вершинами параллелограмма.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. В треугольнике медианы равны 8 см, 9 см и 12 см. Какие в нем возможны длины отрезков медиан, отделяемых точкой их пересечения?

1) 2 см 2) 3 см 3) 4 см 4) 8 см

Указание. Возможны длины только $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$ от какой-то из медиан.

2.4.* Две средние линии треугольника имеют длины 8 см и 10 см. Какие из указанных величин могут быть длиной стороны треугольника?

1) 4 см 2) 16 см 3) 28 см 4) 36 см

Указание. Параллельные средним линиям стороны могут иметь только длины 16 см и 20 см. Длина третьей стороны зависит от третьей средней линии. Из неравенства треугольника следует, что третья средняя линия больше 2 см и меньше 18 см.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СЕКУЩИЕ СТОРОН УГЛА

Цель параграфа — изложить основную теорему о пропорциональности отрезков на сторонах угла, полученных при пересечении угла параллельными прямыми (обобщенный вариант теоремы Фалеса).

Особенности параграфа. Полученные к данному моменту свойства параллельности позволяют элементарными средствами последовательно доказать теорему Фалеса в классической формулировке для двух равных отрезков, обобщить на случай нескольких равных отрезков и затем на случай отрезков, отношение которых рационально. В обобщенном виде провести полноценное доказательство без знакомства со свойствами действительных чисел невозможно, поэтому обобщение теоремы Фалеса приводится без доказательства.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства параллелограмма; свойства пропорций; свойства средней линии треугольника.

Новые математические понятия и свойства: параллельные секущие сторон угла; теорема Фалеса для случая двух равных отрезков; теорема Фалеса для случая нескольких равных отрезков; обобщенная теорема Фалеса.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Как на рис. 1 через точки A, B, C провести параллельные между собой прямые, не пересекающие вторую сторону угла?

Вариант ответа. Через каждую названную точку проводим прямую, параллельную другой стороне угла (прямой KM).

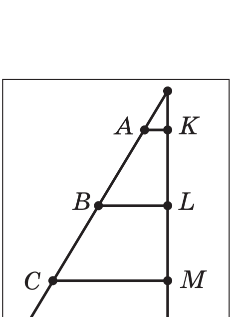


Рис. 1

2.2. Как показать, что для длин отрезков AD, KN, CE, MO на рис. 2 верна пропорция $KN : AD = MO : CE$?

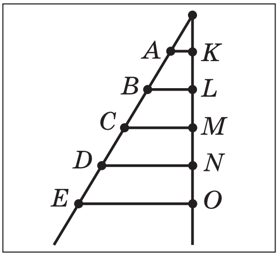


Рис. 2

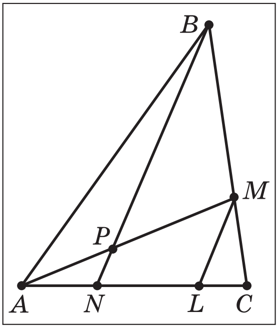


Рис. 3

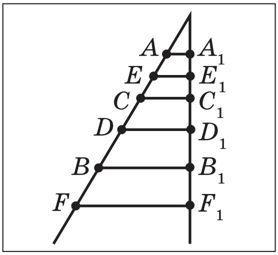


Рис. 4

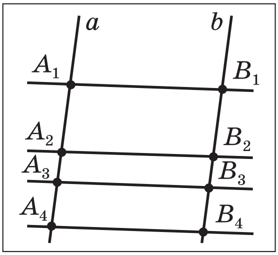


Рис. 5

Ответ. По построению и по теореме из данного пункта имеем $KL : AB = LM : BC = MN : CD = NO : DE$. Отсюда $KN : AD = (KL + LM + MN) : (AB + BC + CD) = (3KL) : (5AB) = KL : AB$. Аналогично $MO : CE = (MN + NO) : (CD + DE) = (2KL) : (2AB) = KL : AB$. Итак, $KN : AD = MO : CE$.

2.3. Как доказать, что в рассматриваемом примере $AP : PM = 3:4$ (рис. 3)?

Ответ. Проведем $ML \parallel BN$. Тогда $NL : LC = BM : MC = 2 : 1$, откуда $NL = \frac{2}{3}NC$. По условию $AN = \frac{1}{3}AC$, $CN = \frac{2}{3}AC$. Следовательно, $NL = \frac{2}{3}NC = \frac{4}{9}AC$, а поэтому $AP : PM = AN : NL = (\frac{1}{3}AC) : (\frac{4}{9}AC) = 3 : 4$.

2.4.* Как доказать, что в условиях теоремы данного пункта отрезки A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 пропорциональны соответственно отрезкам AB, BC, AC?

Ответ. Из того что (см. рис. 4) $A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC$, по свойству пропорций $(A_1B_1 + B_1C_1) : (AB + BC) = A_1B_1 : AB$ или $A_1C_1 : AC = A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC$.

2.5.** Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB. В каком отношении эта прямая делит стороны CA и CB?

Ответ. В отношении 2 : 1, считая от точки C.

2.6.** Как доказать сформулированное утверждение: если прямые a и b пересекаются параллельными секущими так, как на рис. 5, то $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}$?

Ответ. Фигуры $A_1A_2B_2B_1$ $A_2A_3B_3B_2$, $A_3A_4B_4B_3$ — параллелограммы. Поэтому каждое из выписанных отношений равно 1.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. в)** Дан отрезок AB. Постройте на отрезке такую точку C, что $AC : CB = 1 : \sqrt{2}$.

Указание. Сначала построим вспомогательный квадрат и обозначим его сторону через a. Тогда диагональ квадрата имеет длину $a\sqrt{2}$. Затем из точки A проведем вспомогательный луч и на нем с помощью циркуля отложим $AE = a$, $EF = a\sqrt{2}$.

Проведя параллельные прямые FB и EC так, как указано на рис. 6, получим искомую точку C.

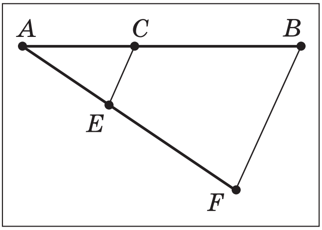


Рис. 6

10.* В треугольнике ABC выбраны точки D на AB, F на AC, G и H на BC так, что $AD : DB = 1 : 3$, $AC : FC = 10 : 7$ и $DH \parallel AC$, $GF \parallel AB$. Отрезки DH и FG пересекаются в точке K. Найдите отношение $DK : KH$.

Указание. Заметим, что $DK : KH = BG : GH$, $BG = \dfrac{3}{10}BC$, $HC = \dfrac{1}{4}BC$, $GH = BC - BG - HC = \left(1 - \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{4}\right)BC = \dfrac{9}{20}BC$. Отсюда $BG : GH = \left(\dfrac{3}{10}BC\right) : \left(\dfrac{9}{20}BC\right) = 2 : 3$.

11.* В треугольнике ABC выбраны точки K и L на стороне AB, M и N на стороне AC так, что $AK : KB = 3 : 1$, $AM : MC = 2 : 1$ и $NK \parallel BM$, $LM \parallel CK$. Отрезки KN и LM пересекаются в точке P. Найдите отношение $KP : PN$.

Указание. Заметим, что $CM = \dfrac{1}{3}AC$, $AM = \dfrac{2}{3}AC$, $MN : NA = BK : KA = 1 : 3$, поэтому $MN = \dfrac{1}{4}AM = \dfrac{1}{6}AC$. В силу параллельности прямых CK и ML имеем $KP : PN = CM : MN = \left(\dfrac{1}{3}AC\right) : \left(\dfrac{1}{6}AC\right) = 2 : 1$.

12.* В треугольнике ABC выбраны точки M на стороне AC и K на стороне AB так, что $AM : MC = 3 : 2$, $AK : KB = 5 : 2$. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Найдите отношение $KP : PC$.

Указание. Через точку K провести прямую, параллельную прямой BM, и рассмотреть точку F ее пересечения с прямой AC. Остается заметить, что $KP : PC = FM : MC$.

13.* В треугольнике ABC выбраны точки K на AC, N на BC, M и L на AB так, что $AM : MB = 2 : 5$, $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$, $KL \parallel BC$. Найдите отношение $AB : ML$.

Указание. $AM : MB = CN : NB = CK : KA = BL : LA = 2 : 5$.

16.** Постройте треугольник, если заданы три отрезка, равные его медианам.

Указание. Пусть m_a, m_b, m_c — заданные медианы. Постройте треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$, дополните его до параллелограмма. Новая диагональ параллелограмма будет одной из сторон треугольника. Восстановите искомый треугольник с медианами m_a, m_b, m_c.

17.* Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к двум остальным сторонам треугольника.

Указание. Пусть a — заданная сторона, m_b, m_c — медианы. Сначала можно построить треугольник со сторонами a, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$. Его вершина, противолежащая стороне a, является точкой пересечения медиан искомого треугольника.

18.* Постройте треугольник по стороне и двум медианам, одна из которых проводится к данной стороне.

Указание. Пусть a и m_a — сторона и проведенная к ней медиана, m_b — вторая заданная медиана. Сначала можно построить треугольник со сторонами $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$. Его вершина, противолежащая стороне $\frac{1}{2}a$, является точкой пересечения медиан искомого треугольника.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

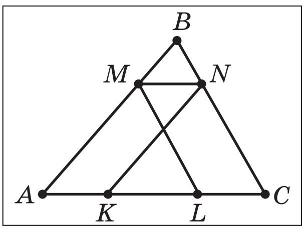


Рис. 7

2.1. В треугольнике ABC проводятся $MN \parallel AC$, $NK \parallel BC$ и $NK \parallel AB$ (рис. 7). Чему равно отношение $KL : AC$, если $AM : MB = 5 : 1$?

1) $2 : 5$ 2) $3 : 5$
3) $2 : 6$ 4) $4 : 6$

Указание. По свойству параллельных секущих получаем $CN : NB = AM : MB = 5 : 1$, $AL : LC = AM : MB = 5 : 1$, $AK : KC = BN : NC = 1 : 5$. Поэтому $AK = \frac{1}{6}AC$, $CL = \frac{1}{6}AC$, $KL = \frac{2}{3}AC$.

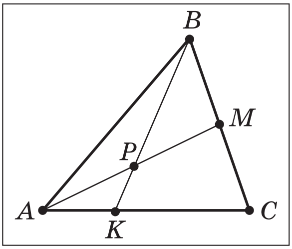


Рис. 8

2.4. В треугольнике ABC со стороной $AC = 12$ см проведена медиана AM, и для заданной точки K на стороне AC находится точка P пересечения отрезков BK и AM (рис. 8). При каких способах выбора точки K длина отрезка MP будет меньше одной трети медианы AM?

1) $AK = 4$ см 2) $AK = 5$ см

3) $AK = 7$ см 4) $AK = 8$ см

Указание. Этот отрезок равен одной трети медианы, когда точка K середина стороны, поэтому MP будет меньше одной трети медианы AM, когда AK больше половины AC.

§ 3. ТРАПЕЦИЯ

Цель параграфа — во множестве выпуклых четырехугольников выделить еще один класс четырехугольников особого вида — трапеции; рассмотреть свойства трапеции и ее средней линии, вывести формулу площади трапеции.

Особенности параграфа. При изучении трапеций традиционно рассматривают свойства средней линии трапеции и формулу площади, чаще всего этим и ограничивая основной теоретический материал. В данном параграфе в дополнение к этому обращается внимание на ряд вспомогательных дополнительных построений, связанных с трапециями, которые могут оказаться полезными при решении задач. Первое из них — деление трапеции на параллелограмм и треугольник, второе — продолжение боковых сторон трапеции до пересечения, в результате чего трапеция в некотором смысле становится частью треугольника.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства параллелограмма; свойства параллельных секущих сторон угла.

Новые математические понятия и свойства: трапеция; равнобедренная трапеция; средняя линия трапеции; формула площади трапеции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как показать, что если прямая пересекает противоположные стороны параллелограмма и не проходит ни через одну из вершин, то она делит параллелограмм либо на две трапеции, либо на два параллелограмма?

Ответ. Если секущая прямая параллельна какой-нибудь стороне параллелограмма, то она разбивает параллелограмм на два четырехугольника с попарно параллельными сторонами, то есть на два параллелограмма.

Если прямая не параллельна сторонам параллелограмма, то она разбивает параллелограмм на два четырехугольника, у каждого из которых две противолежащих стороны параллельны между собой, а две другие — нет. Следовательно, в этом случае обе части — трапеции.

3.2. Как доказать, что для равнобедренного треугольника середины боковых сторон и вершины основания являются вершинами равнобедренной трапеции?

Вариант ответа. Средняя линия треугольника параллельна его основанию. Боковые стороны трапеции равны как половины равных сторон треугольника.

3.3. Как доказать, что если углы при основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная?

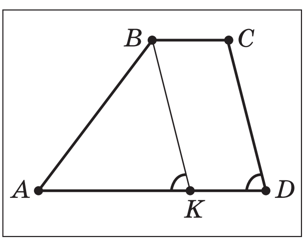


Рис. 1

Вариант ответа. Продолжив боковые стороны до пересечения, получим треугольник, который будет равнобедренным, так как углы при основании равны. Трапецию в этом случае можно получить как часть равнобедренного треугольника, которую отсекает прямая, параллельная основанию.

3.4. Как доказать, что если для одной и той же трапеции провести прямые BK и CL, как указано на рис. 1 и 2, то получающиеся треугольники ABK и LCD равны?

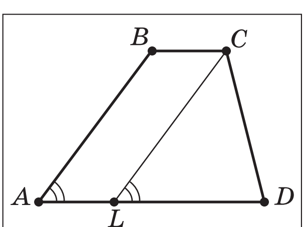


Рис. 2

Вариант ответа. Это можно сделать, используя первый признак равенства треугольников. Действительно, $AB = CL$, так как $ABCL$ —

параллелограмм. Далее, $AK = DL$, потому что $AK = AD - DK = AD - BC = AD - AL = DL$. Наконец, $\angle BAK = \angle CLD$, как внешние односторонние при параллельных прямых.

3.5. Вершинами какого четырехугольника являются концы двух различных высот трапеции?

Ответ. Вершинами прямоугольника.

3.6. Сколько в трапеции можно провести средних линий?

Ответ. Одну.

3.7. Как показать, что площадь трапеции равна произведению высоты трапеции на длину ее средней линии?

Ответ. Доказано, что длина средней линии равна полусумме оснований трапеции. По формуле $S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + b)$ получаем, что $S = h \cdot c$, где $c = \frac{a + b}{2}$ есть длина средней линии.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Докажите, что равнобедренная трапеция симметрична относительно прямой, проходящей через середины оснований.

Указание. Достроить трапецию до равнобедренного треугольника и показать, что высота этого треугольника проходит через середины оснований трапеции.

3.** На рис. 3 точки M и N расположены на боковых сторонах трапеции $ABCD$ так, что $AM : MB = DN : NC$. Докажите, что $MN \parallel AD$.

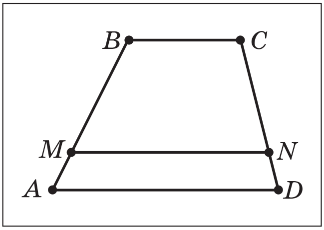


Рис. 3

Указание. Если продолжить боковые стороны трапеции до пересечения, то получим угол, для которого AD и BC — параллельные секущие. Затем сами проведем через точку M прямую, параллельную AD. Пусть эта прямая пересекает сторону CD в точке K. Тогда по основной теореме о параллельных секущих получаем, что $CK : KD = BM : MB$. Но так как $CN : ND = BM : NB$ по условию, то $CK : KD = CN : ND$, откуда вытекает, что прямая MN совпадает с прямой MK.

4.* Докажите, что если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобедренная.

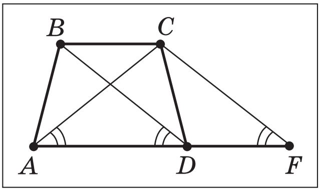


Рис. 4

Указание. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с прямой AD в точке F (рис. 4). В результате получим равнобедренный треугольник ACF, у которого равны углы при основании AF. Отсюда вытекает, что в треугольниках ABD и ACD выполняются условия: $\angle ADB = \angle CAD$, AD — общая сторона, $AC = BD$, и эти треугольники равны по первому признаку равенства.

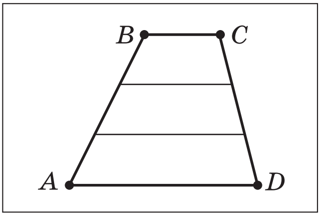


Рис. 5

5.** На рис. 5 боковая сторона трапеции разделена на три равные части и из точек деления проведены отрезки, параллельные основаниям трапеции. Найдите длины этих отрезков, если $AD = 5$ м, $BC = 2$ м.

Указание. Проведенные отрезки являются средними линиями в двух меньших трапециях. Поэтому если через x обозначить длину меньшего, а через y длину большего отрезка, то по формуле длины средней линии получаем два соотношения: $2 + y = 2x$, $5 + x = 2y$, откуда $y = 2x - 2$, $5 + x = 4x - 4$, $x = 3$ (см), $y = 4$ (см).

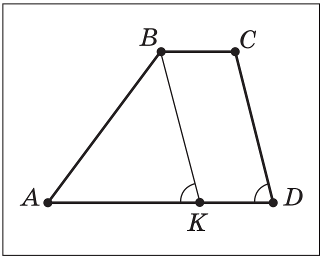


Рис. 6

9.** Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

Указание. Разобьем трапецию на треугольник ABK и параллелограмм $BCDK$, как на рис. 6. Треугольник ABK легко построить по его известным двум сторонам AB и BK, поскольку третья его сторона AK равна разности оснований трапеции.

10.** Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

Указание. Проведем $CF \parallel BD$ как на рис. 4 к задаче 4. Треугольник ACF легко строится по заданным сторонам AC и CF (диагоналям трапеции) и стороне AF, равной сумме оснований трапеции.

11.** Постройте трапецию по основанию, высоте, проведенной к основанию, и диагоналям.

Указание. Опустим высоту CH на основание AD и проведем $CF \parallel BD$ как на рис. 7. Сначала следует построить два прямоугольных треугольника ACH и FCH с известным общим катетом CH и гипотенузами AC и CF (диагоналями трапеции). Затем остается отложить на AF заданный отрезок AD и восстановить точку B.

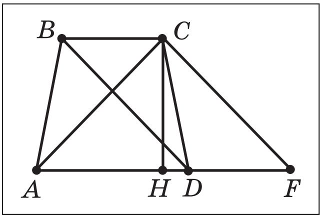


Рис. 7

12.** Постройте трапецию по разности оснований, боковым сторонам и одной диагонали.

Указание. Сначала построить треугольник MNK, у которого две стороны MN и NK равны боковым сторонам трапеции, а третья сторона MK — разности оснований. Затем на прямой MK построить точки F и H так, что отрезки NF и NK равны диагонали трапеции. Далее через полученные точки провести прямые, параллельные MN и NK.

16.* На рис. 8 трапеции $ABCD$ и $FGHE$ имеют общую среднюю линию, а их основания лежат на двух параллельных прямых. Найдите длину средней линии трапеции $AFGD$, если известно, что $AH = 99$ см, $EH = 46$ см, $BC = 21$ см, $BG = 42$ см.

Указание. Заметить, что $AE = BF$ и $CG = DH$.

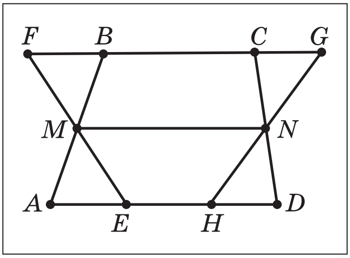


Рис. 8

17.** На рис. 9 в параллелограмме $ABCD$ отрезки EF и GH проходят через точку O пересечения диагоналей параллелограмма, точка I — середина BE, точка K — середина GC и $IJ \parallel EF$, $KL \parallel GH$. Найдите длину отрезка LJ, если известно, что $AD = 110$ мм, $BG = 89$ мм, $AF = 81$ мм.

Указание. Заметить, что $BE = FD$ и $AH = GC$.

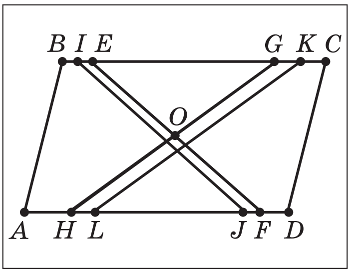


Рис. 9

23.* Основания трапеции равны a и b. В каком отношении делит площадь трапеции ее средняя линия?

Указание. Отношение площадей трапеций равно отношению их средних линий.

24.* Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников ABP и CDP равны.

Указание. Сначала нужно доказать равенство площадей треугольников ABD и ACD, а затем вычесть из их площадей общую часть — площадь треугольника APD.

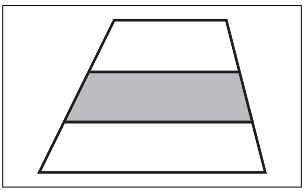


Рис. 10

25.* Прямые, параллельные основаниям трапеции, делят боковую сторону на три равные части. Докажите, что площадь средней заштрихованной на рис. 10 части равна $\frac{1}{3}$ от площади всей трапеции.

Указание. Средняя линия заштрихованной трапеции совпадает со средней линией заданной трапеции, а высота — в три раза меньше.

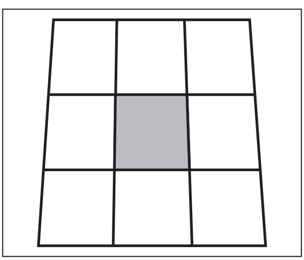


Рис. 11

26.** Каждая сторона трапеции разделена на три равные части и точки деления соединены так, как на рис. 11. Докажите, что площадь центральной заштрихованной части равна $\frac{1}{9}$ от площади всей трапеции.

Указание. Доказать, что каждый из проведенных внутри отрезков делится другими на три равные части.

27.** В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды длиной R и $R\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, основаниями которой являются эти хорды.

Указание. Высота трапеции равна $\frac{R(1+\sqrt{3})}{2}$.

28.** Середина M боковой стороны AB трапеции $ABCD$ соединена с вершинами противоположной боковой стороны (рис. 12). Докажите, что площадь треугольника MCD равна половине площади трапеции.

Указание. Можно сначала вычислить сумму площадей незаштрихованных треугольников.

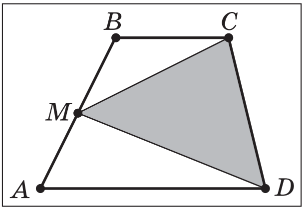


Рис. 12

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. При каких из указанных значений a и m существует трапеция с одним из оснований, равным a, и средней линией, равной m?

1) $a = 3$ см, $m = 7$ см
2) $a = 9$ см, $m = 8$ см
3) $a = 11$ см, $m = 5$ см
4) $a = 2$ см, $m = 3$ см

Указание. Должно выполняться условие $a < 2m$.

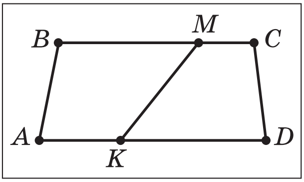


Рис. 13

2.4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ см, $BC = 10$ см на основаниях выбираются точки M и K (рис. 13). В каких из приведенных случаев площадь трапеции $ABMK$ будет больше половины площади трапеции $ABCD$?

1) $AK = 7$ см, $BM = 5$ см
2) $AK = 4$ см, $BM = 6$ см
3) $AK = 8$ см, $BM = 3$ см
4) $AK = 6$ см, $BM = 7$ см

Указание. Величина $(AK + BM)$ должна быть больше половины величины $(AD + BC)$.

Глава 10
ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Цель главы — ознакомить учащихся с понятиями линейной функции и ее графика, рассмотреть способы построения графиков линейных функций; ввести понятие арифметической прогрессии и изучить ее свойства; на примерах ознакомить учащихся с общим понятием функциональной зависимости.

Особенности главы. Можно считать, что с изучения линейной функции начинается систематическое изучение функциональной зависимости в школьном курсе математики. Поэтому с самого начала целесообразно обратить внимание учащихся на то, что линейная функция бесконечному множеству чисел сопоставляет соответственные числа. Часть этого соответствия мы можем представлять в виде таблицы, а цельное восприятие функции дает ее график. Ввиду того что ранее было введено общее понятие графика уравнения с двумя переменными, учащиеся уже подготовлены к восприятию и графика линейной функции.

Параллельно с изучением линейной функции рассматриваются также арифметические прогрессии. Это не случайно, так как формулы, задающие линейную функцию и общий член арифметической прогрессии, имеют одинаковый внешний вид. Тем самым еще раз удается обратить внимание учащихся на единство математики как науки.

На первом и втором уровне изучение материала основано на конкретных примерах с привлечением большого числа графических иллюстраций. Основным результатом является утверждение о том, что график линейной функции есть прямая. Доказательство этого утверждения проводится только на третьем уровне, причем нетрадиционным способом, основанным на применении симметрии относительно прямой.

§ 1. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Цель параграфа — напомнить известные сведения о прямо пропорциональной зависимости, рассмотреть способы построения графиков функций вида $y = kx$.

Особенности параграфа. При изучении параграфа возрастает роль иллюстраций, так как на простейших примерах учащиеся знакомятся с понятием графика функции. Материал и большинство задач рассчитаны на первый уровень. Исключением является доказательство основного утверждения о виде графика прямой пропорциональности, которое рассматривается на третьем уровне. Приводимое доказательство непростое и представляет собой традиционный способ доказательства равенства двух множеств. Так как некоторые аналогичные рассуждения проводились при изучении уравнений и неравенств, то при изучении доказательства утверждения о графике прямо пропорциональной зависимости на эту аналогию целесообразно обратить внимание.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: пропорция; основные свойства пропорции; прямо пропорциональная (пропорциональная) зависимость величин; примеры пропорциональности величин; координатная или числовая плоскость.

Новые математические понятия: график прямо пропорциональной зависимости.

Вспомогательные понятия: понятие функции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие примеры прямо пропорциональных величин вы знаете?

Варианты ответа. Зависимость пройденного пути от времени движения с постоянной скоростью: $S = v \cdot t$, где S — расстояние, v — заданная постоянная скорость, t — время; зависимость массы компоненты в смеси от массы смеси: $P = k \cdot V$, где P — масса компоненты, k — постоянный коэффициент, V — масса смеси.

1.2. На какой прямой лежат точки с координатами $(x;\ kx)$ при $k = 0$?

Вариант ответа. На прямой, совпадающей с осью абсцисс.

1.3.** Какой вид имеет график уравнения $3x = y$?

Ответ. Это прямая. Для ее построения достаточно указать связанные этим равенством координаты одной точки с ненулевой абсциссой, отметить эту точку на координатной плоскости и провести прямую через эту точку и начало координат.

1.4.** Какой вид имеет график уравнения $y = kx$ при $k = 0$?

Ответ. Это прямая, которая является осью абсцисс.

1.5. Как показать, что графики уравнений $y = kx$ и $y = -kx$ симметричны относительно оси Ox?

Ответ. Каждая точка прямой $y = kx$ имеет координаты $(a; ka)$, где a — любое число. При симметричном отображении относительно оси Ox такая точка переходит в точку $(a; -ka)$, то есть в точку прямой $y = -kx$. Обратно, каждая точка прямой $y = -kx$ имеет координаты $(b; -kb)$, где b — любое число. При симметричном отображении относительно оси Ox такая точка переходит в точку $(b; kb)$, то есть в точку прямой $y = kx$.

1.6.** Как показать, что графики уравнений $y = kx^2$ и $y = -kx^2$ симметричны относительно оси Ox?

Ответ. Каждая точка графика уравнений $y = kx^2$ имеет координаты $(a; ka^2)$, где a — любое число. При симметричном отображении относительно оси Ox такая точка переходит в точку $(a; -ka^2)$, то есть в точку прямой $y = -kx^2$. Обратно, каждая точка графика уравнения $y = -kx^2$ имеет координаты $(b; -kb^2)$, где b — любое число. При симметричном отображении относительно оси Ox такая точка переходит в точку $(b; kb^2)$, то есть в точку прямой $y = kx^2$.

Указания по решению наиболее трудных задач.

4. Определите, какие из пар точек лежат на одной прямой, проходящей через начало системы координат в заданиях а — е.

Указание. Первый способ. С учетом того, что пары точек должны быть расположены на одном графике прямо пропорциональной зависимости, по координатам первой из точек можно найти коэффициент пропорциональности, затем по абсциссе второй точки по формуле вычислить ординату и сравнить с той ординатой, которая записана в условии.

Второй способ. Сравнить отношения ординат к соответствующим абсциссам: если отношения будут равными, то указанные точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, а если не будут равными, то не лежат.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Значения переменной y связаны со значениями x прямо пропорциональной зависимостью. Чему равно y при $x = 2$, если при $x = 6$ $y = 2$?

1) 6 2) 3 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{2}{3}$

Указание. Сначала вычисляем отношение 2 : 6, равное $\frac{1}{3}$, и затем находим произведение $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

2.2. Какие три из приведенных 4 точек лежат на одной прямой, проходящей через начало координат?

1) (1,2; 2,8) 2) (1,4; 3,2)

3) (−0,6; −1,4) 4) (−1,5; −3,5)

Указание. Нужно составить отношения ординаты к абсциссе и выбрать три равные между собой.

§ 2. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Цель параграфа — изучить линейные функции, обобщающие понятие прямой пропорциональной зависимости, рассмотреть способы построения графиков линейных функций.

Особенности параграфа. Содержание параграфа начинается с понятия прямолинейной зависимости одной переменной от другой. Термин «прямолинейная зависимость» является достаточно новым, но по своей сути более точно отражает то, что графиком такой зависимости является прямая. Затем этому понятию дается другое, уже знакомое название «линейная функция», без уточнения термина «функция». Изучение линейной функции сопровождается рассмотрением конкретных примеров линейных функций и построением их графиков.

Основное утверждение о графике линейной функции на первом и втором уровне приводится без доказательства. На третьем уровне приводится непростое доказательство, основанное на применении свойств симметрии относительно прямой. Рассмотрение этого способа доказательства становится возможным благодаря тому, что ранее на третьем уровне рассматривались и доказывались формулы координат середины отрезка.

В конце параграфа рассматривается применение графиков линейных функций к нахождению приближенных значений корней некоторых уравнений.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: прямо пропорциональная зависимость переменных величин; график прямо пропорциональной зависимости; примеры линейной зависимости в практических задачах.

Новые математические понятия: линейная функция; график линейной функции; угловой коэффициент линейной функции; свободный член линейной функции.

Вспомогательные понятия: измерение температуры в градусах по Фаренгейту.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какой вид имеет линейная функция при $k = 0$ и $b = -5$?

Ответ. $y = 0 \cdot x - 5$ или $y = -5$.

2.2.* Какой температуре в градусах по Цельсию °C соответствует температура -40°F в градусах по Фаренгейту?

Ответ. Так как $F = 32 + 1{,}8C$, то в данном случае $-40 = 32 + 1{,}8C$, откуда $C = -40°$.

2.3. Какие точки графика линейной функции $y = 3 - 2x$ лежат на координатных осях?

Ответ. Для нахождения точки, лежащей на оси Oy, подставляем в уравнение $x = 0$ и находим $y = 3$. Для нахождения точки, лежащей на оси Ox, составляем уравнение $0 = 3 - 2x$ и находим $x = 1{,}5$. Следовательно, искомые точки $(0; 3)$ и $(1{,}5; 0)$.

2.4. Какой график имеет линейная функция $y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x$?

Ответ. Это прямая, проходящая через точки $A\left(0; \frac{5}{4}\right)$, $B(3;2)$.

2.5. Какой вид имеет линейная функция, график которой проходит через точки $A(-1; -3)$ и $B(2; 0)$?

Ответ. Пусть $y = kx + b$ — линейная функция. Ее график проходит через точку $A(-1; -3)$; поэтому $-3 = -k + b$. График проходит также через точку $B(2; 0)$; поэтому $0 = 2k + b$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -k + b = -3, \\ 2k + b = 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $b = k - 3$, $2k + k - 3 = 0$, $k = 1$, $b = -2$.

2.6. Как доказать, что графики линейных функций $y = 5x - 3$ и $y = 5x + 4$ параллельны?

Ответ. Две прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны. Если бы наши прямые пересекались, то уравнение $5x - 3 = 5x + 4$ имело бы решение, и наоборот. Так как записанное уравнение корней не имеет, то рассматриваемые прямые параллельны.

2.7. Как построить график линейной функции, зная одну точку этого графика и угловой коэффициент?

Ответ. Построим график прямо пропорциональной зависимости с этим данным угловым коэффициентом. Затем через данную точку проведем прямую, параллельную графику прямо пропорциональной зависимости с данным угловым коэффициентом.

2.8.** Какие координаты имеет точка пересечения прямой $y = -kx$ и прямой $y = kx + b$, где b отлично от нуля?

Ответ. Составим уравнение $-kx = kx + b$. Решив его, получим $x_0 = \frac{b}{2k}$. Далее находим $y_0 = -kx_0 = -\frac{b}{2}$. Следовательно, искомая точка имеет координаты $\left(\frac{b}{2k}; -\frac{b}{2}\right)$. Строим график прямо пропорциональной зависимости с этим данным угловым коэффициентом. Затем через данную точку проведем прямую, параллельную графику прямо пропорциональной зависимости с данным угловым коэффициентом.

2.9. Какие решения имеет уравнение $4y - 2x + 3 = 0$?

Ответ. Это уравнение равносильно уравнению $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$. Все решения можно записать в виде пар чисел $\left(a; \frac{a}{2} - \frac{3}{4}\right)$, где a произвольно.

2.10.** При каких значениях переменной x определено значение переменной $y = kx + b$, где k, b — заданные числа?

Ответ. При всех значениях переменной.

2.11. Как можно получить более точные границы снизу и сверху для корня рассматриваемого уравнения?

Ответ. Выбрать больший масштаб. Например, сделать изображение единичного отрезка величиной в 5 клеточек.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.* Для измерения температуры по Кельвину в °K нулевой отметке 0°C на шкале Цельсия ставится в соответствие 273°K, а промежутку температуры в 1°C соответствует 1°K.

а) Запишите формулу для перевода °C в °K.

б) Запишите формулу для перевода °K в °C.

Указание. Из условия следует, что промежутку в t°C соответствует промежуток t°K. Отсюда следует, что температуре T°C соответствует температура $(T + 273)$°K, то есть T°C = $(T + 273)$°K. Из последнего соотношения при замене $T = P - 273$ получаем P°K = $(P - 273)$°C.

11.** Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$ б) $\dfrac{3x-5}{x+6}+\dfrac{11}{4}=0$

в) $\dfrac{4}{2x-3}=\dfrac{6}{x-5}$ г) $\dfrac{7x+2}{8x-3}=\dfrac{16}{13}$

Указание. а) Представив уравнение в виде пропорции, по основному свойству пропорции приходим к уравнению $x-1=$ $=2-x$; б) представив уравнение в виде пропорции, по основному свойству пропорции приходим к уравнению $4(3x-5)=$ $=-11(x+6)$; в) по основному свойству пропорции приходим к уравнению $4(x-5)=6(2x-3)$; г) по основному свойству пропорции приходим к уравнению $13(7x+2)=16(8x-3)$.

12.* При каких значениях параметра a уравнение $a^2x=x$ имеет бесконечное множество решений?

Указание. Если $a^2\neq 1$, то уравнение имеет единственное решение. При $a=1$ и $a=-1$ уравнение записывается в виде $x=x$.

13.** Решите относительно x уравнение.

а) $ax+2=2x+1$ б) $3x+5=2a$ в) $ax=4$

г) $a^2x=4x+2$ д) $ax=a^2x$

Указание. а) Уравнение равносильно уравнению $(2-a)x=1$, при $a\neq 2$ имеет единственный корень, при $a=2$ корней не имеет; б) уравнение равносильно уравнению $a^2-4x=2$, при $a^2\neq 4$ имеет единственный корень, при $a=2$ и $a=-2$ приходим к уравнению $0\cdot x=2$; д) уравнение равносильно уравнению $a(a-1)x=0$, при a, отличном от 0 и 1, имеет единственный корень, при $a=0$ и $a=1$ получается уравнение $0\cdot x=0$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4.* Пусть зависимость y от x задается линейной функцией $y=ax+b$. Чему равно a, если $y(1)=1$ и $y(2)=3$?

1) 1 2) 2 3) 4 4) 8

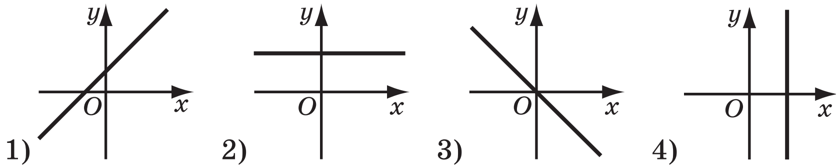
Указание. Из первого условия получается, что $a+b=1$, откуда $b=1-a$, и линейную функцию можно записать как $y=ax+1-a$. После этого из второго условия получается $3=2a+1-a$, откуда $a=2$.

2.2.* Какие 3 из приведенных точек лежат на одной прямой?

1) (1; 2) 2) (2; 4) 3) (3; 3) 4) (7; 5)

Указание. Представить эти точки расположенными на координатной плоскости.

2.4. Какие из приведенных рисунков являются графиками линейной зависимости y от x?



Указание. Не подходит только последний вариант, так как по рисунку можно установить, что одному значению x соответствует либо ни одного значения, либо бесконечно много значений y, а такая зависимость функцией не является.

§ 3. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Цель параграфа — дать определение и изучить свойства арифметической прогрессии; установить связь между арифметической прогрессией и соответствующей линейной функцией.

Особенности параграфа. Традиционно арифметическая прогрессия воспринимается учениками с большим трудом. Чтобы облегчить это восприятие, в параграфе проводится сопоставление арифметических прогрессий с линейными функциями. В результате на основе графического представления членов арифметической прогрессии довольно просто объяснить и формулу общего члена, и сумму первых n членов арифметической прогрессии.

Основной материал параграфа рассчитан на первый уровень. Ко второму уровню отнесено доказательство формулы общего члена арифметической прогрессии.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: линейная функция; график линейной функции; свойства линейной функции; примеры числовых последовательностей.

Новые математические понятия и свойства: последовательность чисел; арифметическая прогрессия; первый член арифметической прогрессии; разность арифметической прогрессии; формула общего члена арифметической прогрессии; сумма первых n членов арифметической прогрессии.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Какая арифметическая прогрессия получится, если рассмотреть последовательность значений функции $y = x - 5$ при натуральных значениях x?

Ответ. $a_1 = -4,\ a_2 = -3,\ a_3 = -2, \ldots$

3.2. Как доказать, что последовательность, n-й член которой вычисляется по формуле $a_n = (n + 1)^2 - n^2$, является арифметической прогрессией?

Ответ. Имеем: $a_{n+1} = (n + 2)^2 - (n + 1)^2$. Вычислим разность соседних членов:

$$a_{n+1} - a_n = (n + 2)^2 - (n + 1)^2 - (n + 1)^2 + n^2 =$$

$$= n^2 + 4n + 4 - 2n^2 - 4n - 2 + n^2 = 2.$$

Результат не зависит от n. Значит, последовательность с n-м членом a_n является арифметической прогрессией, разность которой равна 2.

3.3. Как доказать, что члены арифметической прогрессии $-3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ можно получить как значения некоторой линейной функции $y = kx + b$, последовательно вычисленные для натуральных значений переменной x?

Ответ. Имеем:

$$\begin{cases} -3 = k \cdot 1 + b, \\ 1 = k \cdot 2 + b. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $4 = k$, $b = -7$. Функция $y = 4x - 7$ принимает значения: $y(1) = -3$, $y(2) = 1$, $y(3) = 5$ и т. д.

3.4. Чему равна сумма первых $n - 1$ натуральных чисел?

Ответ. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

3.5. Как показать, что для любого натурального числа n сумма первых n нечетных чисел равна n^2?

Ответ. Аналогично тому, как это сделано в пункте: воспользоваться формулой суммы членов арифметической прогрессии.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. г)* Найдите сумму всех последовательных натуральных чисел, начиная с m до n включительно, где $m < n$.

Указание. По формуле из п. 3.5

$1 + \ldots + (m - 1) + m + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Отсюда $m + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{(m-1)m}{2} = \dfrac{(n+m)(n-m)+(n+m)}{2}$.

Следовательно, $m + \ldots + n = \dfrac{1}{2}(n + m)(n - m + 1)$.

7.** Докажите, что если S_m, S_n, S_{m+n} — суммы соответственно m, n и $m + n$ начальных элементов одной арифметической прогрессии, то $(m + n)(S_m - S_n) = (m - n)S_{m+n}$.

Указание. Достаточно воспользоваться формулой для вычисления суммы начальных членов арифметической прогрессии и показать, что $S_{m+n} = (m + n)\left[a_1 + \dfrac{m+n-1}{2}d\right]$ и $S_m - S_n = (m - n)\left[a_1 + \dfrac{m+n-1}{2}d\right]$.

8.* Известно, что сумма всех нечетных натуральных чисел меньших ста равна 50^2. Как можно найти:

а) сумму всех четных чисел, меньших чем 101

б)* сумму всех натуральных чисел, меньших чем 101

в)** сумму всех натуральных чисел, меньших чем 51?

Указание. а) Эта сумма на 50 больше, чем 50^2; б) эта сумма равна сумме всех нечетных чисел, меньших 101, к которой прибавили сумму всех четных чисел, меньших 101, то есть получается $50^2 + (50^2 + 50)$; в) эта сумма составляет половину от суммы всех четных чисел, меньших 101, то есть равна $(50^2 + 50) : 2$.

9.* Найдите сумму: $\mathrm{S} = -1^2 + 3^2 - 5^2 + 7^{2-} \ldots + 95^2 - 97^2 + 99^2$.

Указание. Перепишем сумму $S = (3^2 - 1^2) + (7^2 - 5^2) + \ldots + (95^2 - 93^2) + (99^2 - 97^2)$. Тогда $S = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 12 + \ldots + 2 \cdot 108 + 2 \cdot 196 = 2(4 + 12 + \ldots + 188 + 196)$. В скобках записана арифметическая сумма арифметической прогрессии с $a_1 = 4$ и $a_{25} = 196$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4.** Общий член арифметической прогрессии задается формулой $a_n = 3n - 1$. Чему равна сумма первых 10 членов этой прогрессии с нечетными номерами?

1) 125 2) 170 3) 215 4) 290

Указание: Эту сумму можно найти как сумму первых 10 членов арифметической прогрессии с первым членом 2 и разностью 6, что равно $\frac{2 \cdot 2 + 9 \cdot 6}{2} \cdot 10$.

§ 4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Цель параграфа — на примерах продолжить знакомство учащихся с общим понятием функциональной зависимости.

Особенности параграфа. К понятию функциональной зависимости в школьном курсе обращаются многократно. В данном параграфе на примерах формируются представления о числовой функции как зависимости одной переменной от другой, при которой каждому значению первой переменной по определенному правилу сопоставляется однозначно определенное значение второй переменной. Вопросы, относящиеся к области определения функции, пока не обсуждаются.

Чтобы продемонстрировать многообразие числовых функций, на третьем уровне разбирается построение графика непростой функции: целой части числа.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: понятие формулы; примеры таблиц; примеры функциональных зависимостей.

Новые математические понятия и свойства: числовая функция.

Вспомогательные понятия: целая часть числа; дробная часть числа; график функции «целая часть числа».

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Что можно сказать о величине, область допустимых значений которой содержит единственное значение?

Ответ. Эта величина — постоянная.

4.2. Будет ли зависимость пройденного расстояния от скорости движения функциональной зависимостью, если время движения постоянно?

Ответ. Будет, так как в этом случае каждому задаваемому значению скорости сопоставляется единственное расстояние, вычисляемое по формуле $S = vt$.

4.3. Как выглядит формула $S = f(a)$, где S — площадь равностороннего треугольника со стороной, равной a?

Ответ. $S(a) = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

4.4. Как выглядит график функции $y = 0 \cdot x + 2$, если областью значений переменной x является промежуток $[-1 ; 3]$?

Ответ. Будет выглядеть как отрезок прямой $y = 2$, начиная с точки $(-1; 2)$ и до точки $(3; 2)$ включительно.

4.5.* Как построить график функции $y = |x - 1|$?

Ответ. При $x \geq 1$ он совпадает с графиком функции $y = x - 1$. При $x < 1$ — совпадает с графиком функции $y = -(x - 1)$.

4.6.** Как выглядит график функции $y = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$?

Ответ. График функции $y = [x]$ следует сдвинуть параллельно оси Ox на $\dfrac{1}{2}$ влево.

4.7.** Как построить график функции $y = \{x\}$?

Ответ. Для каждого целого n нужно вычислять $y = x - n$, если $x \in [n; n + 1)$. Например, $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} = -\dfrac{1}{2^n} - (-1) = \dfrac{1}{2}$, так как $-\dfrac{1}{2} \in [-1; 0)$; $\{-1{,}25\} = -1{,}25 - (-2) = 0{,}75$, так как $-1{,}25 \in [-2; -1)$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3.* Равнобедренные трапеции имеют острые углы по $60°$ и периметр 30 см. Обозначим длину их большего основания через x см. Какой функцией определяется площадь S таких трапеций в зависимости от x?

Указание. Если большее основание x, меньшее основание y, то $x + y + 2(x - y) = 30$. Отсюда $y = 3x - 30$, $x + y = 4x - 30$, $x - y = 30 - 2x$, высота трапеции равна $\dfrac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{3}}{2} = (15 - x) \cdot \sqrt{3}$ и площадь трапеции $S = \dfrac{(4x - 30) \cdot (15 - x) \cdot \sqrt{3}}{2} = (2x - 15) \times$ $\times (15 - x) \cdot \sqrt{3}$.

4.** Оконный проем имеет форму прямоугольника с надстроенным над ним полукругом, как изображено на рис. 1. Пусть прямоугольник имеет заданный периметр P, а радиус R полукруга изменяется. Какой функцией от R определяется площадь S оконного проема?

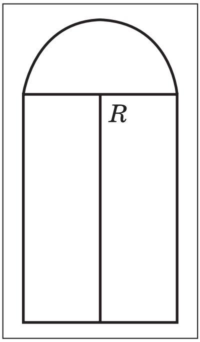


Рис. 1

Указание. Ширина прямоугольника равна $\frac{P-2R}{2}$, его площадь $2P \cdot \frac{P-2R}{2} = R(P-2R)$, площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$. Поэтому площадь оконного проема равна $\frac{\pi R^2}{2} + R(P-2R)$.

11.** Изобразите на координатной плоскости график уравнения.

а) $|x| = |y|$ б) $|x| + |y| = 1$

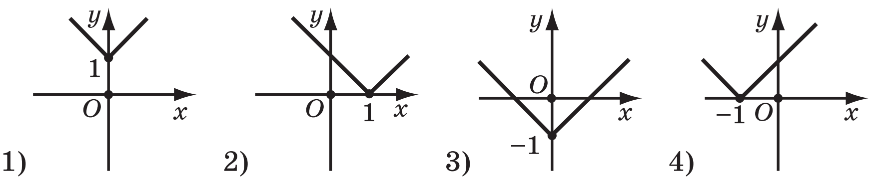
Указание. В соответствии с определением модуля рассмотреть по четыре случая, зависящих от знаков выражений, стоящих под модулями. В результате получится: в пункте а фигура, состоящая из биссектрис всех координатных углов; в пункте б квадрат с вершинами на осях координат.

13.** Начертите график функции $y = [2x] - 2[x]$.

Указание. Для каждого промежутка $[n;\, n+1)$ нужно рассмотреть две его части: $\left[n;\, n+\frac{1}{2}\right)$ и $\left[n+\frac{1}{2};\, n+1\right)$. Если $x \in \left[n;\, n+\frac{1}{2}\right)$, то $[2x] = 2n$ и $2 \cdot [x] = 2n$. Если $x \in \left[n+\frac{1}{2};\, n+1\right)$, то $[2x] = 2n+1$, $2 \cdot [x] = 2n$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.1. ** Какой график соответствует функции $y = |x+1|$?



Указание. В соответствии с определением модуля рассмотреть случаи $x \geq -1$ и $x < -1$.

1.3.** Чему равна дробная часть от $-\frac{5}{3}$?

1) $-\frac{2}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

Указание. Сначала нужно определить, что целая часть заданного числа равна -2, после чего дробная часть находится как разность $\left(-\frac{5}{3}\right)-(-2)$.

2.2.** Какие значения связаны функциональной зависимостью $x = 2(y - 1)$?

1) $y = \frac{9}{4}$, $x = \frac{5}{2}$ 2) $y = \frac{5}{4}$, $x = \frac{1}{2}$

3) $y = -4{,}2$, $x = -1{,}1$ 4) $y = 0{,}9$, $x = -2{,}1$

Указание. В каждом из вариантов нужно подставить значения переменных в уравнение.

Глава 11
СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ

Цель главы — рассмотреть свойства отрезков касательных, проведенных к одной или двум окружностям.

Особенности главы. В этой главе довольно подробно разбираются свойства отрезков касательных к окружностям, вписанным в многоугольник, рассматривается построение общей касательной к двум окружностям с анализом всех возможных случаев. К параграфам предлагается много задач, в том числе и достаточно сложных. На третьем уровне рассматривается несколько непростых задач, близких к олимпиадным.

§ 1. ОТРЕЗКИ КАСАТЕЛЬНЫХ

Цель параграфа — напомнить известные свойства касательной к окружности, доказать теорему о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, рассмотреть свойства окружности, вписанной в четырехугольник.

Особенности параграфа. Для изучения на первом уровне выделяются свойства отрезков касательных и свойство окружности, вписанной в треугольник. На втором и третьем уровне дополнительно рассматривается свойство окружности, вписанной в четырехугольник. Так как этот материал относительно несложный, то при желании и его можно изучать на первом уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: определение касательной к окружности; признак касательной к окружности; вписанные и описанные многоугольники; осевая симметрия.

Новые математические понятия и свойства: отрезок касательной к окружности; свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как доказать, что через любую точку окружности можно провести единственную касательную к этой окружности?

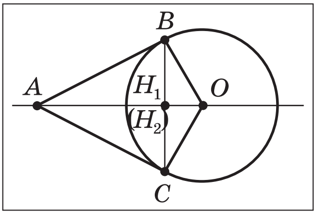


Рис. 1

Ответ. Пусть K — произвольная точка окружности с центром O. Проведем радиус OK. Через точку K проведем прямую, перпендикулярную радиусу OK. По теореме эта прямая будет единственной касательной к окружности в точке K.

1.2. На каком расстоянии от прямой находится центр каждой из построенных окружностей?

Ответ. На заданном расстоянии R, равном радиусу.

1.3. Как показать, что отрезки AB и BC на рис. 1 симметричны относительно прямой, соединяющей центр O и точку A?

Ответ. Пусть точка H_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AO, точка H_2 — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на ту же прямую. Как доказано в п. 1.3, треугольники ABO и ACO равны, поэтому равны углы BAO и CAO. Следовательно, прямоугольные треугольники BH_1A и CH_2A равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $AH_1 = AH_2$. Следовательно, точки H_1 и H_2 совпадают и $BH_1 = CH_2$. Поэтому точки B и C симметричны относительно прямой AO. Но тогда и отрезки AB и AC симметричны относительно прямой AO.

1.4. Чему в рассмотренном примере равна длина отрезка BN?

Ответ. Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно повторить рассуждения, приведенные в пункте.

В результате находим, что

$$BN = \frac{BC + AB - AC}{2} = \frac{13 + 15 - 14}{2} = 7.$$

1.5. По какой формуле можно найти длину отрезка CK касательной к окружности в обозначениях данного пункта?

Ответ. Длина отрезка касательной, проведенной из вершины C, равна $\frac{a + b - c}{2}$, то есть для ее нахождения нужно из суммы длин сторон, выходящих из данной вершины, вычесть длину противоположной вершине стороны треугольника, а результат разделить пополам. То есть $|CK| = \frac{a + c - b}{2}$.

Пользуясь формулой $|AK| = \dfrac{b+c-a}{2}$, можно найти формулу для BM по-другому:

$$|CK| = |AC| - |AK| = c - \frac{b+c-a}{2} = \frac{2c-b-c+a}{2} = \frac{c+a-b}{2}.$$

1.6.* В пункте рассматривалась задача на вычисление радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см (рис. 2). *Вопрос.* Чему равно отношение длин отрезков $\dfrac{BM}{AM}$?

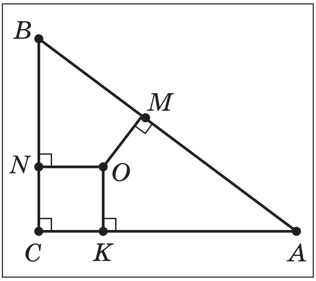


Рис. 2

Ответ. Пользуясь формулой п. 1.5, найдем:

$$|BM| = \frac{c+a-b}{2} = \frac{5+3-4}{2} = 2,$$

$$|AM| = \frac{b+c-a}{2} = \frac{4+5-3}{2} = 3.$$

Откуда искомое отношение равно $\dfrac{2}{3}$.

Длины отрезков BM и AM можно еще проще найти, зная, что $|CN| = |CK| = 1$. Тогда

$$|BM| = |BN| = |BC| - |CN| = 3 - 1 = 2,$$

$$|AN| = |AK| = |AC| - |CK| = 4 - 1 = 3.$$

1.7.* В какой прямоугольник можно вписать окружность?

Ответ. По теореме, установленной в этом пункте, суммы длин противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны между собой. Противоположные стороны прямоугольника равны между собой, поэтому и соседние стороны описанного около окружности прямоугольника равны между собой, то есть этот прямоугольник — квадрат.

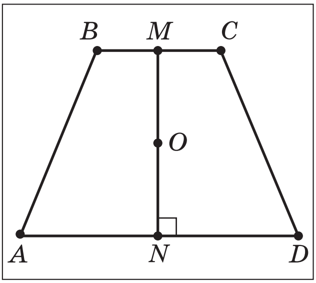


Рис. 3

1.8.* Чему равны расстояния от центра O окружности до вершин трапеции $ABCD$ (рис. 3)?

Ответ. В прямоугольном треугольнике ANO: $|AO|^2 = |AN|^2 + |ON|^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, поэтому $|AO| = \sqrt{20}$. Аналогично в прямоугольном треугольнике BMO: $|BO|^2 = |BM|^2 + |OM|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, поэтому $|BO| = \sqrt{5}$.

Как ни странно, определенные затруднения возникают при обосновании того, что точки касания M и N являются серединами оснований равнобедренной трапеции, хотя сам факт равенства на первый взгляд представляется очевидным. Приведем его доказательство.

Центр O вписанной в трапецию окружности лежит на биссектрисах всех углов. Если ON — радиус, проведенный в точку касания со стороной AD, то $\Delta AON = \Delta BON$ по общему катету и равному острому углу. Из равенства треугольников следует, что $AN = DN$.

Подобное же рассуждение справедливо и для точки M.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Проведите касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

Указание. Сначала через центр окружности провести прямую, перпендикулярную заданной прямой, и отметить точки пересечения с окружностью. Затем построить касательные к окружности, содержащие эти точки.

4. Проведите к данной окружности касательную под данным углом к данной прямой. Сколько может быть решений?

Указание. Сначала построить любую прямую, образующую с данной прямой заданный угол. Затем можно воспользоваться решением задачи 2. Всего возможно 4 решения.

9.* Постройте треугольник по двум углам и радиусу вписанной окружности.

Указание. Используйте решение задачи 4.

12. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла.

Указание. Таких окружностей много. Центр каждой из них лежит на биссектрисе угла.

13.* Постройте окружность, которая касается одной стороны данного угла и другой стороны в данной на ней точке.

Указание. Через заданную на стороне угла точку провести прямую, перпендикулярную к этой стороне, и найти пересечение с биссектрисой угла.

14.* Постройте окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых. В каком случае задача не имеет решений?

Указание. Центр окружности лежит на прямой, точки которой равноудалены от заданных прямых. Задача не имеет решений, если точка лежит вне полосы, заключенной между заданными прямыми.

15.** Через точку M, данную вне окружности, проведите прямую так, чтобы она пересекла окружность в точках A и B и отрезок AB имел заданную длину. Когда возможно такое построение?

Указание. Зная радиус и длину хорды, можно вычислить, а затем и построить отрезок, равный расстоянию от центра до хорды. После этого задача сводится к построению прямой, которая проходит через данную точку M и удалена от другой данной точки O на заданное расстояние. Для решения этой задачи достаточно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой OM и катетом, длина которого равна расстоянию от центра O до середины хорды AB.

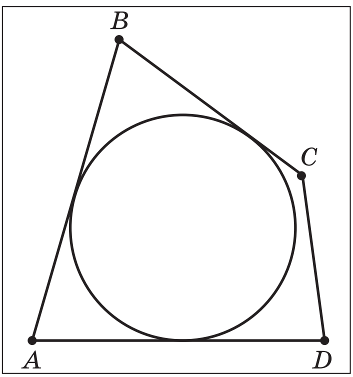


Рис. 4

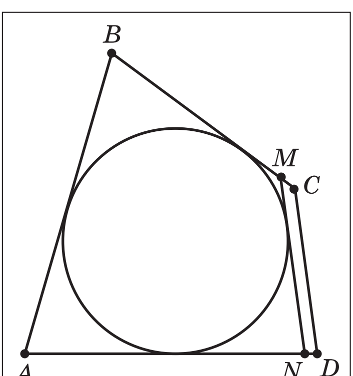


Рис. 5

17.** На данной прямой найдите такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данной окружности, были данной длины. Сколько решений может иметь задача?

Указание. Зная радиус и длину отрезка касательной, можно вычислить, а затем и построить отрезок, длина которого равна расстоянию от искомой точки до центра окружности. Задача может иметь не более двух решений.

23.** Окружность касается трех сторон четырехугольника $ABCD$ и не пересекает сторону CD, как изображено на рис. 4. Докажите, что тогда $AD + BC > AB + CD$.

Указание. Проведем $MN \| CD$, как показано на рис. 5.

Так как четырехугольник $ABMN$ описанный, то $AN + BM = AB + MN$. Далее остается доказать, что $MC + ND > MN - CD$. Ясно, что $MC + CD + ND > MN$, поскольку длина ломаной $MCDN$ больше длины отрезка MN.

24.** *Указание.* Смотрите указание к задаче 23.

25.** *Указание.* Нужное утверждение можно получить как следствие из результатов задач 23 и 24.

Заметим, что утверждение данной задачи является *признаком* описанного четырехугольника.

26.** *Указание.* Воспользоваться признаком из задачи 25.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. В треугольнике ABC сторона AC равна 7 см, и на ней точка M расположена так, что $AM = 4$ см. Какими могут быть длины сторон AB и BC, чтобы вписанная в треугольник ABC окружность касалась стороны AC в точке M?

1) $AB = 6$ см, $BC = 7$ см   2) $AB = 7$ см, $BC = 6$ см

3) $AB = 9$ см, $BC = 7$ см   4) $AB = 9$ см, $BC = 8$ см

Указание. Должно выполняться условие $AB - BC = 1$ см.

§ 2. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТЯМ

Цель параграфа — рассмотреть способы построения общей касательной к двум окружностям и некоторые свойства общих касательных к двум окружностям.

Особенности параграфа. Построение общей касательной к двум окружностям разбирается на первом уровне. При этом, когда окружности не пересекаются и ни одна из них не лежит внутри другой окружности, рассматриваются два принципиально различных случая: внешнее касание, когда окружности расположены по одну сторону от касательной, и внутреннее касание, когда окружности расположены по разные стороны от касательной. Свойства общей касательной, которые важно знать при вычислении длин отрезков между точками касания, рассматриваются на втором и третьем уровне. На третьем уровне рассматривается понятие вневписанной окружности, приводятся примеры задач олимпиадного характера.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства касательной к окружности; признак касания окружности и прямой; окружность, вписанная в многоугольник.

Новые математические понятия и свойства: общая касательная к двум окружностям; общая внешняя касательная двух окружностей; общая внутренняя касательная двух окружностей; касание двух окружностей; окружности, касающиеся внешним (внутренним) образом; отрезок общей касательной.

Вспомогательные понятия: вневписанная окружность.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Сколько различных общих касательных можно провести для окружностей на рис. 1?

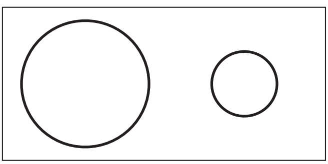


Рис. 1

Ответ. Четыре касательных — две внешних и две внутренних (см. рис. 2). Построение общих внешних касательных рассматривается в п. 2.3 и 2.4.

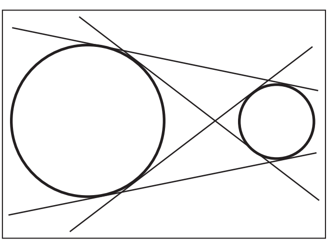


Рис. 2

2.2. Как доказать, что точка касания окружностей на рис. 3 лежит на прямой, проходящей через центры окружностей?

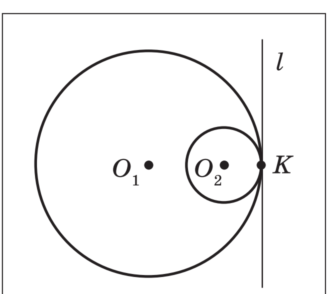


Рис. 3

Ответ. Пусть K — точка касания прямой l с двумя окружностями с центрами O_1 и O_2 соответственно. Так как радиус, проведенный из центра окружности в точку касания, перпендикулярен касательной, то прямые O_1K и O_2K перпендикулярны к прямой l. Однако через точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной. Следовательно, прямая O_1O_2 содержит точку касания K (рис. 4).

2.3. Как доказать, что касательные на рис. 5 не пересекаются?

Ответ. В построенном нами четырехугольнике O_1PQO_2 противоположные стороны O_1P и O_2Q равны и параллельны. По известному признаку четырехугольник является параллелограммом. Следовательно, общая касательная PQ параллельна прямой O_1O_2, соединяющей центры окружностей. Аналогично этой прямой параллельна и вторая общая касательная. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

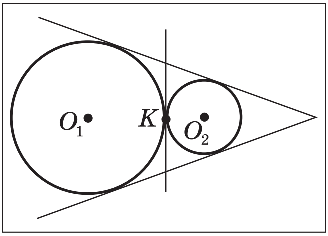


Рис. 4

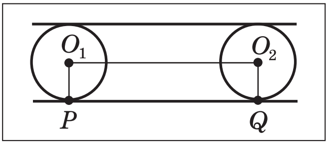


Рис. 5

2.4. Как построить общую внутреннюю касательную к двум данным окружностям?

Ответ. Для построения достаточно повторить с некоторыми изменениями рассуждения п. 2.4.

Сначала предположим, что такая касательная построена. Соединим точки касания K с первой окружностью и L со второй окружностью с центрами O_1 и O_2 соответствующих окружностей. Из точки O_2 опустим перпендикуляр O_2H на прямую O_1K и рассмотрим прямоугольный треугольник O_1HO_2 (рис. 6). Так как центры окружностей лежат по разные стороны от прямой KL, то $HK = O_2L$ и $O_1H = O_1K + KH = O_1K + O_2L = R_1 + R_2$.

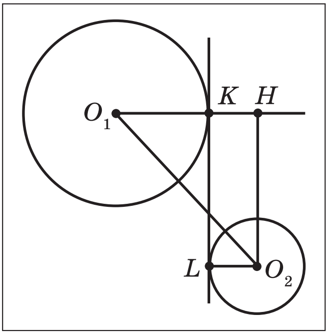


Рис. 6

Построение. 1. Проведем две взаимно перпендикулярные прямые m и n, которые пересекаются в точке E. На прямой m построим отрезок EF, равный $R_1 + R_2$. С центром в точке F и радиусом O_1O_2 проведем окружность. Точку пересечения окружности с прямой n обозначим буквой G.

Построение 2. Построим треугольник O_1HO_2, равный треугольнику EFG, у которого $O_1H = EF$. Для этого достаточно построить окружность с центром O_1 и радиусом EF, окружность с центром O_2 и радиусом GE и в качестве H взять точку пересечения этих окружностей.

Построение 3. Построим луч O_2P, лежащий на прямой, параллельной O_1H, и направленный противоположно лучу O_1H.

Построение 4. Отметим точки A и B пересечения лучей O_1H и O_2P с исходными окружностями. Прямая AB является общей внутренней касательной данных окружностей.

2.5.** В каких случаях можно построить общие внутренние касательные к двум данным окружностям?

Вариант ответа. Можно построить тогда, когда расстояние между центрами окружностей не меньше суммы радиусов. Доказательство этого утверждения следует из анализа процедуры построения общей внутренней касательной, которая приведена в ответе на вопрос к пункту 2.4.

2.6. Как доказать равенство отрезков внешних касательных к двум равным окружностям?

Ответ. Когда окружности равны, четырехугольник O_1ABO_2 является прямоугольником, так как его противоположные стороны O_1A и BO_2 равны между собой и перпендикулярны касательной AB. Следовательно, $AB = O_1O_2$, $AB \| O_1O_2$. Аналогично $CD = O_1O_2$, $CD \| O_1O_2$. В итоге отрезки общих касательных равны: $AB = CD$.

2.7. Как доказать сформулированное утверждение: «Отрезки внутренних общих касательных, проведенных к двум непересекающимся окружностям, равны»?

Ответ. Пусть внутренние касательные к двум окружностям пересекаются в точке K. Тогда из точки K к первой окружности проведены отрезки касательных KA и KC, а поэтому $|KA| = |KC|$. Но из точки K ко второй окружности также проведены отрезки касательных KB и KD, а поэтому $|KB| = |KD|$.

Следовательно, $|AB| = |AK| + |BK| = |CK| + |DK| = |CD|$.

2.8.* Как доказать, что отрезки FM и GM (рис. 7) равны?

Ответ. В данном пункте установлено, что $|FM| = \dfrac{|AB|}{2}$. Аналогично $|GM| = \dfrac{|CD|}{2}$, где C и D — точки касания второй внешней касательной. В п. 2.6 установлено, что отрезки внешних касательных, проведенных к двум окружностям, равны, то есть $|AB| = |CD|$, следовательно $|FM| = |GM|$.

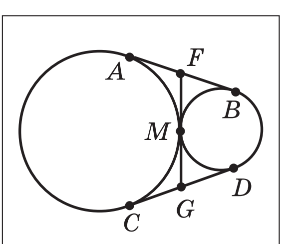


Рис. 7

2.9.** Сколько на рис. 8 можно указать отрезков, равных отрезку AL?

Ответ. Отрезок AL равен отрезку второй касательной, проведенной из точки L к той же окружности: $|AL| = |LN|$. В пункте 2.9 установлено, что $x = y$, где $x = |MN|$, $y = |LK|$, поэтому если $a = |KN|$, то $|LN| = a + y = a + x = |KM|$. В свою очередь отрезок касательной MK равен отрезку MD. Отсюда $|AL| = |LN| = |MK| = |MD|$.

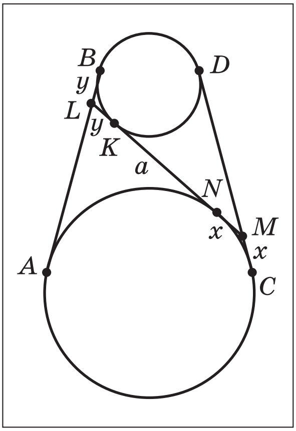


Рис. 8

2.10.** Как построить центр вневписанной окружности?

Ответ. Так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, центр окружности, вневписанной в треугольник ABC и касающейся стороны AB, лежит одновременно на биссектрисе угла C и на биссектрисе внешнего угла A. Поэтому центр вневписанной окружности — точка пересечения указанных биссектрис.

Вместо биссектрисы внешнего угла A можно взять биссектрису внешнего угла B. Кроме того, центр указанной вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрис внешних углов A и B.

2.11.** Как через заданную точку провести прямую, отсекающую от заданного угла треугольник заданного периметра?

Ответ. На одной из сторон угла от его вершины A отложим отрезок AM, длина которого равна полупериметру искомого треугольника. Из точки M восстановим перпендикуляр к стороне AM. Аналогично на другой стороне угла отложим отрезок AN той же длины и из точки N проведем перпендикуляр к AN. С центром в точке O пересечения перпендикуляров и радиусом $OM = ON$ построим вписанную в угол окружность. Остается через данную точку провести касательную к построенной окружности так, чтобы от угла отсекался треугольник, для которого построенная окружность окажется вневписанной. Если точки пересечения касательной со сторонами угла обозначить B и C, то треугольник ABC, как показано в п. 2.11, будет иметь данный периметр.

Указания к решению наиболее трудных задач.

8.** Окружности O_1 и O_2 касаются прямой l_1 внешним образом, и расстояние между точками касания равно 12 см. Прямая l_2 является внутренней общей касательной к O_1 и O_2, расстояние между точками касания равно 8 см. Найдите радиусы окружностей O_1 и O_2, если известно, что радиус одной из них в пять раз больше радиуса другой.

Указание. Пусть r — радиус малой окружности, $5r$ — радиус большой окружности, d — расстояние между центрами. Из условия для внешней касательной можно составить уравнение $16r^2 + 12^2 = d^2$. Из условия для внутренней касательной составляется аналогичное уравнение $36r^2 + 8^2 = d^2$.

9.** Окружности O_1 и O_2 касаются друг друга в точке A. К окружностям проведена общая касательная l, отрезок которой между точками касания имеет длину 5 см. Найдите радиусы окружностей, если известно, что расстояние от точки A до прямой l равно 2 см.

Указание. Если точку A касания окружностей соединить с концами отрезка общей внешней касательной, то получится прямоугольный треугольник.

13.* Две окружности касаются внешним образом друг друга в точке A и касаются некоторой прямой в точках B и C. Докажите, что угол BAC равен $90°$.

Указание. Проведем общую касательную через точку A, она пересекает BC в точке F (рис. 9). Как отмечалось в п. 2.8, $BF = AF = FC$, треугольники AFB и AFC равнобедренные, углы при их основаниях AB и BC равны. Пусть $\angle FCA = \angle FAC = x$, $\angle FBA = \angle FAB = y$, тогда $\angle BAC = x + y$, а сумма всех углов треугольника равна $2(x + y)$, отсюда $2(x + y) = 180°$, $x + y = 90°$, то есть $\angle BAC = 90°$.

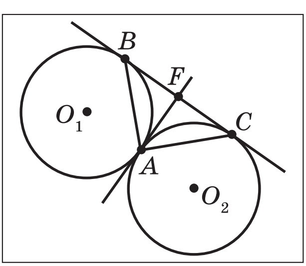


Рис. 9

14.** Вписанная окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M, вневписанная окружность касается этой же стороны в точке K. Докажите, что $AM = BK$ и $AK = BM$.

Указание. Ранее было доказано, что $AM = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$. Доказать, что $BK = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

19.** Даны угол и окружность, которая касается сторон угла. Постройте окружность, касающуюся заданной окружности и сторон заданного угла.

Указание. Для одного из способов построения можно воспользоваться результатом задачи 13. Пусть O_1 — заданная окружность, A и B — точки ее касания со сторонами угла, его вершина L (рис. 10). Обозначим K точку пересечения окружности O_1 и биссектрисы LO_1. Проведем через K перпендикуляр к прямой AK, пусть он пересечет сторону LA угла в точке C. Теперь построим перпендикуляр к LA в точке C. Его пересечение O_2 с прямой LO_1 и есть центр искомой окружности. Если вместо K взять точку M, получим еще один вариант решения.

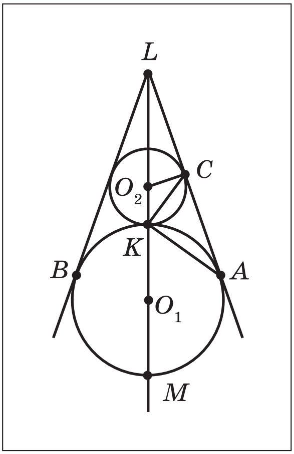


Рис. 10

20.** Через заданную точку внутри угла проведите прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшего возможного периметра.

Указание. Вспомните содержание пункта 2.11. Нужно провести окружность, которая проходит через данную точку и касается сторон угла. Таких окружностей две. Выбрать нужно окружность большего радиуса, а затем через данную точку провести к ней касательную. Построенная окружность является вневписанной для полученного треугольника, а его периметр минимален.

23.** Две окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите множество всех точек M таких, что проведенные из них отрезки MB и MC касательных к окружностям равны между собой.

Указание. Для любых двух окружностей искомое множество — прямая, перпендикулярная линии центров.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Две неравные окружности с центрами E и F касаются друг друга и касаются лучей с общей вершиной A так, как показано на рис. 11. Какие из указанных треугольников являются равнобедренными?

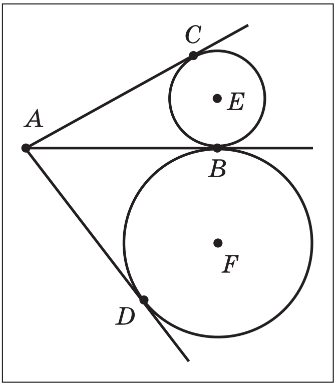


Рис. 11

1) треугольник ABC

2) треугольник AEF

3) треугольник ACD

4) треугольник ABD

Указание. Выполняются следующие условия: $AB = AC = AD$, $AE \neq AF$.

Глава 12
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Цель главы — рассмотреть алгебраические и графические приемы решения систем уравнений, ознакомиться с задачами, при решении которых нужно находить целочисленные решения.

Особенности главы. Глава примечательна тем, что наряду с изучением способов решения систем линейных уравнений в ней содержится много разнообразных приложений: рассматриваются текстовые задачи, задачи на поиск целочисленных решений уравнений с двумя неизвестными и т. д.

При изучении главы большое значение имеет наглядность, и графическому способу нахождения приближенных решений систем уравнений уделен целый параграф.

§ 1. СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием системы двух уравнений с двумя неизвестными, решением системы, изучить алгебраические способы решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Особенности параграфа. В начале параграфа рассматриваются конкретные задачи, которые приводят к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. На основе примеров вводится общая форма записи системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и определяется понятие решения такой системы. На первом и втором уровне основное внимание обращается на способы решения систем уравнений. На третьем уровне дополнительно разбирается задача на составление системы, которую путем замены неизвестных удается свести к линейной, и рассматривается пример системы уравнений с параметром.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: линейное выражение с двумя переменными; линейное уравнение с одной неизвестной; способы решения линейного уравнения.

Новые математические понятия и свойства: система двух линейных уравнений с двумя неизвестными; решение системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Вспомогательные понятия: площадь участка земли, выраженная в сотках; система, сводящаяся к системе двух уравнений с двумя неизвестными; система с параметром; определитель системы двух линейных уравнений.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. В пункте рассматривается задача: «Члены общества садоводов собираются поделить отведенную им землю на участки равной площади. Если каждому отводить участок по 12,5 сотки, то при этом останется 100 соток свободной земли. Если же каждому отводить участок по 16 соток, то не хватит 12 соток. Сколько человек в обществе садоводов?» *Вопрос.* Сколько земли достанется каждому члену общества, если всю землю поделить поровну?

Ответ. Число садоводов — 32. Площадь земли $16 \cdot 32 - 12 = 500$ (соток). При делении поровну каждый садовод получил бы $\frac{500}{32} = 15{,}625$ (сотки).

1.2. Какой вид будет иметь решение системы уравнений

$$\begin{cases} 4x + 4y = 360, \\ 3{,}5x + 4{,}4y = 360, \end{cases}$$

если подставить во второе уравнение системы вместо неизвестного y равное ему выражение $90 - x$?

Ответ. Подставив во второе уравнение вместо y равное ему выражение $90 - x$, получим $3{,}5x + 4{,}4 \cdot (90 - x) = 360$.

Отсюда $0{,}9x = 4{,}4 \cdot 90 - 360 = 36$. Следовательно, $x = 36 : 0{,}9 = 40$.

Получив значение $x = 40$, находим $y = 90 - x = 50$.

1.3. Как решить систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2? \end{cases}$

Ответ. Заметим, что если взять любые значения a для переменной x и b для переменной y такие, что $a + b = 1$, то при подстановке этих значений в левую часть второго уравнения системы получим 1, что не равно 2. Отсюда следует, что никакая пара значений для переменных x и y не может быть решением заданной системы. Поэтому множество решений этой системы пусто.

1.4. Какое уравнение с двумя неизвестными, не имеющее решений, вы можете предложить?

Ответ. Например, $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$.

1.5. Какую систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, имеющую сколь угодно много решений, вы можете предложить?

Ответ. Например, $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x = 3y. \end{cases}$

1.6.** Как показать, что найденная пара чисел $(x; y)$ является решением системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} ?$$

Ответ. Найденные значения $x = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$ и $y = \dfrac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$.

1.7.** В пункте рассматривается задача: «Пароход за 9 ч проплыл сначала 100 км по течению реки, а затем 64 км против течения. В следующий раз пароход за 9 ч проплыл сначала 80 км против течения реки, а затем 80 км по течению. Какова скорость парохода в стоячей воде»? *Вопрос.* Какова в рассмотренной задаче скорость движения парохода против течения реки?

Ответ. Во введенных обозначениях она равна $x - y$, то есть $(18 - 2) = 16$ (км/ч).

1.8.** Как проверить, что при $a \neq 1$ пара чисел $\left(\dfrac{a-2}{a-1}; \dfrac{1}{a-1}\right)$ является решением системы $\begin{cases} 3x + (a+2)y = 4, \\ 4x + (a+3)y = 5 \end{cases}$?

Ответ. Можно в каждое уравнение системы подставить вместо x число $\dfrac{a-2}{a-1}$, а вместо y — число $\dfrac{1}{a-1}$ и показать, что получатся верные числовые равенства. Это действительно так:

$$3 \cdot \frac{a-2}{a-1} + (a+2) \cdot \frac{1}{a-1} = \frac{3a - 6 + a + 2}{a-1} = \frac{4(a-1)}{a-1} = 4,$$

$$4 \cdot \frac{a-2}{a-1} + (a+3) \cdot \frac{1}{a-1} = \frac{4a - 8 + a + 3}{a-1} = \frac{5(a-1)}{a-1} = 5.$$

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.** При каждом значении a найдите решения системы.

а) $\begin{cases} y - ax = 0, \\ 5ax - y = 8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x + 2ay = 1, \\ 2x + 4ay = 0{,}25 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + (a+1)y = 6, \\ 3x + (a-1)y = 5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - ay = a + 1, \\ 5x + (a+2)y = 3 - a \end{cases}$

Указание. а) Из системы следует уравнение $4ax = 8$; при $a = 0$ это уравнение корней не имеет; при $a \neq 0$ получаем единственное значение x, а затем и y; б) из системы следует уравнение $ay = 0$, при $a = 0$ имеем бесконечное множество решений вида $\left(\frac{1}{8};\ y\right)$; при $a \neq 0$ получаем единственное значение y, а затем и x; в) из системы следует уравнение $(a + 5)y = 8$; при $a = -5$ корней нет, при $a \neq -5$ получаем единственное значение x, а затем и y; г) из системы следует уравнение $(3a + 1)y = -(3a + 1)$; при $a = -\frac{1}{3}$ это уравнение имеет бесконечное множество решений вида $\left(\frac{2-y}{3};\ y\right)$; при $a \neq -\frac{1}{3}$ получаем единственное значение y, а затем и x.

10.* Как записать все пары чисел, которые являются решениями системы $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12? \end{cases}$

Указание. Лучше перебирать значения переменной x и для каждого из них получать соответствующее значение y. В итоге получатся пары чисел $(a;\ 2a - 4)$, где a — любое число.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Какая из следующих систем имеет то же решение, что и система $\begin{cases} x - 2y = 10, \\ 2x + y = 5 \end{cases}$?

1) $\begin{cases} 3x - y = 9, \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 0{,}5, \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x - y = 18, \\ 2y - 3 = x \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - y = 23, \\ -x + 2y = -10 \end{cases}$

Указание. Решением заданной системы является пара чисел $(4;\ -3)$. Далее, вариант 2 можно сразу отбросить, так как равенство $2x - y = 6$ невозможно; вариант 3 также не подходит, так как $2y - 3$ отрицательно, а значения x положительно; в варианте 1 найденная пара чисел не является решением первого из уравнений. Остается проверить, что найденная пара чисел является решением каждого из уравнений в системе из варианта 4.

2.4.* При каких значениях a из указанных система уравнений $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

1) $a = -1$ 2) $a = 0$ 3) $a = 1$ 4) $a = 2$

Указание. Определитель системы равен нулю при $a = 1$ и $a = -1$. Следовательно, при остальных значениях a система имеет единственное решение. Остается проверить $a = 1$, показать, что в этом случае решений сколь угодно много, затем проверить $a = -1$ и показать, что в этом случае решений нет.

§ 2. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Цель параграфа — рассмотреть графический метод решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными для нахождения приближенных значений неизвестных.

Особенности параграфа. Учащиеся потенциально готовы к восприятию этого материала, так как уже неоднократно встречались с графическими иллюстрациями множества решений одного линейного уравнения с двумя неизвестными, с нахождением общих точек графиков функций и нахождением координат точек координатной плоскости.

Распределение по уровням достигается за счет уровня сложности решаемых задач.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: график линейной функции; угловой коэффициент прямой; способы построения прямой по ее уравнению; уравнение окружности с центром в данной точке и данного радиуса; модуль действительного числа; понятие решения системы двух уравнений с двумя неизвестными; множество всех решений уравнения; множество всех решений системы уравнений.

Новые математические понятия и свойства: графический способ получения приближенных значений для решений системы уравнений с двумя неизвестными.

Новые математические понятия и свойства: график уравнения $|x| + |y| = 2$.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как доказать, что система $\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ. В этом можно убедиться с помощью рис. 1, из которого видно, что прямые, представляющие множество решений каждого из двух уравнений системы, пересекаются.

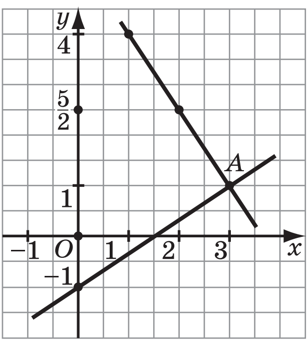


Рис. 1

Единственность решения системы можно доказать также алгебраически, например вычислив определитель системы и показав, что он отличен от нуля. Действительно, определитель системы

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

есть число $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 13 \neq 0$.

2.2. Как в координатной плоскости построить прямую с уравнением $15x + 15 = 0$?

Ответ. Если переписать уравнение в виде $x = -1$, то можно заметить, что множество решений данного уравнения состоит из пар $(-1; a)$, где a — произвольное число. Все точки вида $(-1; a)$ лежат на прямой, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку $(-1; 0)$.

2.3. Что такое угловой коэффициент прямой?

Ответ. Если прямая является графиком линейной функции $y = kx + b$, то число k называется угловым коэффициентом этой прямой. При $k = 0$ линейная функция имеет вид $y = b$, а ее графиком служит прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0, b)$. При $b = 0$ линейная функция имеет вид $y = kx$ и ее графиком служит прямая, которая при $k > 0$ проходит в первой и третьей четверти, а при $k < 0$ — во второй и четвертой четверти. Прямая, параллельная оси Oy, не имеет углового коэффициента и является графиком уравнением вида $x = a$.

2.4. Какие из пар чисел $(-8; 6)$, $(10; 10)$, $\left(2; -\frac{3}{4}\right)$ являются решениями системы $\begin{cases} x + 2y = 0{,}5, \\ 2x + 4y = 1? \end{cases}$

Ответ. Подставляя вместо x и y координаты данных точек в первое уравнение, замечаем, что две пары $(-8; 6)$ и $(10; 10)$ не являются решением, пара $\left(2; -\frac{3}{4}\right)$ является решением. Подстановка последней пары во второе уравнение системы показывает, что эта пара чисел является решением, а поэтому является и решением всей системы.

2.5.** Как показать, что указанные значения неизвестных x_1, y_1, x_2, y_2 дают точные решения системы $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2, \\ x - 3y - 6 = 0. \end{cases}$?

Ответ. Показать, что при подстановке вместо неизвестных указанных значений в каждое из двух уравнений получаются верные равенства. Для пары чисел $(0; -2)$ это проверяется быстро. Для пары чисел $(2{,}4; -1{,}2)$ нужно выполнить вычисления: $(2{,}4 - 1)^2 + (1{,}2 + 1)^2 = 1{,}96 + 0{,}04 = 2$, $2{,}4 - 3 \cdot (-1{,}2) - 6 = 2{,}4 + 3{,}6 - 6 = 0$.

2.6.** Каковы точные координаты точки K из примера 6?

Ответ. Для нахождения точных координат точки K нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.** Найдите, при каких числовых значениях a система имеет единственное решение.

а) $\begin{cases} 2x + 4y = a, \\ x + 2y = a \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = -1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 6x + ay = 1 \end{cases}$

Указание. а) Система равносильна системе $\begin{cases} 2x + 4y = a, \\ 2x + 4y = 2a \end{cases}$, откуда можно сделать вывод, что система либо имеет сколь угодно много решений, либо не имеет ни одного; б) определитель системы равен $a^2 - 1$, поэтому при $a = 1$ и при $a = -1$ единственного решения не будет, при оставшихся значениях a решение единственно; в) определитель системы равен $3a-6$, поэтому при $a=2$ единственного решения не будет, при оставшихся значениях a решение единственно.

5.** Исследуйте систему (в зависимости от числового значения a).

а) $\begin{cases} ax+y=2, \\ ax-y=-2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-ay=1, \\ 3x+ay=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} ax+y=1, \\ x-ay=1 \end{cases}$

Указание. а) Определитель системы равен $-2a$, поэтому при $a \neq 0$ решение единственно, при $a=0$ решениями являются пары чисел $(a; 2)$, где a — любое число; б) определитель системы равен $5a$, поэтому при $a \neq 0$ решение единственно, при $a=0$ получается система, не имеющая корней; в) определитель системы равен $-a^2-1$ и не равен нулю при любом a, поэтому при всех значениях a решение единственно.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

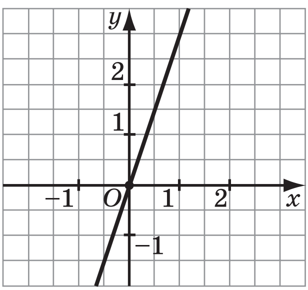


Рис. 2

2.1. Для уравнения, изображенного графиком (рис. 2), укажите уравнения, которые дают с ним единственное решение.

1) $y=3+4x$ 2) $y=3+3x$

3) $y=4+3x$ 4) $y=-3-3x$

Указание. Угловой коэффициент прямой, изображенной на графике, равен 3. Для единственности решения системы надо выбрать все варианты уравнений прямых, у которых угловой коэффициент не равен 3.

2.2. Укажите уравнения, каждое из которых вместе с уравнением, заданным графиком на рис. 2, образует систему, имеющую хотя бы одно решение.

1) $y=30-2x$ 2) $y=30+2x$

3) $y=60-2x$ 4) $y=1-2x$

Указание. Как указано в тесте 2.1, угловой коэффициент прямой, изображенной на графике, равен 3. Для существования системы надо выбрать все варианты уравнений прямых, у которых угловой коэффициент не равен 3, а остальные случаи рассмотреть особо. Однако в данном тесте все варианты в ответ отбираются сразу.

2.3.* При каких парах значений a и b система $\begin{cases} ax + y = 2, \\ 2x - by = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

1) $a = -2$, $b = 1$ 2) $a = 2$, $b = 1$

3) $a = -2$, $b = -1$ 4) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

Указание. Определитель системы равен $-ab - a$.

2.4.* Укажите все числа a, для каждого из которых найдется хотя бы одно такое число b, что пара $(a; b)$ является решением системы $\begin{cases} |x| + |y| = 10, \\ x - y = 4. \end{cases}$

1) 3 2) −3 3) 5 4) 7

Указание. Пара чисел $(a; 4 - a)$ должна быть решением первого уравнения системы.

§ 3. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Цель параграфа — рассмотреть примеры задач, которые приводят к нахождению целочисленных решений уравнений и систем уравнений.

Особенности параграфа. Изучаемый материал непростой, поэтому следует основательно поработать с текстом учебника, чтобы учащиеся хорошо разобрались с алгоритмами поиска целочисленных решений. На первом и втором уровне основное внимание следует обратить на поиск целочисленного решения методом перебора. Например, при нахождении целочисленного решения уравнения $4x - 3y = 7$ можно записать $y = \frac{4x - 7}{3}$ и перебрать любые три подряд идущих целых значения неизвестного x. Если при этом одно из соответствующих значений y будет целым, то решение найдено, если же все значения y будут не целыми, то уравнение вообще не имеет целочисленных решений. Далее на примерах следует рассмотреть, как по одному из целочисленных решений линейного уравнения с двумя неизвестными находить и другие его целочисленные решения.

На третьем уровне рекомендуется рассмотреть данную задачу во всей полноте, включая запись формул, выражающих все множество целочисленных решений. Также на третьем уровне разбирается один из способов поиска некоторых пифагоровых троек чисел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: способы решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными; наибольший общий делитель двух целых чисел; взаимно простые числа.

Новые математические понятия и свойства: целочисленное решение уравнения.

Вспомогательные понятия: пифагоровы тройки чисел.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. В пункте рассматривается задача: «Во дворе гуляют куры и овцы. Сколько кур и сколько овец гуляют во дворе, если известно, что у них у всех 22 ноги, а общее число кур и овец самое меньшее, какое может быть?» *Вопрос.* Каким может быть наибольшее число кур и овец, если известно, что у них всего 22 ноги?

Варианты ответа. Из решения, приведенного в пункте, следует: а) это число равно 11, когда овец нет вообще, а кур 11; б) если считать, что во дворе есть хотя бы одна овца, то тогда искомое число равно 10, когда овца одна, а кур 9; в) если считать, что овец несколько, то тогда искомое число равно 9, когда 2 овцы и 7 кур.

3.2. Какие решения в натуральных числах имеет рассмотренное уравнение $7x = 3y$?

Ответ. Все пары вида $(3m; 7m)$ при $m = 1, 2, 3, \dots$.

3.3. Как показать, что уравнение $6x + 2y = 11$ не имеет целочисленных решений?

Ответ. При любых целых x и y число $6x + 2y$ четное, то есть делится на 2. Однако в правой части уравнения стоит нечетное число 11. Поэтому уравнение не имеет целочисленных решений.

3.4.** Как доказать, что числа ab и $(a + 7)(b + 7)$, где a и b — целые числа, дают одинаковые остатки при делении на 7?

Ответ. Два целых числа x и y дают одинаковые остатки при делении на 7 тогда и только тогда, когда их разность $x - y$ делится на 7.

Так как $(a + 7)(b + 7) = ab + 7(a + b + 7)$, то $(a + 7)(b + 7) - ab$ равно $7(a + b + 7)$ и делится на 7. Поэтому числа ab и $(a + 7)(b + 7)$ дают одинаковые остатки при делении на 7.

3.5.** Как показать, что формулы $x = 4 + 5k$, $y = 1 - 7k$, где k — целое число, также задают все целые решения уравнения $7x + 5y = 33$?

Ответ. При любом целом k пара $(4 + 5k, 1 - 7k)$ является целым решением уравнения $7x + 5y = 33$, так как $7(4 + 5k) + 5(1 - 7k) = - 28 + 35k + 5 - 35k = 33$. Обратно, если взять произвольное целое решение $(x; y)$ уравнения $7x + 5y = 33$, то по доказанному в этом пункте числа x и y можно записать в виде $x = 4 - 5m$, $y = 1 + 7m$ при некотором целом m. Полагая $k = -m$, получим для x и y выражения в форме $x = 4 + 5k$, $y = 1 - 7k$.

3.6.** Какие решения в натуральных числах имеет уравнение $x^2 - y^2 = 2012$?

Ответ. Перепишем уравнение в виде $(x + y)(x - y) = 2012$. Тогда число $x + y$ должно быть одним из положительных делителей числа 2012, а число $x - y$ — частным от деления 2012 на $x + y$, причем $x - y < x + y$. Имеем $2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$. С учетом этого выпишем все положительные делители числа 2012 и получим: 1; 2; 4; 503; 1006; 2012. Возможные значения для $x + y$ и соответствующие значения для $x - y = \dfrac{2012}{x + y}$ выписываем в таблицу, помня что число $x - y$ должно быть меньше числа $x + y$:

$x + y$	$x - y$
2012	1
1006	2
503	4

В соответствии с таблицей составим системы:

$$\begin{cases} x + y = 2012, \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1006, \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 503, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Из этих систем только вторая имеет целочисленное решение (504; 502), причем оба значения являются натуральными числами. Таким образом, заданное уравнение имеет единственное решение в натуральных числах.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Найдите какие-либо два целочисленных решения уравнения.

а) $y = 2x$ б) $y = 2x + 4$ в) $2x + y + 1 = 0$

г) $x + y + 1 = 0$ д) $x - 2y + 2 = 0$

Указание. а) Решения— пары вида $(m; 2m)$, где m — любое целое; б) одно из решений (1; 6); зная это решение, уравнение можно записать в виде $(y - 6) = 2(x - 1)$; в) одно из решений (0; −1); зная это решение, уравнение можно записать в виде $(y + 1) = -2x$; г) одно из решений (0; −1), зная это решение, уравнение можно записать в виде $x = -(y + 1)$; д) одно из решений (0;1), зная это решение, уравнение можно записать в виде $x = 2(y - 1)$.

3.* Найдите целочисленные решения уравнения.

а) $2x + 5y = 3$　　б) $x + 2y = 1$　　в) $3x + y = 2$

г) $7x + 3y = 5$　　д) $15x - 9y = 27$　　е) $8x - 12y = 20$

ё) $13x - 2y = 2$　　ж) $17x + 13y = 5$　　з) $17x - 11y = 5$

Указание. а) Одно из решений (−1; 1); зная это, уравнение можно записать $2(x + 1) = -5(y - 1)$, откуда $y - 1 = 2m$, $x + 1 = -5m$, где m — любое целое число; б) одно из решений (1; 0); зная это, уравнение можно записать $x - 1 = -2y$, откуда $x - 1 = 2m$, $y = -m$, где m — любое целое число; в) одно из решений (1; −1); зная это, уравнение можно записать $3(x - 1) = -(y + 1)$, откуда $y + 1 = 3m$, $x - 1 = -m$, где m — любое целое число.

Задачи г — з решаются аналогично.

4.* Докажите, что уравнение не имеет целочисленных решений.

а) $3x + 6y = 5$　　б) $2x + 6y = 1$　　в) $5x + 10y = 3$

Указание. а) Рассмотреть делимость частей уравнения на 3; б) рассмотреть делимость частей уравнения на 2; в) рассмотреть делимость частей уравнения на 5.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Пары чисел $(19 - 5m; 3m + 8)$, где m — целое число, являются решением уравнения $3x - ay = 17$ в целых числах. Чему равно a?

1) 3　　2) 5　　3) −3　　4) −5

Указание. Варианты 1 и 3 не согласуются с изучаемыми формулами. Далее, из оставшихся вариантов нужно выбрать вариант 4, чтобы в самом уравнении коэффициенты при x и y были одного знака.

1.4.* Пары чисел $(2m + 1; 9m - 1)$, где m — целое число, являются решением уравнения $9x - by = a$ в целых числах. Чему равны a и b?

1) 11 и 2 2) 3 и -7 3) 9 и 11 4) -2 и 11

Указание. Сначала нужно найти значение b, равное 2. После этого получается, что $a = 11$.

2.3.* Для каких из следующих уравнений существуют целочисленные решения со значениями переменных x и y разных знаков?

1) $5y + 9x = 11$ 2) $12x - 5y = -18$

3) $5x - y = 9$ 4) $9x - 4y = -14$

Указание. В варианте 1 все целочисленные решения имеют вид $x = 4 + 5k$, $y = -5 - 9k$, а поэтому значения разных знаков получить легко. В варианте 2 при значениях неизвестных разного знака модули левой части могут равняться или 17, или 22, или больше 22. В варианте 3 легко подбираются $x = 1$, $y = -4$. В варианте 4 при значениях неизвестных разного знака модули левой части могут равняться или 13, или 17, или больше 17.

2.4.* Какие из следующих уравнений имеют решения вида $(am + 3;\ bm + 4)$, где m — переменная, принимающая все целые значения, a и b — некоторые фиксированные целые числа?

1) $7x + 5y = 11$ 2) $7x + 12y = 69$

3) $14x + 13y = 94$ 4) $13x + 17y = 108$

Указание. Одним из целочисленных решений является пара чисел (3; 4).

Глава 13
МНОГОУГОЛЬНИКИ

Цель главы — изучить новые свойства многоугольников и способы вычисления их площадей.

Особенности главы. В главе последовательно определяются четырехугольники, пятиугольники и тем самым намечается индуктивный процесс, который позволяет правильно определить шестиугольники и т. д. В итоге у учащихся вырабатываются общие представления о многоугольниках, хотя само определение многоугольника и не приводится. Такой подход выбран не случайно, потому что общее определение замкнутой ломаной без самопересечений дать не просто, хотя обычно так и стараются определить многоугольники. На школьном уровне стремиться к общему определению совсем не обязательно, достаточно иметь те представления о многоугольниках, которые приводятся в данной главе. В отличие от треугольников, у которых все углы меньше $180°$, для многоугольников приходится рассматривать углы, большие развернутого. Это создает определенные трудности, и для определения внутренних углов невыпуклого многоугольника приводится вариант определения, основанный на триангуляции.

При изучении вычисления площадей многоугольников разнообразные подходы к вычислению площади рассматриваются на конкретных примерах. В частности, приводится известная формула Пика. В одной из задач для третьего уровня приведена схема, по которой формула Пика может быть доказана.

§ 1. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Цель параграфа — рассмотреть понятие четырехугольника и четырехугольной области, научиться различать выпуклые и невыпуклые четырехугольники, вычислять внутренние углы четырехугольника, доказать теорему о сумме внутренних углов четырехугольника.

Особенности параграфа. На первом уровне основное внимание следует уделить изучению выпуклых четырехугольников, включая вывод суммы внутренних углов четырехугольника, ограничившись начальными представлениями о невыпуклых четырехугольниках. Остальной материал параграфа рассчитан на второй и третий уровень. В частности, определение внутренних углов невыпуклого четырехугольника.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства квадрата; свойства ромба; свойства параллелограмма; свойства трапеции.

Новые математические понятия: выпуклый четырехугольник; четырехугольная область; граница четырехугольной области; внутренний угол четырехугольника.

Вспомогательные понятия: выпуклая область.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие четырехугольники, имеющие особые названия, вы знаете?

Варианты ответа: а) квадрат; б) ромб; в) параллелограмм; г) трапеция; д) прямоугольник; е) дельтоид.

1.2. Что вы можете сказать о диагоналях невыпуклого четырехугольника?

Ответ. Диагонали невыпуклого четырехугольника, как отрезки, не пересекаются. Действительно, пусть вершины C и D невыпуклого четырехугольника $ABCD$ лежат по разные стороны от прямой AB. Тогда диагонали AC и BD лежат в разных полуплоскостях относительно AB, и значит, не пересекаются.

1.3.* Как задать треугольную область пересечением полуплоскостей?

Ответ. Возьмем полуплоскость a с границей AB, содержащую треугольник ABC. Аналогично строим полуплоскость β с границей BC и γ — с границей AC. Пересечение этих трех полуплоскостей и есть треугольная область, границей которой является треугольник ABC.

1.4. Как задать внутренний угол выпуклого четырехугольника пересечением полуплоскостей?

Ответ. Возьмем полуплоскость a с границей AB, которая содержит выпуклый четырехугольник $ABCD$. Аналогично строим полуплоскость β с границей BC. Пересечение этих двух полуплоскостей и есть внутренний угол ABC четырехугольника $ABCD$.

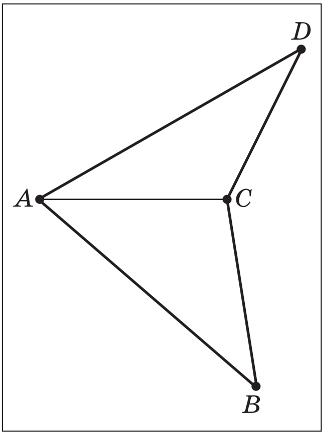


Рис. 1

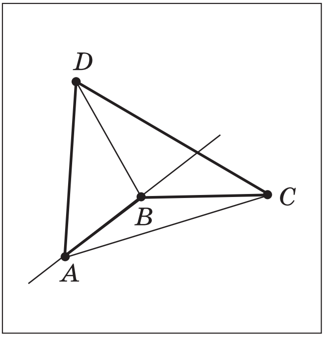


Рис. 2

1.5. Чему равна сумма всех углов треугольников ABC и ADC на рис. 1?

Ответ. Эта сумма равна 360°, так как сумма углов каждого из треугольников равна 180°.

1.6.* Как вы понимаете слова «внутренние точки четырехугольника»?

Варианты ответа. 1. Замкнутая ломаная из 4 звеньев ограничивает область. Если точка принадлежит этой области, то она является внутренней точкой четырехугольника.

2. Данный четырехугольник можно разбить на два треугольника. Тогда внутренние точки треугольников являются внутренними точками четырехугольника.

1.7.* Как показать, что невыпуклый четырехугольник имеет хотя бы один внутренний угол, больший 180°?

Ответ. Рассмотрим невыпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть вершины D и C лежат по разные стороны. Тогда угол ABC больше 180° (рис. 2).

1.8.** Как объяснить, что четырехугольник не может иметь двух внутренних углов, каждый из которых больше развернутого?

Ответ. Невыпуклый угол больше 180°, а сумма всех внутренних углов четырехугольника равна 360°. Поэтому если один внутренний угол невыпуклый, то сумма остальных внутренних углов уже меньше 180°.

1.9. Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?

Ответ. Эта сумма равна $180° \cdot 3 - 180° = 360°$, где $180° \cdot 3$ — сумма трех развернутых углов, а 180° — сумма внутренних углов треугольника.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.* Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка M. Докажите, что периметр треугольника AMC меньше периметра треугольника ABC.

Указание. Пусть точка N лежит на пересечении луча AM с ломаной ABC. Тогда точка N лежит на стороне BC (рис. 3). Остается заметить, что периметр треугольника ANC больше периметра треугольника AMC, но меньше периметра треугольника ABC.

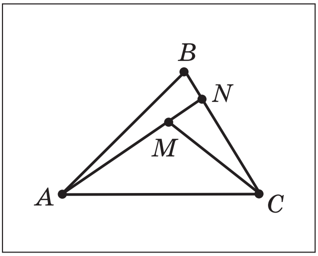


Рис. 3

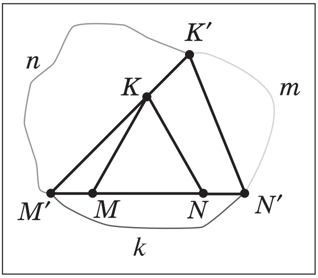


Рис. 4

5.** Внутри треугольника ABC выбраны три произвольные точки M, N, K. Докажите, что периметр треугольника MNK меньше периметра треугольника ABC.

Указание. Чтобы не разбирать несколько вариантов, нам удобно решать более общую задачу, заменив треугольник ABC на произвольную ломаную l, которая является границей области, внутри которой лежит треугольник MNK (см. рис. 4). Пусть луч NM пересекает l в точке N', луч MN — в точке M', а луч $M'K$ — в точке K'. Вершины треугольника $M'N'K'$ разбивают ломаную l на три ломаные. Обозначим через k ту часть ломаной l, с концами в точках M' и N', которая не содержит K' (рис. 4). Длина этой ломаной k не меньше длины отрезка $M'N'$, который соединяет ее концы. Аналогично длины ломаных m и n не меньше длин отрезков $K'N'$ и $K'M'$ соответственно, которые соединяют концы этих ломаных. Значит, длина ломаной l не меньше периметра треугольника $M'N'K'$. Но этот периметр равен

$$(KM' + M'M) + MN + (NN' + N'K' + K'K).$$

Из неравенства треугольника следует, что данная сумма больше или равна $KM + MN + NK$, то есть периметр треугольника MNK не больше периметра треугольника $M'N'K'$.

7.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны и $AB + CD = AD + BC$. Докажите, что четы-

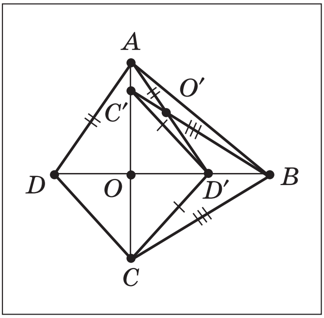


Рис. 5

рехугольник $ABCD$ имеет ось симметрии.

Указание. Пусть AB — самая длинная или одна из самых длинных сторон четырехугольника $ABCD$. Если $AB = AD$ или $AB = BC$, то симметрия имеется.

Предположим противное, что нет симметрии. Тогда $AB \neq AD$ и $AB \neq BC$, то есть $AB > AD$, $AB > BC$ и $AB > CD$. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Выберем на интервале AO точку C', а на интервале BO — точку D' таким образом, что $OC' = OC$, $OD' = OD$ (рис. 5). В этом случае $\Delta ADC = \Delta AD'C$, $OCD' = OC'D'$. Значит $AD' = AD$, $BC' = BC$, $C'D' = CD' = CD$.

Пусть O' — точка пересечения диагоналей AD' и BC' в четырехугольнике $ABC'D'$. Тогда

$$AD + BC = A'D' + BC' = (AO' + O'B) + (C'O' + O'D') >$$
$$> AB + C'D' = AB + CD.$$

Последнее неравенство противоречит условию задачи. Следовательно, предположение об отсутствии симметрии привело к противоречию.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. В выпуклом четырехугольнике три внешних угла равны по $100°$. Чему равна величина четвертого внешнего угла?

1) $60°$ 2) $70°$ 3) $80°$ 4) $90°$

Указание. Сумма всех внешних углов равна $360°$.

2.3. При каких из указанных условий четырехугольник $ABCD$ обязательно является выпуклым?

1) $AB \parallel CD$

2) $AB = BC$ и $AD = DC$

3) сумма трех из четырех углов четырехугольника равна $270°$

4) $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle BAD = \angle BCD$

Указание. В варианте 1 получается или трапеция, или параллелограмм, которые являются выпуклыми. В вариантах 2 и 3 легко привести примеры невыпуклых четырехугольников. В варианте 4 следует определить, что в четырехугольнике все углы меньше развернутого.

2.4. При каких из указанных условий четырехугольник $ABCD$ обязательно будет равнобедренной трапецией?

1) $AB = CD$ и $AD \neq BC$

2) $\angle BAD = \angle ABC$, $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle ABC \neq 90^\circ$

3) $AB \parallel CD$ и $AD = BC$

4) $AB = CD$, $AC = BD$ и $AD \neq BC$

Указание. В вариантах 1 и 2 легко привести примеры, когда четырехугольник не будет равнобедренной трапецией. В варианте 3 может получаться либо равнобедренная трапеция, либо параллелограмм. В варианте 4 всегда получается равнобедренная трапеция.

§ 2. ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — ознакомить учащихся с несколькими способами вычисления площадей четырехугольников.

Особенности параграфа. На первом уровне в качестве основного способа вычисления площади четырехугольника приводится самый естественный способ разбиения на треугольники. На втором и третьем уровне рассматриваются некоторые особые приемы вычисления площадей: замена четырехугольника на равновеликий треугольник; использование отношения площадей; дополнение четырехугольника до другой фигуры.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: четырехугольник; сумма углов четырехугольника; свойства площади; площадь треугольника.

Новые математические понятия: площадь четырехугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Чему равна площадь четырехугольника $ABCD$, у которого диагонали взаимно перпендикулярны и равны соответственно 6 см и 7 см (рис. 1)?

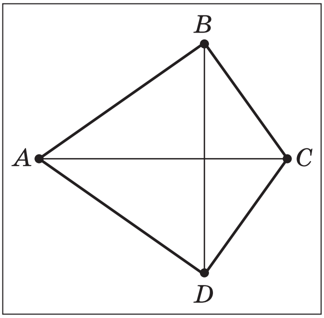


Рис. 1

Ответ. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot OC + \frac{1}{2}BD \cdot OA = \frac{1}{2}BD(OA + OC) = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$ см^2.

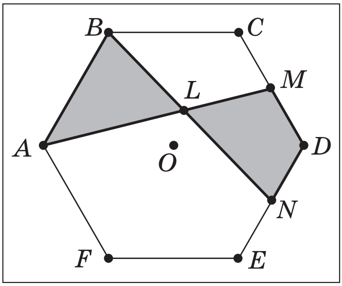


Рис. 2

2.2.* Как для невыпуклого четырехугольника $ABCD$ получить равновеликий ему треугольник?

Ответ. Приведенный в пункте процесс построения напрямую применим и к невыпуклому четырехугольнику.

2.3.** Как доказать, что на рис. 2 угол ALB равен $60°$?

Ответ. Пусть O — точка пересечения диагоналей правильного шестиугольника $ABCDEF$. Тогда все треугольники — ABO, BCO, CDO, DEO, EFO и FAO — равносторонние. Повернем чертеж вокруг точки O на $60°$. При этом отрезок AM перейдет в отрезок BN. Значит, и угол между этими отрезками равен $60°$.

2.4.* Чему в рассмотренном в пункте примере равно отношение высот треугольников ABC и ADC, проведенных к стороне AC?

Ответ. Пусть H — высота ΔABC и h — высота ΔADC. Тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot H$, $S_{\Delta ADC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot h$, откуда $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ADC} = H : h$.

Из полученных в пункте результатов следует, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AVD} + S_{\Delta MBC} = 24 + 16 = 40$ (см^2), $S_{\Delta ADC} = S_{\Delta AMD} + S_{\Delta MCD} = 12 + 8 = 20$ (см^2), откуда $H : h = 40 : 20 = 2 : 1$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

12.** В треугольнике ABC известны $AB = c$, $AC = b$ и площадь S. Точки M на луче AB и N на луче AC расположены так, что $AM = m$, $AN = n$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами B, C, M, N.

Указание. Пусть BB' — высота треугольника ABC, а NN' — общая высота треугольников AMN и ANB.

Тогда $S_{\Delta ANB} = \dfrac{1}{2}NN' \cdot C = \dfrac{1}{2}BB' \cdot n$, $S = S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BB' \cdot b$. Следовательно, $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}NN' \cdot m = \dfrac{m}{n}S_{\Delta ANB} = \dfrac{m}{c} \cdot \dfrac{n}{b}S_{\Delta ABC} = \dfrac{mn}{bc}S$.

15.** Выразите площадь параллелограмма через две его высоты h и H и периметр P.

Указание. Пусть H — длина высоты треугольника ABD, опущенная из вершины D, а h — длина высоты этого треугольни-

ка, проведенная из вершины B. В этом случае $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot H =$
$= \frac{1}{2}AD \cdot h$, $P = 2(AB + AD)$. Значит, $AD = \frac{H}{h}AB$, $P = 2(AB + \frac{H}{h}AB)$,
$AB = \frac{hP}{2(H+h)}$. Таким образом, $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = AB \cdot H = \frac{hHP}{2(H+h)}$.

18.* Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разбивается диагоналями на четыре треугольника — ABM, BCM, CDM, ADM, площади которых соответственно равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1S_3 = S_2S_4$.

Указание. $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta BCM} = S_{\Delta ADM} : S_{\Delta CDM}$.

19.* Выпуклый четырехугольник разбили диагоналями на четыре треугольника, подсчитали площадь каждого из треугольников и получили следующие значения: 1994 см^2, 1995 см^2, 1996 см^2, 1997 см^2. Докажите, что при подсчетах была допущена ошибка.

Указание. В задаче 18 было показано, что эти площади должны удовлетворять условию $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Надо показать, что это невозможно ни при каком выборе чисел S_1, S_2, S_3, S_4 из 1994, 1995, 1996, 1997. Если $S_1 = 1994$ — минимальное из этих чисел, то тогда S_3 должно равняться 1997 — максимальному из этих чисел. Но $1994 \cdot 1997 \neq 1995 \cdot 1996$, так как $\left(1995\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \neq \left(1995\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

20.** На рис. 3 точки M и N — середины сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что площадь четырехугольника $PMQN$ равна сумме площадей треугольников ABP и CDQ.

Указание. Пусть BB', MM' и CC' — высоты, опущенные на прямую AD. Тогда $MM' = \frac{1}{2}(BB' + CC')$, как средняя линия в трапеции $BCC'B'$. Значит, $S_{\Delta ABP} + S_{\Delta APN} + S_{\Delta NQD} + S_{\Delta CDQ} =$
$= S_{\Delta ABN} + S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2}AN \cdot BB' + \frac{1}{2}ND \cdot CC' =$
$= \frac{1}{4}AD \cdot (BB' + CC') = \frac{1}{2}AD \cdot MM' =$
$= S_{\Delta AMD} = S_{\Delta APN} + S_{\Delta NQD} + S_{PMQN}$.

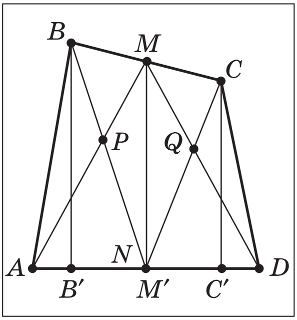


Рис. 3

Следовательно, $S_{PMQN} = S_{\Delta ABP} + S_{\Delta CDQ}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, на стороне AB выбираются точки M и N так, что точка M расположена между точками A и N. При каких отношениях $AM : MN : NB$ площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{3}S$?

1) $AM : MN : NB = 1 : 2 : 3$ 2) $AM : MN : NB = 5 : 4 : 3$
3) $AM : MN : NB = 5 : 3 : 1$ 4) $AM : MN : NB = 7 : 5 : 4$

Указание. Подходят те варианты, в которых длина MN составляет третью часть от длины AB, что соответствует тому, что в отношениях среднее число должно быть равным полусумме остальных.

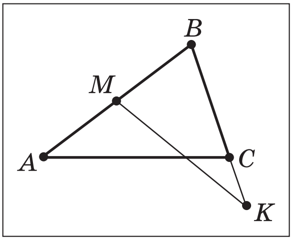


Рис. 4

2.4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, точка K расположена на продолжении стороны BC (рис. 4). При каких отношениях $CK : KB$ площадь треугольника MBK больше площади треугольника ABC?

1) $CK : KB = 3 : 4$
2) $CK : KB = 1 : 3$
3) $CK : KB = 11 : 18$
4) $CK : KB = 2 : 5$

Указание. Равенство площадей достигается при $BC = CK$ и больше, когда $BC < CK$, что соответствует $CK : KB > 1 : 2$.

§ 3. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Цель параграфа — обобщить понятие треугольника и четырехугольника, наметив индуктивный процесс; рассмотреть примеры пятиугольника и других многоугольников; при обобщении определить выпуклые и невыпуклые многоугольники, внутренние и внешние углы; привести формулу суммы внутренних углов и формулу суммы внешних углов для выпуклого многоугольника.

Особенности параграфа. Параграф служит естественным продолжением параграфа 1 и в нем закладываются основы индуктивного подхода к формированию понятия многоугольника. Здесь также особое внимание следует обратить на различие между выпуклыми и невыпуклыми многоугольниками, на понятие внутреннего угла в случае невыпуклого многоугольника.

Доказательство формулы суммы внутренних углов выпуклого многоугольника рекомендуется рассмотреть на примерах пятиугольника и шестиугольника. На третьем уровне рассматривается общее понятие выпуклой фигуры на плоскости.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: треугольник; четырехугольник.

Новые математические понятия и свойства: пятиугольник; шестиугольник; многоугольник; многоугольная область; граница многоугольника; выпуклый многоугольник; сумма внутренних углов выпуклого многоугольника; сумма внешних углов выпуклого многоугольника.

Вспомогательные понятия: выпуклая геометрическая фигура.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Сколько вершин, сколько сторон и сколько диагоналей имеет десятиугольник?

Ответ. 10 вершин, 10 сторон. Каждая вершина соединяется диагональю с 7 другими вершинами. При таком подсчете каждая диагональ считается два раза. Поэтому диагоналей $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 = 35$.

3.2. В каком случае четырехугольная область является пересечением полуплоскостей?

Вариант ответа. Полуплоскость есть выпуклая фигура в том смысле, что отрезок, соединяющий любые две ее точки целиком, лежит в полуплоскости. Пересечение (или общая часть) полуплоскостей — тоже выпуклая фигура. Поэтому четырехугольная область является пересечением полуплоскостей тогда и только тогда, когда она является выпуклой, то есть ограниченной выпуклым многоугольником.

3.3.* Какую многоугольную область ограничивает многоугольник, изображенный на рис. 1?

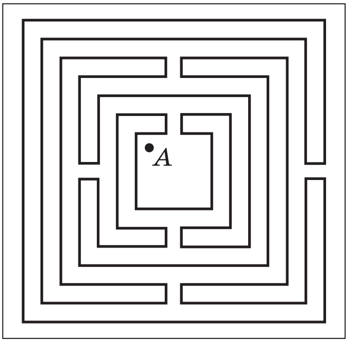


Рис. 1

Ответ. Прежде всего попытаемся выйти за пределы области, двигаясь из точки A и не пересекая указанной границы. Мы легко убеждаемся, что область ограничена многоугольником и точка A находится внутри многоугольника. Многоугольник имеет 52 вершины. Полезно раскрасить внутреннюю часть многоугольника одним цветом, а внешнюю часть другим цветом.

3.4. Что вы знаете о правильном шестиугольнике?

Варианты ответа. 1. Пусть A, B, C, D, G, E — вершины, O — центр правильного шестиугольника. Тогда все треугольники ABO, BCO, CDO, DGO, GEO — равносторонние.

2. Около правильного шестиугольника можно описать окружность, которая разделится вершинами на 6 равных дуг.

3.5.* Как доказать, что если взять две точки M и N выпуклой многоугольной области, то все точки отрезка MN содержатся в этой области?

Ответ. Пусть выпуклая многоугольная область D является общей частью полуплоскостей $a_1, \ldots, a_n$.

Это значит, что любая точка области D принадлежит всем полуплоскостям $a_1, \ldots, a_n$.

Если точки M, N принадлежат D, то M, N принадлежат α_i при любом i от 1 до n. Но если точки M и N принадлежат полуплоскости α_i, то и весь отрезок MN принадлежит этой полуплоскости. Поэтому MN содержится в α_i, $i = 1, \ldots, n$. Значит, MN содержится в D.

3.6.** Как доказать, что общая часть двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ. Пусть Φ_1, Φ_2 — выпуклые фигуры и точки M, N содержатся в общей части фигур Φ_1, Φ_2. Это означает, что точки M, N принадлежат Φ_1 и принадлежат Φ_2.

Так как фигура Φ_1 выпукла, то отрезок MN лежит в Φ_1. Аналогично отрезок MN лежит в Φ_2. Поэтому отрезок MN лежит в общей части фигур Φ_1, Φ_2, и поэтому общая часть этих фигур выпукла.

3.7. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Ответ. Нужно от суммы всех развернутых углов при каждой вершине отнять сумму всех внутренних углов. В итоге получим: $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 360°$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3.* На сторонах ромба $ABCD$ с острым углом в 60° строятся равные равнобедренные треугольники с основаниями, совпадающими со сторонами ромба. Выясните, какими могут быть углы этих равнобедренных треугольников, чтобы все их боковые стороны образовывали восьмиугольник, если известно, что:

а) все треугольники строятся вне ромба;

б) все треугольники строятся внутри ромба;

в) треугольники с основаниями AB и CD строятся вне ромба, а треугольники с основаниями BC и AD — внутри ромба.

Указание. а) В этом случае углы могут быть любыми; б) в этом случае углы при основаниях должны быть меньше $30°$; в) в этом случае углы при основаниях должны быть меньше $60°$.

4.** Внутри квадрата $ABCD$ расположен некоторый стоугольник, ограничивающий стоугольную область. Произвольную точку M плоскости соединили отрезком с вершиной A и подсчитали число точек пересечения отрезка MA с границей стоугольника. Докажите, что если точка M не лежит на границе стоугольника и число точек пересечения нечетно, то точка M лежит внутри стоугольной области.

Указание. Точка A лежит вне стоугольника. Если точка M тоже лежит вне стоугольника, то отрезок MA сколько раз «входит» в стоугольник, столько раз и «выходит» из него. Значит, в этом случае число точек пересечения будет четным.

7.** Существует ли правильный многоугольник с внутренним углом в $(180 - 10^{-6})$ градусов?

Указание. У правильного n-угольника внутренний угол равен

$$\frac{(n-2)}{n} \cdot 180° = 180 - \frac{360°}{n}.$$

Значит, требуемый правильный n угольник существует и имеет $n = 360 \cdot 10^6$ вершин.

8.** Докажите, что круг является выпуклой геометрической фигурой.

Указание. Пусть точки A и B лежат внутри круга радиуса r с центром в точке O. В этом случае $OA < r$ и $OB < r$. Пусть OH — перпендикуляр, опущенный на прямую AB. Если точка X лежит на отрезке AH, то по теореме Пифагора $OH < \sqrt{OH^2 + HX^2} = OX < \sqrt{OA^2 + HA^2} = OA < r$. Аналогично если X лежит на отрезке BH, то $OH < OX < OB < r$.

Пусть теперь X — произвольная точка отрезка AB. Тогда либо X принадлежит отрезку HA, либо X — точка отрезка HB. Но в каждом из этих двух случаев $OX < r$, то есть X лежит внутри круга радиуса r с центром в точке O.

9.** В каком случае объединение двух отрезков дает выпуклую геометрическую фигуру?

Указание. В случае, когда это объединение само является отрезком, то есть когда отрезки одной прямой имеют хотя бы одну общую точку.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Какое наибольшее число внутренних прямых углов может иметь шестиугольник?

1) три 2) четыре 3) пять 4) шесть

Указание. Шестиугольники, имеющие три или четыре прямых угла, представить нетрудно. Гораздо сложнее получить пример шестиугольника, у которого пять прямых углов, но при этом шестиугольник будет невыпуклым. Все углы шестиугольника прямыми быть не могут, так как это противоречит формуле суммы всех внутренних углов.

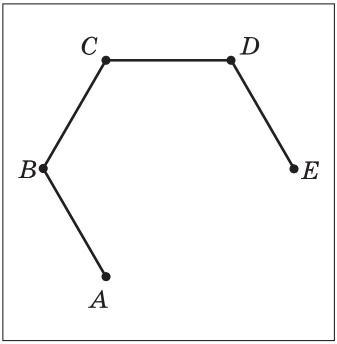


Рис. 2

2.2.* На рис. 2 изображены четыре стороны шестиугольника $ABCDEF$, причем известно, что $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 120°$. При каких из указанных значений величины угла DEF этот шестиугольник не может быть выпуклым?

1) $\angle DEF = 75°$

2) $\angle DEF = 85°$

3) $\angle DEF = 95°$

4) $\angle DEF = 105°$

Указание. Можно заметить, что угол AED равен $90°$, и если точка F будет внутри пятиугольника $ABCDE$, то шестиугольник $ABCDEF$ не будет выпуклым.

2.4. В окружность с центром O вписан некоторый правильный многоугольник, одной из сторон которого является отрезок AB. Какие из указанных значений может принимать величина угла AOB?

1) $6°$ 2) $7°$ 3) $8°$ 4) $9°$

Указание. Градусная мера такого угла, выраженная натуральным числом, должна быть делителем числа 360.

§ 4. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — рассмотреть некоторые способы вычисления площади многоугольника, в частности площади многоугольника, описанного вокруг окружности.

Особенности параграфа. Параграф служит естественным продолжением параграфа 2. На первом уровне в качестве общего способа вычисления площади многоугольника рассматривается деление многоугольника на треугольники. Применение этого способа к описанному многоугольнику позволяет получить формулу, выражающую площадь описанного многоугольника через радиус вписанной окружности и периметр многоугольника. На втором уровне для вычисления площадей рассматривается метод дополнения. На третьем уровне в качестве красивого и неожиданного результата рассматривается формула Пика для вычисления площади многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: многоугольник; описанный многоугольник.

Новые математические понятия и свойства: формула площади описанного многоугольника; формула площади треугольника через радиус вписанной окружности и периметр.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Как можно вычислять площадь фигуры, имеющей ось симметрии?

Ответ. Найти площадь части фигуры, лежащей по одну сторону от оси симметрии, и умножить на 2.

4.2.** Как с помощью формулы Пика объяснить, что на координатной плоскости треугольник с вершинами в точках $A(0; 7)$, $B(3; 5)$, $C(10; 0)$ не содержит ни одного узла клетчатой бумаги, кроме узлов, лежащих в его вершинах (рис. 1)?

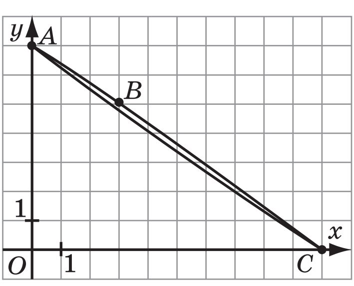


Рис. 1

Ответ. Вычислим в единицах, соответствующих длине стороны квадрата сетки, площадь S треугольника, как площадь фигуры, составленной из трапеции с основаниями 7, 5 и высотой 3, и прямоугольного треугольника с катетами 5 и 7, минус площадь прямоугольного треугольника с катетами 7 и 10. Получим: $S = \left(\frac{5+7}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5\right) - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 = 18 + \frac{35}{2} - 35 = \frac{1}{2}$.

По формуле Пика имеем: $M + \frac{K}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Так как $K = 3$, то $M = 0$, что и требовалось показать.

4.3.* Чему равна площадь шестиугольника $ABCDEF$ с точностью до 1 см^2?

Ответ. $107 \cdot \sqrt{3} = S$, $\sqrt{3} = 1{,}7320508$, $\sqrt{3} > 1{,}7320$, $\sqrt{3} < 1{,}7321$, $1{,}7321 \cdot 107 = 185{,}324 < 107 \cdot \sqrt{3} < 1{,}7321 \cdot 107 = 185{,}3347$, $185 < S < 186$. Первая цифра после запятой у числа $17\sqrt{3}$ меньше 5, поэтому приближенно с точностью до 1 см^2 эта площадь равна 185.

4.4. Чему равно значение периметра квадрата, выраженное через радиус вписанной окружности?

Ответ. $P = 8r$.

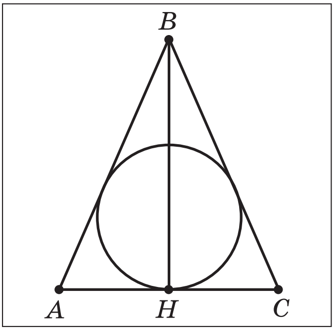


Рис. 2

4.5. Чему равен радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 10 см и боковой стороной 13 см?

Ответ. $AB = BC = 13$, $AC = 10$, $AH = HC = 5$, $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 12$ (рис. 2). $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60 = r \cdot p = r \cdot \left(\frac{13+13+10}{2}\right)$, $18r = 60$, $3r = 10$, $r = \frac{10}{3}$ (см).

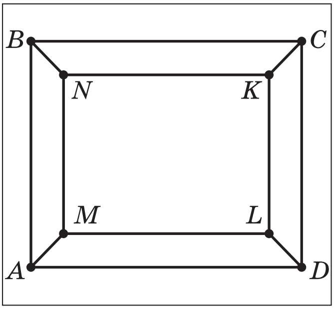


Рис. 3

4.6. В пункте рассматривалась фигура, изображенная на рис. 3, причем $AB = 6$ см, $BC = 11$ см. *Вопрос.* Как бы вы еще вычислили площадь этой рамки?

Вариант ответа. Площадь рамки можно найти как разность площадей двух прямоугольников размерами 11×6 и 9×4. Следовательно, площадь рамки равна $66 - 36 = 30$ (см^2), что совпадает с ответом, полученным в пункте.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3.* На рис. 4 равносторонние треугольники ABF и FCD расположены так, что точки A, F, D лежат на одной прямой. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AF = 5$ см, $FD = 3$ см.

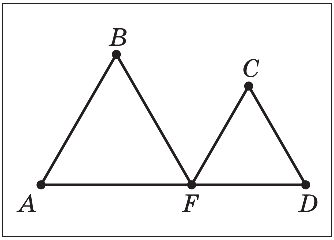


Рис. 4

Указание. Проблемы возникают только при вычислении площади треугольника BCF. Если через вершину C провести прямую, пересекающую отрезок BF в точке M, то $S_{\Delta BCF} : S_{\Delta MCF} = BF : MF = 5 : 3$. С учетом этого и используя формулу площади равностороннего треугольника, получаем: $S_{ABCD} = \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{49 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

4.* Два равных прямоугольных треугольника ABC и ACD имеют площадь 3 см^2 каждый и расположены так, как на рис. 5. Найдите площадь:

а) пересечения их треугольных областей;

б) объединения их треугольных областей.

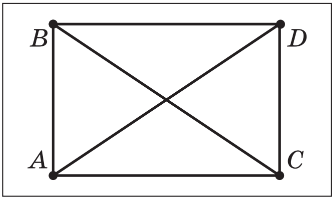


Рис. 5

Указание. а) К площади одного треугольника нужно прибавить половину этой площади; б) удвоить площадь одного треугольника.

5.* На сторонах прямоугольника $ABCD$ со сторонами a и b во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM, BCN, CDK, ADL. Найдите площадь четырехугольника $MNKL$.

Указание. У этого четырехугольника диагонали перпендикулярны.

11.* Середины сторон правильного шестиугольника последовательно соединены между собой, так что получается меньший шестиугольник. Найдите площадь меньшего шестиугольника, если: а) сторона большего шестиугольника равна 4 см; б) площадь большего шестиугольника равна $20\sqrt{3}$ см^2.

Указание. Обозначим в шестиугольнике $ABCDEF$ середины сторон AB и BC через M и N. Рассмотрим четырехугольник $OMBN$, площадь которого составляет шестую часть площади заданного шестиугольника, а площадь треугольника OMN составляет шестую часть от площади меньшего шестиугольника. Далее нужно установить, что $S_{\Delta MON} = \frac{3}{4} S_{MBON}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

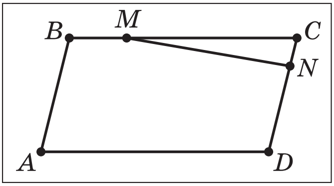


Рис. 6

1.4.* В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна 32 см^2, на сторонах BC и CD отмечены точки M и N так, что $BM : MC = CN : ND = 1 : 3$ (рис. 6). Чему равна площадь пятиугольника $ABMND$?

1) 28 см^2 2) 29 см^2
3) 30 см^2 4) 31 см^2

Указание. Точки M и N расположены на сторонах BC и CD соответственно треугольника BCD. Поэтому $S_{\Delta MCN} = \frac{NC}{BC} \cdot \frac{NC}{DC} S_{\Delta BCD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 3$.

2.2. Какие из указанных значений может иметь длина высоты, проведенной к стороне AB треугольника ABC, если известно, что $BC = \sqrt{10}$ см?

1) 2 см 2) 3 см 3) 4 см 4) 5 см

Указание. Длина этой высоты не может превышать длину стороны BC, так как $3 < \sqrt{10} < 4$.

2.4. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середина M стороны AD и некоторая внутренняя точка N стороны BC (рис. 7).

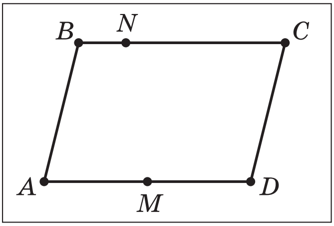


Рис. 7

Какие из указанных отношений не могут быть отношением площади трапеции $ABNM$ к площади трапеции $MNCD$?

1) 1 : 4 2) 1 : 3
3) 1 : 2 4) 2 : 3

Указание. Указанное отношение больше 1 : 3 и меньше 3 : 1.

Глава 14
ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Цель главы — ознакомить учащихся с элементарными принципами, которыми надо руководствоваться при проведении измерений или вычислений с использованием приближенных значений.

Особенности главы. В главе сочетается повествовательно-ознакомительная форма изложения материала со строгим обоснованием некоторых простейших правил измерений и вычислений, которыми руководствуются на практике. В отличие от абстрактных теорем приближенные вычисления всегда подчинены конкретной цели, причем точность вычислений диктуется практической целесообразностью. Поэтому много внимания уделено примерам и иллюстрациям из окружающей действительности. Отдельные факты, такие, как происхождение високосных лет, имеют не только иллюстративное, но и познавательное значение.

Наряду с материалом, вполне доступным для всех учащихся, в главе затрагиваются некоторые вопросы, глубокое понимание которых требует выхода за рамки школьной программы. В частности, это относится к знакомству с приближенными формулами дя вычисления отношения и извлечения корня квадратного из числа, близкого к единице. Здесь крайне желательно тщательное наблюдение за реакцией учеников, в случае необходимости — отказ от предложенной в учебнике схемы, обращение к опыту учащихся, поиск дополнительных примеров, демонстрирующих естественность применяемых правил.

§ 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ

Цель параграфа — познакомить учащихся с основными принципами, которых необходимо придерживаться при измерении величин, а также с возникающими при этом понятиями точных и приближенных значений; ввести понятия погрешности, абсолютной и относительной погрешности и их оценок; изучить способы записи точности измерения и точности измерительного прибора.

Особенности параграфа. Параграф имеет исключительно важное прикладное значение. При изучении этого материала следует обратить внимание учащихся на то, что при измерениях точное значение величины, вообще говоря, так и остается неизвестной, независимо от той точности, с которой проводятся измерения. Поэтому понятия точного значения величины, погрешности, абсолютной погрешности являются чисто теоретическими и служат для того, чтобы с их помощью разрабатывать математический аппарат, необходимый для получения практически значимого результата, позволяющего качественно выполнить ту или иную работу. В отличие от точных значений, оценки абсолютной и относительной погрешности — это вполне конкретные значения, которые можно вычислять на основе результатов измерения. Более того, оценки погрешностей могут зависеть от способа их получения, и в этом плане ставится и рассматривается задача о нахождении приближенных значений так, чтобы соответствующие оценки погрешностей были оптимальными.

Задачи к параграфу рассчитаны на осознанное восприятие изучаемого материала, и при выборе конкретных заданий учащимся желательно ориентироваться на то, что эти задачи не должны быть сложными для тех, кто хорошо разобрался с основными изучаемыми понятиями.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: приближение с избытком (сверху); приближение с недостатком (снизу); промежутки числовой прямой.

Новые математические понятия и свойства: приближенное значение; погрешность приближения; абсолютная погрешность приближения; оценка абсолютной погрешности.

Вспомогательные понятия: точность измерения; точность измерительного прибора.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. В каких единицах обычно измеряют площадь комнаты?

Ответ. В квадратных метрах.

1.2. Сколько учеников в классе, если их число больше 32 и меньше 35, причем девочек на 3 больше, чем мальчиков?

Ответ. Из условия можно сделать вывод, что общее число учеников нечетно. В указанный промежуток входит только одно нечетное число — число 33. Несмотря на кажущуюся неопределенность условия, ответ на вопрос вполне определенный.

1.3. Как объяснить, что в примере со взвешиванием яблока из пункта 1.2 абсолютная погрешность всякого приближения из промежутка [127; 128] не больше одного грамма?

Ответ. Абсолютная погрешность не превосходит длины указанного промежутка.

1.4.* При измерении отрезка получены значения: 82 мм — с недостатком и 83 мм — с избытком. Каковы приближенные значения длины отрезка, абсолютная погрешность которых не больше 0,7 мм?

Ответ. Абсолютная погрешность заданного приближения оценивается максимальной длиной частей, на которые это значение делит промежуток между приближениями снизу и сверху. С учетом этого получаем, что с заданной абсолютной погрешностью можно выбирать приближения из промежутка [82,3; 82,7].

1.5. Размер детали должен равняться $13 \pm 0{,}25$ мм, а при измерении штангенциркулем с точностью $\pm 0{,}1$ мм получилось 12,8 мм. Что следует сделать: принять деталь, забраковать ее или измерить еще раз более точным инструментом?

Ответ. Размер детали в миллиметрах, который можно принимать, принадлежит промежутку [12,75; 13,25]. По результатам измерений размер детали от 12,7 до 12,9 мм. Поэтому следует повторить измерение более точным инструментом.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.* Цена деления мензурки равна 2 мл. С какой точностью можно измерять этой мензуркой объемы жидкостей?

Указание. Получая какое-нибудь значение P объема в миллилитрах, мы можем гарантировать, что точное значение объема в пределах от $P - 2$ до $P + 2$. По-другому этот результат можно записать как $P \pm 2$ (мл).

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. При измерении некоторой величины получилось 8,3 с абсолютной погрешностью не более 0,15. Какие из приведенных чисел не могут быть точным значением измеряемой величины?

1) 8,1 2) 8,3 3) 8,5 4) 8,7

Указание. По смыслу оценки абсолютной погрешности получаем, что значения измеряемой величины не меньше $8{,}3 - 0{,}15 = 8{,}15$ и не больше $8{,}3 + 0{,}15 = 8{,}45$.

§ 2. ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Цель параграфа — познакомить учащихся с десятичными приближениями положительных и отрицательных значений величин.

Особенности параграфа. В параграфе продолжается изучение правил работы с приближенными значениями величин. От общего понятия приближения переходят к десятичным приближениям как наиболее важным в практической деятельности. Частично десятичные приближения сверху и снизу уже рассматривались в младших классах. Поэтому в начале изучения этого параграфа следует основательно вспомнить, как находятся десятичные приближения для положительных дробных чисел и для натуральных чисел, так как именно эти понятия служат основой изучаемого материала.

При рассмотрении десятичных приближений для отрицательных чисел необходимо обратить внимание на возникающее при этом различие в нахождении десятичных приближений снизу и сверху.

Существенной особенностью параграфа является то, что на втором уровне приводится общее определение десятичных приближений положительных чисел, использующее понятие целой части числа.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: приближенное значение; погрешность приближения; абсолютная погрешность приближения; оценка абсолютной погрешности; знакомство с примерами десятичных приближений.

Новые математические понятия и свойства: десятичное приближение сверху; десятичное приближение снизу; точность десятичного приближения.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Чему равна целая часть числа 0,999999?

Ответ. Нулю.

2.2. Чему равно десятичное приближение снизу для числа 0,999 с точностью до 1?

Ответ. 0.

2.3. Чему равно десятичное приближение снизу для числа 371,240001 с точностью до 10^{-3}?

Ответ. 371,24.

2.4. Чему равно десятичное приближение сверху для числа 371,240001 с точностью до 10^3?

Ответ. 1000.

2.5.* Чему равна целая часть числа $10^3 \cdot 2{,}71828$?

Ответ. 2718.

2.6. Может ли число 0 быть десятичным приближением с некоторой точностью для отрицательного числа?

Ответ. Может. Например, десятичное приближение сверху для числа –0,9 с точностью до 1 равно 0.

2.7. Какое из десятичных приближений отрицательного числа — сверху или снизу — может совпасть с этим числом?

Ответ. В соответствии с принятыми определениями для отрицательного числа иногда возможно только совпадение с его десятичным приближением сверху.

Указания к решению наиболее трудных задач.

11.* Найдите десятичные приближения снизу и сверху с точностью до 10^2 для числа $3333{,}3 + 333{,}33 + 33{,}333 + 3{,}3333 + 0{,}33333$.

Указание. Сначала вычислить сумму и получить 3703,62963. После этого найти десятичные приближения: 3700 и 3800.

12.*. Может ли для некоторого числа:

а) какое-нибудь его десятичное приближение снизу не являться его приближением снизу;

б) какое-нибудь его десятичное приближение сверху не являться его приближением сверху?

Приведите примеры.

Указание. Следует вспомнить определение соответствующих понятий и заметить, что приближение снизу всегда меньше числа, а десятичное приближение снизу для положительного числа иногда может совпадать с самим числом. В результате ответы должны быть такими: а) может, когда число положительно и его десятичное приближение снизу совпадает с самим числом;

б) может, когда число отрицательно и его десятичное приближение сверху совпадает с самим числом.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2.* Целые части каких из следующих чисел являются приближениями сверху для соответствующих обыкновенных дробей?

1) 52,16 для $\frac{317}{6}$ 2) 25,03 для $\frac{222}{9}$

3) 89,30 для $\frac{620}{7}$ 4) 90,22 для $\frac{999}{11}$

Указание. Для каждой из обыкновенных дробей найти целую часть. В нужных вариантах она меньше целой части первого числа.

2.3.* Дробные части каких из следующих чисел являются десятичными приближениями снизу до третьего знака после запятой соответствующих обыкновенных дробей?

1) 52,833 для $\frac{317}{6}$ 2) 24,666 для $\frac{222}{9}$

3) 150,166 для $\frac{1}{6}$ 4) 23,666 для $\frac{2}{3}$

Указание. Так как дробная часть числа меньше 1, то варианты 1 и 2 сразу не подходят. В варианте 3 второму числу соответствует бесконечная десятичная дробь 0,16666...; в варианте 4 второму числу соответствует бесконечная десятичная дробь 0,66666... .

2.4.* В каких случаях указанное натуральное число является десятичным приближением сверху для соответствующего второго числа?

1) 100 для 3 2) 1000 для 1222,8

3) 106 для 105 4) 206 для 205,1

Указание. Так как в тесте не указана точность десятичного приближения, то получаем следующее: в варианте 1 число 1000 является десятичным приближением сверху для числа 3 с точностью до 10^3; в варианте 2 вообще не является приближением сверху; в варианте 3 число 106 является десятичным приближением сверху для числа 105 с точностью до 1; в варианте 4 число 206 является десятичным приближением сверху для числа 205,1 с точностью до 1.

§ 3. ОКРУГЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Цель параграфа — познакомить учащихся с округлением результатов измерений и вычислений; изучить правило округления приближенного значения измеряемой величины.

Особенности параграфа. В параграфе продолжается изучение правил работы с приближенными значениями величин. Освоившись с десятичными приближениями, можно естественным образом переходить к изучению последующего материала: округлению чисел, округлению с точностью до указанного количества значащих цифр, правилу округления.

Понятие округления является непростым и иногда воспринимается с трудом не только учащимися, но и взрослыми. Дело в том, что округление до определенного разряда — это замена рассматриваемой приближенной величины одним из соответствующих двух десятичных приближений, и выбор десятичного приближения при округлении до определенного разряда зависит от цифры, стоящей в последующем меньшем разряде округляемого значения. Для упрощения восприятия правило округления до некоторого целого или до некоторого дробного разряда формулируется в виде трех случаев:

а) цифра последующего меньшего разряда меньше 5, и в этом случае результатом округления является соответствующее десятичное приближение снизу;

б) цифра последующего меньшего разряда больше 5, и в этом случае результатом округления является соответствующее десятичное приближение сверху;

в) цифра последующего разряда равна 5, и в этом случае результатом округления также является соответствующее десятичное приближение сверху.

Последний случай выделяется особо, так как иногда в этом случае применяются другие подходы к округлению, отличные от изложенного в учебнике.

В частности, когда при округлении цифра последующего меньшего разряда равна 5, то один из подходов связан со случайным выбором либо десятичного приближения снизу, либо десятичного приближения сверху, и такой подход иногда применяется при округлении значений с помощью некоторых компьютерных программ. Другой подход зависит от четности или нечетности цифры округляемого значения, предшествующей цифре 5. А именно если цифра четна, то за результат округления принимается соответствующее десятичное приближение снизу, а если нечетна — то десятичное приближение сверху. Такой подход иногда применяется в экономике.

На первом уровне главное внимание следует сосредоточить на изучении правила округления. На втором уровне учащиеся должны дополнительно оценивать погрешность, возникающую при округлении. Другие правила округления можно обсуждать на третьем уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: приближенное значение; погрешность приближения; десятичное приближение сверху; десятичное приближение снизу; абсолютная погрешность приближения; оценка абсолютной погрешности.

Новые математические понятия и свойства: округление до определенного разряда; правило округления.

Вспомогательные понятия: округление отрицательных значений.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Чему равен результат округления числа 3,87512 до второго разряда после запятой?

Ответ. 3,88.

3.2. Чему равен результат округления числа 3,1415926 до четвертого разряда после запятой?

Ответ. 3,1416.

3.3.* Чему равен результат округления числа 9,99999 до третьего разряда после запятой?

Ответ. 10,000.

3.4. Чему равен результат округления числа 120275,4999 до разряда единиц?

Ответ. 120 275.

3.5. Чему равен результат округления числа 204,2013 до разряда десятков?

Ответ. 200.

3.6.* Чему равны результаты округления числа 2013,2013 до разряда сотен и до разряда тысяч?

Ответ. Соответственно 2000 и 2000.

3.7. Чему равен результат округления числа –5,298176 до второго разряда после запятой?

Ответ. –5,30.

3.8.* Как с помощью степени числа 10 записать результат округления числа 10,01 до разряда единиц?

Ответ. $10 \cdot 10^0$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. Округлите числа до разряда единиц а — к.

Указание. Проблемы могут возникнуть при округлении отрицательных чисел. Например, для числа −25,49 по правилу округления получаем −25 с точностью до единиц. При этом погрешность $d = 25{,}49 - (-25) = -0{,}49$, а оценка абсолютной погрешности — не более 0,5.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из следующих чисел являются результатом округления числа 11,168 до некоторого разряда?

1) 11,16 2) 10 3) 11,20 4) 11,2

Указание. Воспользоваться правилом округления.

2.4. Какие из следующих округлений имеют абсолютную погрешность, большую 0,15?

1) округление 715,11 до 715

2) округление 816,68 до 816,7

3) округление 816,681 до 816,68

4) округление 815,32 до 820

Указание. Абсолютная погрешность — это не оценка абсолютной погрешности, а модуль разности между значением и указанным приближением.

§ 4. ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Цель параграфа — пояснить на примерах, что при сложении приближенных значений и умножении приближенного значения на фиксированное число погрешности могут «накапливаться»; вывести правила оценок погрешностей суммы и разности приближенных значений величин, а также произведения точного и приближенного значений.

Особенности параграфа. Изложение материала начинается с примера, который имеет не только чисто математическое, но и общеобразовательное значение. На примере летоисчисления показывается, что при сложении приближенных значений систематические ошибки накапливаются, что приводит к необходимости периодической корректировки календаря.

При изучении правил оценки погрешностей суммы и разности приближенных значений особое внимание нужно обратить на оценку погрешности при вычитании, так как соответствующее правило, вообще говоря, кому-то из учеников может показаться совершенно неожиданным: числа вычитаем, а оценки абсолютных погрешностей складываются.

Правило оценки произведения приближенного значения на фиксированное число с теоретической точки зрения получается достаточно просто. Однако его содержательный смысл приводит к тому, что получающиеся по этому правилу оценки требуют некоторой доработки, что демонстрируется на третьем уровне.

Задачи и упражнения для первого уровня носят тренировочный характер и в основном несложные. Для второго и третьего уровня предлагаются задачи, которые требуют хорошего понимания изучаемого материала.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства числовых неравенств; приближение; погрешность приближения; абсолютная погрешность; оценка абсолютной погрешности.

Новые математические понятия и свойства: правило оценки абсолютной погрешности при сложении; правило оценки абсолютной погрешности при вычитании; правило оценки абсолютной погрешности при умножении фиксированного числа на приближенное значение.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Через сколько лет (с учетом високосных) погрешность календаря превзойдет одни сутки?

Ответ. Из текста данного пункта следует, что продолжительность года более чем на 11 минут короче 365,25 суток. Поэтому за 4 года (с учетом одного високосного) реальное время «отстанет» от календаря более чем на 44 минуты. В сутках $24 \cdot 60 = 1440$ минут. Чтобы отставание превзошло одни сутки, достаточно 33 четырехлетий, или 132 лет.

4.2. Может ли абсолютная погрешность суммы оказаться меньше погрешностей отдельных слагаемых?

Ответ. Может. В самом деле, пусть точные значения двух слагаемых равны 2, но для первого выбрано приближение с избытком 2,1; а для второго — с недостатком 1,9. Сумма приближенных значений равна 2,1 + 1,9 = 4, то есть она совпадает с точным значением 2 + 2. Однако абсолютная погрешность каждого слагаемого равна 0,1.

4.3. Можно ли утверждать, что $a_1 < a_2$, если $a_1 = 2{,}05 \pm 0{,}1$, $a_2 = 2{,}15 \pm 0{,}1$?

Ответ. Вычислим разность $a_2 - a_1$. По правилу вычитания приближенных значений получим: $a_2 - a_1 = 2{,}15 - 2{,}05 \pm 0{,}2 = 0{,}1 \pm 0{,}2$. Иными словами, точное значение разности $a_2 - a_1$ принадлежит промежутку [–0,1; 0,3]. Так как этот промежуток содержит и положительные и отрицательные числа, то ничего определенного о знаке разности $a_2 - a_1$ сказать нельзя. Значит, нельзя с уверенностью заключить, что $a_1 < a_2$.

4.4.* Как оценить абсолютную погрешность формулы $S = 3{,}14 \cdot R^2$ для площади круга, если $R = 5$ см?

Ответ. По правилу оценки абсолютной погрешности произведения приближенного значения и фиксированного числа получаем оценку $0{,}01 \cdot 25 = 0{,}25$ (см^2).

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. От дома до школы 500 м, а длина шага у Пети 50 ± 5 см. Сосчитав число шагов по дороге в школу и обратно, Петя обнаружил, что результаты различаются на 220 шагов. Когда он рассказал об этом Васе, тот ответил, что этого не может быть. Как вы думаете, кто из них прав?

Указание. По условию длина шага у Пети от 0,45 до 0,55 м. Отсюда следует, что число шагов не более $\frac{200}{0{,}45}$ и не менее $\frac{200}{0{,}55}$. Так как $\frac{200}{0{,}45} - \frac{200}{0{,}55} < 200$, то прав Вася.

6.** Найдите произведение приближенного значения $2{,}5 \pm 0{,}05$ и числа 1,23. Какова абсолютная погрешность результата вычисления?

Указание. Непосредственное умножение приводит к результату $3{,}075 \pm 0{,}0615$.

7.** Радиус окружности равен 1,2 ± 0,04 см. Найдите длину этой окружности с абсолютной погрешностью не более 0,5 см.

Указание. Периметр квадрата со стороной a равен $4a$. Поэтому ответ можно получить по правилу произведения приближенного значения и фиксированной величины.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4.* При измерении получено $a = 2 \pm 0{,}1$ и $b = 3 \pm 0{,}2$. Чему равно значение $3a + 2b$?

1) $12 \pm 0{,}3$ 2) $12 \pm 0{,}5$
3) $2 \pm 0{,}7$ 4) $2 \pm 0{,}9$

Указание. Оценка абсолютной погрешности равна $3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2$.

2.3. Какие из расстояний могут быть пройдены в одном направлении за 100 шагов, если длина каждого шага $48 \pm 2{,}5$ см?

1) 45 м 2) 47 м 3) 49 м 4) 51 м

Указание. По правилу произведения приближенного значения и фиксированной величины пройденное расстояние 4800 ± 250 см или $48 \pm 2{,}5$ м.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДЕЛЕНИЯ

Цель параграфа — начать знакомство учащихся с некоторыми методами вычислительной математики на примере приближенной формулы $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

Особенности параграфа. Можно считать, что рассматриваемый материал имеет в основном иллюстративный характер для применения правил приближенных вычислений, изучавшихся в данной главе. На примере формулы $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ показывается, что если от точных вычислений переходить к приближенным, то в некоторых случаях трудоемкие вычисления можно заменить на существенно более простые. Рассматриваемая формула пригодна только для достаточно малых значений x (в данном случае считается, что $|x| \le \frac{1}{2}$). Тем не менее во многих задачах, где не требуется высокой точности, рассматриваемая формула дает вполне приемлемый результат. К тому же при этом тратится гораздо меньше сил и времени на выполнение самих вычислений.

Несмотря на то что рассматриваемая формула принимается без доказательства, для нее приводится таблица оценки погрешностей в зависимости от значения переменной x. Наличие такой таблицы позволяет во всех рассматриваемых примерах получать вполне конкретные оценки погрешностей получаемых приближенных результатов. Это вполне соответствует тому, как математика применяется в прикладных областях. И в этом смысле в параграфе продолжает воспитываться математическая культура при проведении приближенных вычислений.

На первом уровне рассматриваются примеры и задачи на непосредственное применение приближенной формулы $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$. На втором уровне дополнительно изучается применение этой формулы к вычислению отношения чисел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: абсолютная погрешность; правила оценки абсолютной погрешности при выполнении арифметических действий.

Новые математические понятия и свойства: приближенная формула; погрешность приближенной формулы; приближенная формула $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

Вспомогательные понятия: таблица погрешностей приближенной формулы.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Можно ли доверять формуле $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ при больших значениях $|x|$?

Ответ. При больших по модулю значениях x эта формула дает результат, очень далекий от точного. Например, при $x = 99$ отношение $\frac{1}{1+x}$ равно 0,01, а значение выражения $1 - x$ равно (−98). Аналогично если $x = -101$, то $\frac{1}{1+x} \approx -0{,}01$, а $1 - x = 102$.

5.2. Какую приближенную формулу для вычисления $\frac{1}{1-x}$ вы можете предложить?

Ответ. $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$.

5.3.** Как показать, что любая дробь $b : a$ после нескольких умножений (или делений) на 2 ее числителя и знаменателя приводится к виду, когда возможно применение формулы $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$?

Ответ. Для применения этой формулы с известными погрешностями надо, чтобы после домножения числа a на число вида 2^m, где m — целое число, произведение $a \cdot 2^m$ попало в интервал $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Далее можно рассуждать так.

Если $0 < a < 1$, то числа a, $2a$, $4a, \ldots$ неограниченно возрастают, а поэтому с какого-то момента каждое из них будет больше $\frac{1}{2}$. Первое из таких чисел будет не больше 1. Действительно, если предположить, что $a \cdot 2^m > 1$, то тогда $a \cdot 2^{m-1} > \frac{1}{2}$, а значит, число $a \cdot 2^m$ не является первым из чисел указанного вида, которое больше $\frac{1}{2}$. Следовательно, при $0 < a < 1$ всегда можно найти такое неотрицательное целое число m, что число $a \cdot 2^m$ попадает в промежуток $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$, а поэтому попадает и в интервал $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

При $1 < a < \frac{3}{2}$ формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ можно применять сразу.

Если $a \geq \frac{3}{2}$, то числа a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{4}$, ... становятся все меньше и приближаются к нулю. Поэтому с какого-то момента каждое из них будет меньше $\frac{3}{2}$. Первое из таких чисел будет не меньше $\frac{3}{4}$. Действительно, если предположить, что $\frac{a}{2^m} < \frac{3}{4}$, то тогда $\frac{a}{2^{m-1}} < \frac{3}{2}$, а значит, число $\frac{a}{2^m}$ не является первым из чисел указанного вида, которое меньше $\frac{3}{2}$. Следовательно, при $a > \frac{3}{2}$ также можно найти такое натуральное число m, что число $\frac{a}{2^m}$ попадает в промежуток $\left[\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$, а поэтому попадает и в интервал $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

В принципе, при ответе на этот вопрос от учащихся не обязательно требовать полных объяснений. Вполне достаточно, если они смогут разобраться с той особенностью, что при $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ вообще ничего не нужно делать; при $a \geq \frac{1}{2}$ последовательно домножать на 2; при $a \leq \frac{1}{2}$ последовательно делить на 2.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.** Найдите приближенное значение частного и оцените абсолютную погрешность.

а) 4,34 : 2,08 б) 5,88 : 1,91 в) 7,15 : 5,02 г) 6,48 : 2,97

Указание. Решения этих задач аналогичны решению, приведенному в пункте, с заменой задач на следующие:

а) 2,17 : 1,04 б) 2,94 : 0,905 в) 1,43 : 1,004 г) 2,16 : 0,99

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Используя таблицу оценки погрешностей

$\|x\|$	0,5	0,2	0,07	0,02	0,007	0,002
P	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001

и приближенную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ определите, какая из приведенных погрешностей точнее всего соответствует приближенному значению 0,97 для величины, обратной к числу 1,03.

1) с абсолютной погрешностью 0,1
2) с абсолютной погрешностью 0,01
3) с абсолютной погрешностью 0,001
4) с абсолютной погрешностью 0,0001

Указание. Так как $1,03 - 1 = 0,03$ и $0,02 < 0,03 < 0,07$, то по таблице подходит оценка погрешности, равная 0,01.

1.4. Используя таблицу оценки погрешностей

$\|x\|$	0,5	0,2	0,07	0,02	0,007	0,002
p	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001

и приближенную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ определите, какой из приведенных результатов точнее всего соответствует приближенному значению величины, обратной к 1,001.

1) 0,99 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01
2) 0,909 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,001
3) 0,999 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,00001
4) 0,9999 с абсолютной погрешностью, меньшей 0,000001

Указание. Так как $1,001 - 1 = 0,001$ и $0,001 < 0,002$, то по таблице можно получить только оценку погрешности, записанную в последнем столбце.

§ 6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Цель параграфа — продолжить знакомство с методами вычислительной математики на примере еще одной приближенной формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Особенности параграфа. На примере извлечения квадратных корней при помощи калькулятора демонстрируется, что приближенные вычисления вовсе не такая простая задача, как может показаться. Далее рассматривается проблема, связанная с сохранением в памяти калькулятора всех приближенных значений корней, и особого внимания заслуживает приведенный способ оценки числа всех вариантов. Далее рассматривается формула, с помощью которой можно находить приближенные значения квадратных корней из чисел, близких к единице. При этом, как и в предыдущем параграфе, приводится таблица оценки погрешностей. На третьем уровне рассматривается применение изучаемой формулы к приближенному извлечению квадратных корней из расширенного множества чисел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: знакомство с двоичной системой счисления; пример приближенной формулы; погрешность приближенной формулы; абсолютная погрешность; таблица погрешностей приближенной формулы.

Новые математические понятия и свойства: приближенная формула $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

Вспомогательные понятия: бит; байт; килобайт; мегабайт.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

6.1. Что называется квадратным корнем из положительного числа a?

Ответ. Вообще говоря, квадратным корнем из a называется всякое число b, квадрат которого равен a. Можно показать, что из любого положительного числа a извлекается единственный положительный корень. Это значение называется арифметическим квадратным корнем и обозначается через $\sqrt{a}$.

6.2. Сколько байтов содержится в одном мегабайте?

Ответ. 1 048 576 байтов.

6.3. Какое приближение дает формула $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ — с избытком или с недостатком?

Ответ. Возведем в квадрат обе части данной формулы: $1 + x \approx 1 + x + \frac{x^2}{4}$. Так как $\frac{x^2}{4} \leq 0$, то правая часть получившегося приближенного равенства не меньше левой. Значит, исходная формула дает для квадратного корня приближение с избытком.

6.4. Когда погрешность формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ не превосходит 0,006? Укажите какой-нибудь подходящий промежуток значений x.

Ответ. По приведенной в учебнике таблице погрешностей можно для значений x указать промежуток $(-0{,}07;\ 0{,}07)$. Тогда погрешность не превосходит 0,001 и тем более не превосходит 0,006. Более широкий промежуток для значений x по приведенной таблице погрешностей указать невозможно.

6.5.** Как при помощи формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ приближенно вычислить $\sqrt{15}$?

Ответ. $\sqrt{15} = \sqrt{16-1} = \sqrt{16 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right)} = 4\sqrt{1 - \frac{1}{16}} \approx 4\left(1 - \frac{1}{32}\right) = 4 - 0{,}125 = 3{,}875$. Так как $\left|-\frac{1}{16}\right| = 0{,}0625 < 0{,}07$, то погрешность не превосходит $4 \cdot 0{,}001 = 0{,}004$. Следовательно, $\sqrt{15} = 3{,}875 \pm 0{,}004$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. * Сколько битов понадобится для записи чисел?

а) 6 б) 12 в) 49 г) 72 д) 127 е) 128 ё) 129

Указание. а) $6 = (110)_2$; б) $12 = (1100)_2$; в) $49 = (110001)_2$; г) $72 = (10010000)_2$; д) $6 = (1111111)_2$; е) $128 = (100000000)_2$; ё) $129 = (100000001)_2$.

5.** Найдите приближенную длину диагонали квадрата, сторона которого равна 3 см. Оцените с помощью таблицы абсолютную погрешность приближения.

$\lvert x\rvert$	0,5	0,2	0,07	0,02	0,007	0,002
p	0,05	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

Указание. Можно воспользоваться тем, что $\sqrt{600} = \sqrt{25^2 \cdot (1 - 0{,}04)}$.

6.** Найдите приближенную длину диагонали прямоугольника со сторонами 5 см и 6 см. Какова погрешность этого приближения?

Указание. Можно воспользоваться тем, что $\sqrt{61} = \sqrt{8^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{64}\right)}$.

7.* Отложите на числовой оси число $\sqrt{2}$ с помощью циркуля и линейки.

Указание. Сначала построить квадрат со стороной 1, затем его диагональ взять в качестве радиуса окружности и с центром в начале координат провести окружность этого радиуса.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Какое из приведенных значений лучше всего принять за приближенное значение $\sqrt{35}$?

1) $6 - \frac{1}{6}$ 2) $6 - \frac{1}{12}$ 3) $6 - \frac{1}{24}$ 4) $6 - \frac{1}{36}$

Указание. $\sqrt{35} = \sqrt{6^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{36}\right)} \approx 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 36}\right)$.

2.4.** Какие из приближенных равенств можно получить с помощью приближенной формулы $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$?

1) $\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{4}$ 2) $\sqrt{26} = 5{,}1$

3) $\sqrt{50} = 7 + \frac{1}{7}$ 4) $\sqrt{80} = 9 - \frac{1}{18}$

Указание. Для упрощения сначала можно получить приближенную формулу $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Найдите величину плоского угла, составленного из двух плоских углов величиной $58°37'$ и $67°56'$.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов в 11 раз меньше суммы двух других углов. Найдите величину наибольшего острого угла этого треугольника.

3. На плоскости провели три луча OA, OB, OC так, что $\angle AOB = 37°$, $\angle BOC = 56°$. Какую величину может иметь плоский угол, ограниченный лучами OA и OC?

4.* На плоскости из точки O последовательно провели луч OA и затем еще 20 лучей так, что угол между соседними лучами равен $21°$, и получили луч OB. Найдите величину двух плоских углов, образуемых лучами OA и OB

5.** Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{2\pi}{5}$.

Вариант 2

1. Найдите величину плоского угла, составленного из двух плоских углов величиной $74°29'$ и $48°43'$.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов в 7 раз меньше суммы двух других углов. Найдите величину наибольшего острого угла этого треугольника.

3. На плоскости провели три луча OA, OB, OC так, что $\angle AOB = 28°$, $\angle BOC = 63°$. Какую величину может иметь плоский угол, ограниченный лучами OA и OC?

4.* На плоскости из точки O последовательно провели луч OA и затем еще 21 луч так, что угол между соседними лучами равен $19°$, и получили луч OB. Найдите величину двух плоских углов, образуемых лучами OA и OB

5.** Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{3\pi}{10}$.

Вариант 3

1. Найдите величину плоского угла, составленного из двух плоских углов величиной $37°46'$ и $84°57'$.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов в 9 раз меньше суммы двух других углов. Найдите величину наибольшего острого угла этого треугольника.

3. На плоскости провели три луча OA, OB, OC так, что $\angle AOB = 58°$, $\angle BOC = 39°$. Какую величину может иметь плоский угол, ограниченный лучами OA и OC?

4.* На плоскости из точки O последовательно провели луч OA и затем еще 23 луча так, что угол между соседними лучами равен $17°$, и получили луч OB. Найдите величину двух плоских углов, образуемых лучами OA и OB

5.** Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{4\pi}{5}$.

Вариант 4

1. Найдите величину плоского угла, составленного из двух плоских углов величиной $53°48'$ и $72°53'$.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов в 16 раз меньше суммы двух других углов. Найдите величину наибольшего острого угла этого треугольника.

3. На плоскости провели три луча OA, OB, OC так, что $\angle AOB = 48°$, $\angle BOC = 62°$. Какую величину может иметь плоский угол, ограниченный лучами OA и OC?

4.* На плоскости из точки O последовательно провели луч OA и затем еще 16 лучей так, что угол между соседними лучами равен $24°$, и получили луч OB. Найдите величину двух плоских углов, образуемых лучами OA и OB

5.** Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $\frac{7\pi}{10}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Запишите 2^{30} в виде степени числа:

а) с основанием 4 б) с основанием $\frac{1}{8}$

в) с основанием 32 г) с основанием 0,25

2. Найдите все натуральные числа n, при которых $500 < 2^n < 5000$.

3. При $a \neq 0$ и целом m упростите выражение

$$(a^{m-1})^{m+1} \cdot (a^{-1})^{m-1} \cdot (a^{-m})^m.$$

4. Представьте $\left(3\frac{3}{8}\right)^2$ в виде куба некоторого дробного числа.

5. Найдите, во сколько раз число $0{,}49 \cdot 10^{16}$ больше числа $7 \cdot 2^8 \cdot 5^{12}$.

Вариант 2

1. Запишите 3^{60} в виде степени числа:

а) с основанием $\frac{1}{9}$ б) с основанием 27

в) с основанием $\frac{1}{81}$ г) с основанием 243

2. Найдите все натуральные числа n, при которых $25 < 3^n < 1000$.

3. При $a \neq 0$ и целом m упростите выражение

$$(a^{2-m})^{m+2} \cdot (a^{-1})^{2-m} \cdot (a^{-m})^m.$$

4. Представьте $\left(6\frac{1}{4}\right)^3$ в виде квадрата некоторого положительного дробного числа.

5. Найдите, во сколько раз число $0{,}27 \cdot 10^{14}$ больше числа $9 \cdot 2^5 \cdot 5^{12}$.

Вариант 3

1. Запишите 4^{15} в виде степени числа:

а) с основанием 8 б) с основанием 0,5

в) с основанием 32 г) с основанием 0,125

2. Найдите все натуральные числа n, при которых $200 < 2^n < 3000$.

3. При $a \neq 0$ и целом m упростите выражение

$$(a^{m-2})^{m+2} \cdot (a^{-1})^{m-2} \cdot (a^{-m})^m.$$

4. Представьте $\left(2\frac{10}{27}\right)^2$ в виде куба некоторого дробного числа.

5. Найдите, во сколько раз число $0{,}36 \cdot 10^{15}$ больше числа $3 \cdot 2^9 \cdot 5^{11}$.

Вариант 4

1. Запишите 9^{30} в виде степени числа:

а) с основанием $\dfrac{1}{3}$ б) с основанием 27

в) с основанием $\dfrac{1}{243}$ г) с основанием 81

2. Найдите все натуральные числа n, при которых $30 < 3^n < 2000$.

3. При $a \neq 0$ и целом m упростите выражение

$$(a^{1-m})^{m+1} \cdot (a^{-1})^{1-m} \cdot (a^{-m})^{m}.$$

4. Представьте $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^3$ в виде квадрата некоторого положительного дробного числа.

5. Найдите, во сколько раз число $1{,}21 \cdot 10^{11}$ больше числа $11 \cdot 2^7 \cdot 5^9$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $4x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 2$ и $y = 3$.

2. Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(a - 4b) + 2(a - 3b) + 3(a - 2b) + 4(a - b)$.

3. Докажите тождество $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2 = 8xy$.

4. Найдите два различных выражения, квадрат каждого из которых равен $4a^2 - 12ab + 9b^2$.

5.* Докажите тождество

$$(x^2 - 2)^2 - x^2 = (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2).$$

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $x^2 + 2xy + 4y^2$ при $x = -2$ и $y = 3$.

2. Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(5a - b) + 2(4a - b) + 3(3a - b) + 4(2a - b)$.

3. Докажите тождество $(2x - y)^2 = (2x + y)^2 - 8xy$.

4. Найдите два различных выражения, квадрат каждого из которых равен $25m^2 - 20mn + 4n^2$.

5.* Докажите тождество

$$(x^2 - 3)^2 - 4x^2 = (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3).$$

Вариант 3

1. Найдите значение выражения $4x^2 + 2xy + y^2$ при $x = 3$ и $y = -4$.

2. Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(a - 4b) + 2(2a - 3b) + 3(3a - 2b) + 4(4a - b)$.

3. Докажите тождество $(x + 2y)^2 - 8xy = (2y - x)^2$.

4. Найдите два различных выражения, квадрат каждого из которых равен $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

5.* Докажите тождество

$$(2x^2 - 1)^2 - x^2 = (2x - 1)(x - 1)(x + 1)(2x + 1).$$

Вариант 4

1. Найдите значение выражения $4x^2 - 2xy + y^2$ при $x = -5$ и $y = -2$.

2. Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(5a - 4b) + 2(4a - 3b) + 3(3a - 2b) + 4(2a - b)$.

3. Докажите тождество $(y - 2x)^2 - (2x + y)^2 = -8xy$.

4. Найдите два различных выражения, квадрат каждого из которых равен $4p^2 - 20pq + 25q^2$.

5.* Докажите тождество

$$(3x^2 - 1)^2 - 4x^2 = (3x - 1)(x - 1)(x + 1)(3x + 1).$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Треугольники ABC и MNK равны, и при этом соответственными вершинами являются точки A и M, B и N, C и K. Точка P на отрезке AB и точка X на отрезке MN выбраны так, что $AP : PB = MX : XN = 2 : 3$. Докажите, что $\Delta APC = \Delta MXK$.

2. На окружности с центром O выбраны последовательно точки A, B, C, D, E так, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 30°$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta BCE$.

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см.

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 36 см^2, на продолжении стороны AC выбрана точка M так, что $CM = \frac{3}{4} AC$. Найдите площадь треугольника ABM.

5.* В треугольнике ABC, площадь которого равна U, на сторонах AB, BC, AC выбраны соответственно точки M, N, K так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника MNK.

Вариант 2

1. Треугольники ABC и MNK равны, и при этом соответственными вершинами являются точки A и M, B и N, C и K. Точка P на отрезке AB и точка X на отрезке MN выбраны так, что $AP : PB = MX : XN = 3 : 1$. Докажите, что $\Delta BPC = \Delta NXK$.

2. На окружности с центром O выбраны последовательно точки A, B, C, D, E так, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 30°$. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BDE$.

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 24 см и боковой стороной 15 см.

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 25 см^2, на продолжении стороны AC выбрана точка M так, что $CM = \frac{2}{5}AC$. Найдите площадь треугольника ABM.

5.* В треугольнике ABC, площадь которого равна U, на сторонах AB, BC, AC выбраны соответственно точки M, N, K так, что $AM = MB$, $BN : NC = CK : KA = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника MNK.

Вариант 3

1. Треугольники ABC и MNK равны, и при этом соответственными вершинами являются точки A и M, B и N, C и K. Точка P на отрезке AB и точка X на отрезке MN выбраны так, что $AP : PB = MX : XN = 3 : 5$. Докажите, что $\Delta APC = \Delta MXK$.

2. На окружности с центром O выбраны последовательно точки A, B, C, D, E так, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 30°$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta BDE$.

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 12 см и боковой стороной 10 см.

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 35 см^2, на продолжении стороны AC выбрана точка M так, что $CM = \frac{3}{5}AC$. Найдите площадь треугольника ABM.

5.* В треугольнике ABC, площадь которого равна U, на сторонах AB, BC, AC выбраны соответственно точки M, N, K так, что $AM : MB = BN : NC = 1 : 4$, $CK = KA$. Найдите площадь треугольника MNK.

Вариант 4

1. Треугольники ABC и MNK равны, и при этом соответственными вершинами являются точки A и M, B и N, C и K. Точка P на отрезке AB и точка X на отрезке MN выбраны так, что $AP : PB = MX : XN = 5:4$. Докажите, что $\Delta BPC = \Delta NXK$.

2. На окружности с центром O выбраны последовательно точки A, B, C, D, E так, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 30°$. Докажите, что $\Delta BCE = \Delta ACD$.

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 18 см и боковой стороной 15 см.

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна 48 см^2, на продолжении стороны AC выбрана точка M так, что $CM = \frac{5}{6}AC$. Найдите площадь треугольника ABM.

5.* В треугольнике ABC, площадь которого равна U, на сторонах AB, BC, AC выбраны соответственно точки M, N, K так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника MNK.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Решите уравнение $(5x - 7) = 3(3x + 2)$.

2. Решите уравнение $2(3((2x - 1) + 3) - x) = 52$.

3. Найдите, при каких значениях a уравнение $(a - 2)x + 4 = (5 - a)x + 3$ не имеет решений.

4. Решите уравнение $(x - 2)(2x + 1) = (2x - 3)(x + 1)$.

5. Брусок металла, содержащего 20% меди, сплавили с бруском металла, содержащего 70% меди, и получили 7 кг сплава, содержащего 35% меди. Найдите массы первоначально взятых брусков.

Вариант 2

1. Решите уравнение $(3x + 8) = 4(2x - 1)$.

2. Решите уравнение $3(2((3x + 1) - 2) - x) = 39$.

3. Найдите, при каких значениях a уравнение $(3 - a)x - 2 = (a - 4)x - 1$ не имеет решений.

4. Решите уравнение $(x + 1)(2x - 5) = (2x + 1)(x - 4)$.

5. Брусок металла, содержащего 30% меди, сплавили с бруском металла, содержащего 60% меди, и получили 8 кг сплава, содержащего 48% меди. Найдите массы первоначально взятых брусков.

Вариант 3

1. Решите уравнение $(7x + 4) = 2(5x + 3)$.

2. Решите уравнение $2(2((3x - 2) + 4) - x) = 48$.

3. Найдите, при каких значениях a уравнение $(a + 3)x + 4 = (2 - a)x + 5$ не имеет решений.

4. Решите уравнение $(x - 1)(2x + 3) = (2x - 1)(x + 5)$.

5. Брусок металла, содержащего 40% меди, сплавили с бруском металла, содержащего 70% меди, и получили 6 кг сплава, содержащего 54% меди. Найдите массы первоначально взятых брусков.

Вариант 4

1. Решите уравнение $(11x - 8) = 5(3x - 2)$.

2. Решите уравнение $3(3((2x + 3) - 1) - x) = 63$.

3. Найдите, при каких значениях a уравнение $(4 - a)x - 3 = (a - 5)x - 4$ не имеет решений.

4. Решите уравнение $(x + 2)(2x - 3) = (2x + 1)(x - 3)$.

5. Брусок металла, содержащего 20% меди, сплавили с бруском металла, содержащего 60% меди, и получили 9 кг сплава, содержащего 28% меди. Найдите массы первоначально взятых брусков.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. Нарисуйте две параллельные прямые и третью, пересекающую их, прямую. Обозначьте буквами точки пересечения прямых, вспомогательные точки на прямых и укажите все пары накрест лежащих углов.

2. Пятьдесят параллельных между собой прямых пересекают двадцать пять параллельных между собой прямых. Найдите число получающихся точек пересечения прямых.

3. Параллельные отрезки AB и CD расположены так, что отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники AMB и CMD имеют попарно равные углы.

4. В треугольнике ABC, у которого $\angle ABC + \angle BAC = 130°$, параллельно стороне AB проводится прямая, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите, чему равна сумма углов AMN и BNM.

5.* Дан угол BAC величиной $36°$, и на его стороне AC выбрана точка M. Найдите, сколько раз в полуплоскости с границей AC и содержащей луч AB нужно от луча MA отложить последовательно углы по $12°$, чтобы получился луч, параллельный лучу AB. Ответ нужно обосновать.

Вариант 2

1. Нарисуйте две параллельные прямые и третью, пересекающую их, прямую. Обозначьте буквами точки пересечения прямых, вспомогательные точки на прямых и укажите все пары соответственных углов.

2. Девяносто параллельных между собой прямых пересекают тридцать пять параллельных между собой прямых. Найдите число получающихся точек пересечения прямых.

3. Параллельные отрезки AB и CD расположены так, что отрезки AC и BD не пересекаются. Докажите, что сумма величин углов ABC, BCD, CDA и DAB равна $360°$.

4. В треугольнике ABC параллельно стороне AB проводится прямая, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, и известно, что $\angle AMN + \angle BNM = 200°$. Найдите, чему равна сумма углов ABC и BAC.

5.* Дан угол BAC величиной $48°$, и на его стороне AC выбрана точка M. Найдите, сколько раз в полуплоскости с границей AC и содержащей луч AB нужно от луча MA отложить последовательно углы по $6°$, чтобы получился луч, параллельный лучу AB. Ответ нужно обосновать.

Вариант 3

1. Нарисуйте две параллельные прямые и третью, пересекающую их, прямую. Обозначьте буквами точки пересечения прямых, вспомогательные точки на прямых и укажите все пары внутренних односторонних углов.

2. Восемьдесят параллельных между собой прямых пересекают сорок пять параллельных между собой прямых. Найдите число получающихся точек пересечения прямых.

3. Параллельные отрезки AB и CD расположены так, что прямые AC и BD пересекаются в точке M, не принадлежащей отрезку AC. Докажите, что треугольники AMB и CMD имеют попарно равные углы.

4. В треугольнике ABC, у которого $\angle ABC + \angle BAC = 110°$, параллельно стороне AB проводится прямая, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите, чему равна сумма углов AMN и BNM.

5.* Дан угол BAC величиной $24°$, и на его стороне AC выбрана точка M. Найдите, сколько раз в полуплоскости с границей AC и содержащей луч AB нужно от луча MA отложить последовательно углы по $13°$, чтобы получился луч, параллельный лучу AB. Ответ нужно обосновать.

Вариант 4

1. Нарисуйте две параллельные прямые и третью, пересекающую их, прямую. Обозначьте буквами точки пересечения прямых, вспомогательные точки на прямых и укажите все пары внешних односторонних углов.

2. Семьдесят параллельных между собой прямых пересекают пятьдесят пять параллельных между собой прямых. Найдите число получающихся точек пересечения прямых.

3. Параллельные отрезки AB и CD расположены так, что прямые AC и BD не пересекаются. Докажите, что сумма величин углов ABC, BCD, CDA и DAB равна $360°$.

4. В треугольнике ABC параллельно стороне AB проводится прямая, которая пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, и известно, что $\angle AMN + \angle BNM = 220°$. Найдите, чему равна сумма углов ABC и BAC.

5.* Дан угол BAC величиной $12°$, и на его стороне AC выбрана точка M. Найдите, сколько раз в полуплоскости с границей AC и содержащей луч AB нужно от луча MA отложить последовательно углы по $14°$, чтобы получился луч, параллельный лучу AB. Ответ нужно обосновать.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1

1. Решите неравенство $3x + 5 > 7x - 8$.

2. Решите неравенство $2x - (3x - (4x - 5)) \le 1$.

3. Решите неравенство $(x - 2)(x - 5) < (x - 4)(x - 7)$.

4. Решите неравенство $\frac{2}{3}x + 7 \le \frac{3}{7}x - 1$.

5. Найдите наибольшее целое число x, которое является решением неравенства $8x - 11 \le 15x + 7$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $4x - 3 < 9x + 11$.

2. Решите неравенство $5x - (4x - (3x - 2)) \ge 3$.

3. Решите неравенство $(x - 3)(x + 2) < (x - 5)(x + 1)$.

4. Решите неравенство $2 - \frac{3}{5}x \le 3 - \frac{1}{7}x$.

5. Найдите наименьшее целое число x, которое является решением неравенства $3x - 7 \ge 15 - 4x$.

Вариант 3

1. Решите неравенство $2x - 9 > 5x + 7$.

2. Решите неравенство $3x - (4x - (5x - 6)) \le 2$.

3. Решите неравенство $(x + 1)(x - 6) < (x + 3)(x - 5)$.

4. Решите неравенство $\frac{3}{4}x - 2 \ge \frac{2}{5}x + 3$.

5. Найдите наибольшее целое число x, которое является решением неравенства $7x + 18 \le 1 - 2x$.

Вариант 4

1. Решите неравенство $5x + 1 < 8x - 9$.

2. Решите неравенство $6x - (5x - (4x - 3)) \ge 4$.

3. Решите неравенство $(x + 4)(x + 3) < (x + 7)(x + 1)$.

4. Решите неравенство $4 - \frac{1}{7}x \ge 7 - \frac{5}{6}x$.

5. Найдите наименьшее целое число x, которое является решением неравенства $9 - 5x \ge 23 - 8x$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1

1. Решите неравенство $3{,}8x - 1{,}3 < 5{,}3x + 1{,}4$.

2. Решите неравенство $x^2 \geq (x - 1)(x + 7)$.

3.* Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $a^2 \cdot x \geq ax + 1 - 2a$ не имеет корней.

4.* Найдите все x, при которых одновременно выполняются неравенства $5x - 3 \geq 4x - 1$ и $7x - 4 < 5x + 3$.

5.* Докажите, что если $2a + 3b \geq 8$ и $4a + b \geq 6$, то $3a + 2b \geq 7$.

6.** Докажите, что если $x > 0$, то $9x + \dfrac{1}{x} \geq 6$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $5{,}3x + 1{,}5 > 6{,}8x - 2{,}4$.

2. Решите неравенство $x^2 < (x + 1)(x - 7)$.

3.* Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $a^2 \cdot x + 2a \geq ax + 1$ является промежуток $(-\infty; \infty)$.

4.* Найдите все x, при которых одновременно выполняются неравенства $4x + 8 > 3x + 9$ и $3x + 5 \leq x + 8$.

5.* Докажите, что если $3a + 2b \leq 5$ и $5a + 4b \leq 7$, то $4a + 3b \leq 6$.

6.** Докажите, что если $x < 0$, то $9x + \dfrac{4}{x} \leq -12$.

Вариант 3

1. Решите неравенство $4{,}2x + 3{,}6 < 2{,}7x + 0{,}9$.

2. Решите неравенство $x^2 \geq (x - 2)(x + 5)$.

3.* Найдите значения a, при каждом из которых неравенство $a^2 \cdot x \leq ax + 2a - 1$ не имеет корней.

4.* Найдите все x, при которых одновременно выполняются неравенства $3x + 1 \leq 4x + 3$ и $5x + 8 < 3x + 7$.

5.* Докажите, что если $6a + b \geq 3$ и $2a + 5b \geq 5$, то $4a + 3b \geq 4$.

6.** Докажите, что если $x > 0$, то $4x + \dfrac{9}{x} \geq 12$.

Вариант 4

1. Решите неравенство $6{,}4x - 2{,}3 > 4{,}9x + 1{,}9$.

2. Решите неравенство $x^2 \leq (x + 2)(x - 5)$.

3.* Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $a^2 \cdot x + 1 \leq ax + 2a$ является промежуток $(-\infty; \infty)$.

4.* Найдите все x, при которых одновременно выполняются неравенства $5x - 2 < 6x - 5$ и $2x + 3 \geq 4x - 4$.

5.* Докажите, что если $4a + b \leq 3$ и $2a + 7b \leq 9$, то $3a + 4b \leq 6$.

6.** Докажите, что если $x < 0$, то $x + \dfrac{1}{4x} \leq -1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N на сторонах AB и CD выбраны соответственно так, что $AM : MB = CN : ND = 3 : 2$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ является параллелограммом.

2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 5$ см, $BC = 6$ см и $\angle ABC = 135°$.

3. Нарисуйте параллелограмм, выберите одну из его вершин и постройте второй параллелограмм, симметричный первому относительно этой вершины. Обозначьте буквами на чертеже все полученные точки и перечислите все четверки точек, которые являются вершинами параллелограммов.

4.* В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке P. Найдите периметр этого параллелограмма, если известно, что $BP = 12$ см, $PC = 7$ см.

5.* Внутри параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 18 см^2, поставлена точка M, и известно, что площадь треугольника ABM равна 4,3 см^2. Найдите, чему равна площадь треугольника CDM.

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N на сторонах AB и CD выбраны соответственно так, что $AM : MB = CN : ND = 4 : 3$. Докажите, что четырехугольник $BMDN$ является параллелограммом.

2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 7$ см, $AD = 6$ см и $\angle BAD = 45°$.

3. Нарисуйте параллелограмм, выберите одну из его вершин и постройте второй параллелограмм, симметричный первому относительно этой вершины. Обозначьте буквами на чертеже все полученные точки и перечислите все четверки точек, которые являются вершинами параллелограммов.

4.* В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает продолжение стороны BC в точке P. Найдите периметр этого параллелограмма, если известно, что $BP = 12$ см, $PC = 7$ см.

5.* Внутри параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 22 см^2, поставлена точка M, и известно, что площадь треугольника ADM равна 6,7 см^2. Найдите, чему равна площадь треугольника BCM.

Вариант 3

1. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N на сторонах AB и CD выбраны соответственно так, что $AM : MB = CN : ND = 2 : 5$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ является параллелограммом.

2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 5$ см, $BC = 4$ см и диагональ BD перпендикулярна к стороне AD.

3. Нарисуйте параллелограмм, выберите одну из его вершин и постройте второй параллелограмм, симметричный первому относительно этой вершины. Обозначьте буквами на чертеже все полученные точки и перечислите все четверки точек, которые являются вершинами параллелограммов.

4.* В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке P. Найдите периметр этого параллелограмма, если известно, что $BP = 14$ см, $PC = 9$ см.

5.* Внутри параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 26 см^2, поставлена точка M, и известно, что площадь треугольника BCM равна 7,2 см^2. Найдите, чему равна площадь треугольника ADM.

Вариант 4

1. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N на сторонах AB и CD выбраны соответственно так, что $AM : MB = CN : ND = 1 : 4$. Докажите, что четырехугольник $BMDN$ является параллелограммом.

2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 3$ см, $AD = 5$ см и диагональ AC перпендикулярна к стороне AB.

3. Нарисуйте параллелограмм, выберите одну из его вершин и постройте второй параллелограмм, симметричный первому относительно этой вершины. Обозначьте буквами на чертеже все полученные точки и перечислите все четверки точек, которые являются вершинами параллелограммов.

4.* В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает продолжение стороны BC в точке P. Найдите периметр этого параллелограмма, если известно, что $BP = 14$ см, $PC = 9$ см.

5.* Внутри параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 16 см^2, поставлена точка M, и известно, что площадь треугольника CDM равна 4,3 см^2. Найдите, чему равна площадь треугольника ABM.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Вариант 1

1. На стороне AB угла BAC расположены точки H и E так, что $AH : AE = 5 : 8$, и на стороне AC выбраны точки F и G так, что отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка AF, если известно, что $AG = 10$ см.

2. На отрезке AB точки C и D выбраны так, что точка C лежит между точками A и D, причем $AC : CD = CD : DB = 2 : 3$. Найдите отношение $AD : BC$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 7 см и 9 см. Найдите, чему равен периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M середина стороны BC, отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите отношение $BP : PD$.

5.* В треугольнике ABC проведена медиана BM, на стороне AB поставлена точка K так, что $AK : KB = 2 : 3$, и на стороне AC найдена точка L так, что середина отрезка KL находится на медиане BM. Найдите отношение $AL : LC$.

6.** В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка M, которая не является серединой этой стороны. Затем через точку M параллельно AC проводится первая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной BC параллельно AB проводится вторая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AC параллельно BC проводится третья прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AB параллельно AC проводится четвертая прямая и т. д. Докажите, что при этом седьмая прямая совпадет с первой прямой.

Вариант 2

1. На стороне AB угла BAC расположены точки H и E так, что $AH : AE = 7 : 10$, и на стороне AC выбраны точки F и G так, что отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка FG, если известно, что $AG = 12$ см.

2. На отрезке AB точки C и D выбраны так, что точка C лежит между точками A и D, причем $AC : CD = CD : DB = 3 : 4$. Найдите отношение $CD : AB$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 15 см и 9 см. Найдите, чему равен периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M середина стороны CD, отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите отношение $BP : PD$.

5.* В треугольнике ABC проведена медиана BM, на стороне AB поставлена точка K так, что $AK : KB = 4 : 3$, и на стороне AC найдена точка L так, что середина отрезка KL находится на медиане BM. Найдите отношение $AL : LC$.

6.** В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка M, которая не является серединой этой стороны. Затем через точку M параллельно AC проводится первая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной BC параллельно AB проводится вторая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AC параллельно BC проводится третья прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AB параллельно AC проводится четвертая прямая и т. д. Докажите, что при этом седьмая прямая совпадет с первой прямой.

Вариант 3

1. На стороне AB угла BAC расположены точки H и E так, что $AH : AE = 2 : 5$, и на стороне AC выбраны точки F и G так, что отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка FG, если известно, что $AG = 18$ см.

2. На отрезке AB точки C и D выбраны так, что точка C лежит между точками A и D, причем $AC : CD = CD : DB = 2 : 5$. Найдите отношение $CD : AB$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 11 см и 13 см. Найдите, чему равен периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M середина стороны AD, отрезки BM и AC пересекаются в точке P. Найдите отношение $AP : PC$.

5.* В треугольнике ABC проведена медиана BM, на стороне AB поставлена точка K так, что $AK : KB = 3 : 2$, и на стороне AC найдена точка L так, что середина отрезка KL находится на медиане BM. Найдите отношение $AL : LC$.

6.** В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка M, которая не является серединой этой стороны. Затем через точку M параллельно AC проводится первая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной BC параллельно AB проводится вторая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AC параллельно BC проводится третья прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AB параллельно AC проводится четвертая прямая и т. д. Докажите, что при этом седьмая прямая совпадет с первой прямой.

Вариант 4

1. На стороне AB угла BAC расположены точки H и E так, что $AH : HE = 3 : 7$, и на стороне AC выбраны точки F и G так, что отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка FG, если известно, что $AG = 15$ см.

2. На отрезке AB точки C и D выбраны так, что точка C лежит между точками A и D, причем $AC : CD = CD : DB = 4 : 3$. Найдите отношение $AD : BC$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 7 см и 15 см. Найдите, чему равен периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M середина стороны CD, отрезки BM и AC пересекаются в точке P. Найдите отношение $AP : PC$.

5.* В треугольнике ABC проведена медиана BM, на стороне AB поставлена точка K так, что $AK : KB = 3 : 4$, и на стороне AC найдена точка L так, что середина отрезка KL находится на медиане BM. Найдите отношение $AL : LC$.

6.** В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка M, которая не является серединой этой стороны. Затем через точку M параллельно AC проводится первая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной BC параллельно AB проводится вторая прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AC параллельно BC проводится третья прямая, через точку пересечения этой прямой со стороной AB параллельно AC проводится четвертая прямая и т. д. Докажите, что при этом седьмая прямая совпадет с первой прямой.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Вариант 1

1. Постройте график линейной функции $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

2. Найдите, при каком значении переменной x значение линейной функции $y = -\frac{4}{3}x + 7$ равно 5.

3. Найдите значение k, если известно, что график функции $y = kx + 2$ проходит через точку $A(2; 14)$.

4. Найдите линейную функцию, у которой графиком является прямая с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3}$, проходящая через точку $A(6; -7)$.

5.* Найдите линейную функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки $A(2; -3)$ и $B(-1; 2)$.

Вариант 2

1. Постройте график линейной функции $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

2. Найдите, при каком значении переменной x значение линейной функции $y = \frac{5}{7}x - 3$ равно -2.

3. Найдите значение k, если известно, что график функции $y = kx - 3$ проходит через точку $A(4; 17)$.

4. Найдите линейную функцию, у которой графиком является прямая с угловым коэффициентом $k = \frac{2}{3}$, проходящая через точку $A(9; -4)$.

5. Найдите линейную функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки $A(3; 1)$ и $B(-2; -2)$.

Вариант 3

1. Постройте график линейной функции $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. Найдите, при каком значении переменной x значение линейной функции $y = \frac{4}{9}x - 3$ равно 3.

3. Найдите значение k, если известно, что график функции $y = kx - 1$ проходит через точку $A(5; -16)$.

4. Найдите линейную функцию, у которой графиком является прямая с угловым коэффициентом $k = -\frac{2}{3}$, проходящая через точку $A(-6; 8)$.

5.* Найдите линейную функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки $A(2; 3)$ и $B(-3; -1)$.

Вариант 4

1. Постройте график линейной функции $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. Найдите, при каком значении переменной x значение линейной функции $y = -\frac{5}{9}x + 4$ равно -3.

3. Найдите значение k, если известно, что график функции $y = kx + 3$ проходит через точку $A(-2; 11)$.

4. Найдите линейную функцию, у которой графиком является прямая с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{3}$, проходящая через точку $A(-12; 5)$.

5.* Найдите линейную функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки $A(3; -2)$ и $B(-2; 1)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Вариант 1

1. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с центром F в точке P. Найдите, чему равен радиус окружности, если известно, что $AF = 17$ см, $AP = 15$ см.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 2,1 см, 2,8 см и гипотенузой 3,5 см.

3. Окружность касается всех сторон четырехугольника $ABCD$, у которого $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $CD = 4$ см. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Две окружности с радиусами 3 см и 9 см касаются прямой m в точках A и B, расположены в разных полуплоскостях относительно прямой m, и расстояние между центрами окружностей равно 13 см. Найдите длину отрезка AB.

5.* Две окружности с центрами E и F касаются сторон одного угла и не пересекаются. Внутренняя касательная этих окружностей пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что углы EMF и ENF прямые.

Вариант 2

1. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с центром F в точке P. Найдите, чему равен радиус окружности, если известно, что $AF = 26$ см, $AP = 24$ см.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 1,8 см, 2,4 см и гипотенузой 3 см.

3. Окружность касается всех сторон четырехугольника $ABCD$, у которого $BC = 8$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Две окружности с радиусами 3 см и 9 см касаются друг друга и касаются прямой m в точках A и B. Найдите длину отрезка AB.

5.* Две окружности с центрами E и F касаются сторон одного угла и не пересекаются. Внутренняя касательная этих окружностей пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что $EM^2 + MF^2 = EN^2 + NF^2$.

Вариант 3

1. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с центром F в точке P. Найдите, чему равен радиус окружности, если известно, что $AF = 25$ см, $AP = 24$ см.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 2,7см, 3,6 см и гипотенузой 4,5 см.

3. Окружность касается всех сторон четырехугольника $ABCD$, у которого $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $CD = 6$ см. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Две окружности с радиусами 5 см и 7 см касаются прямой m в точках A и B, расположены в разных полуплоскостях относительно прямой m, и расстояние между центрами окружностей равно 13 см. Найдите длину отрезка AB.

5.* Две окружности с центрами E и F касаются сторон одного угла и не пересекаются. Внутренняя касательная этих окружностей пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что $\angle EMF = \angle ENF$.

Вариант 4

1. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с центром F в точке P. Найдите, чему равен радиус окружности, если известно, что $AF = 34$ см, $AP = 16$ см.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 3,3 см, 4,4 см и гипотенузой 5,5 см.

3. Окружность касается всех сторон четырехугольника $ABCD$, у которого $BC = 10$ см, $CD = 7$ см, $AD = 8$ см. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Две окружности с радиусами 6 см и 24 см касаются друг друга и прямой m в точках A и B. Найдите длину отрезка AB.

5.* Две окружности с центрами E и F касаются сторон одного угла и не пересекаются. Внутренняя касательная этих окружностей пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что $\angle MEN + \angle MFN = 180°$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Вариант 1

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 3y = 12, \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 123x + 124y = 370, \\ 124x + 125y = 373 \end{cases}$

4. Найдите и запишите множество всех решений системы уравнений: $\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = \dfrac{11}{15}, \\ \dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{7}{15} \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ -x - 4y = 1 \end{cases}$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - 4y = 6, \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 132x + 133y = 398, \\ 133x + 134y = 401 \end{cases}$

4. Найдите и запишите множество всех решений системы уравнений: $\begin{cases} 6x - 3y = 9, \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 1\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{2}{x+y} + \dfrac{3}{x-y} = 1\dfrac{5}{6} \end{cases}$

Вариант 3

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 9x + 2y = 2, \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - 3y = 6, \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 116x - 117y = 350, \\ 117x - 118y = 353 \end{cases}$

4. Найдите и запишите множество всех решений системы уравнений: $\begin{cases} 6x + 2y = 4, \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{7}{15}, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 1\dfrac{4}{15} \end{cases}$

Вариант 4

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 5x - 3y = 3, \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + 4y = 6, \\ 4x + y = 3 \end{cases}$

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases}141x - 142y = 424,\\ 142x - 143y = 427\end{cases}$

4. Найдите и запишите множество всех решений системы уравнений: $\begin{cases}3x - 9y = 12,\\ 2x - 6y = 8\end{cases}$

5. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = \dfrac{5}{12},\\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = \dfrac{11}{12}\end{cases}$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Вариант 1

1. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, у которого $AB = BC = 5$ см, $CD = AD = 12$ см, $BD = 13$ см.

2. В треугольнике ABC, у которого $\angle BAC = 64°$, $\angle BCA = 80°$, биссектрисы AL и BK пересекаются в точке F. Найдите величину всех внутренних углов четырехугольника $CKFL$.

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой три стороны имеют длину по 8 см, а длина четвертой стороны равна 12 см.

4.* В шестиугольнике $ABCDEF$ внутренние углы при вершинах A, C, E равны по 70°, а при вершинах B, D, F внутренние углы также равны. Найдите величину каждого из этих углов.

5.* В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна 48 см^2, на сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM : MC = 2 : 1$, $CN : ND = 3 : 1$. Найдите площадь пятиугольника $ABMND$.

Вариант 2

1. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, у которого $AB = AD = 6$ см, $BC = CD = 8$ см, $AC = 10$ см.

2. В треугольнике ABC, у которого $\angle BAC = 82°$, $\angle BCA = 50°$, биссектрисы AL и BK пересекаются в точке F. Найдите величину всех внутренних углов четырехугольника $CKFL$.

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой три стороны имеют длину по 6 см, а длина четвертой стороны равна 10 см.

4.* В шестиугольнике $ABCDEF$ внутренние углы при вершинах A, C, E равны по $75°$, а при вершинах B, D, F внутренние углы также равны. Найдите величину каждого из этих углов.

5.* В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна 80 см^2, на сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM : MC = 3 : 1$, $CN : ND = 3 : 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABMND$.

Вариант 3

1. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, у которого $AB = BC = 9$ см, $CD = AD = 12$ см, $BD = 15$ см.

2. В треугольнике ABC, у которого $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 84°$, биссектрисы AL и BK пересекаются в точке F. Найдите величину всех внутренних углов четырехугольника $CKFL$.

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой три стороны имеют длину по 10 см, а длина четвертой стороны равна 14 см.

4.* В шестиугольнике $ABCDEF$ внутренние углы при вершинах A, C, E равны по $80°$, а при вершинах B, D, F внутренние углы также равны. Найдите величину каждого из этих углов.

5.* В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна 60 см^2, на сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM : MC = 3 : 2$, $CN : ND = 2 : 1$. Найдите площадь пятиугольника $ABMND$.

Вариант 4

1. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, у которого $AB = AD = 12$ см, $CD = BD = 5$ см, $AC = 13$ см.

2. В треугольнике ABC, у которого $\angle BAC = 80°$, $\angle BCA = 54°$, биссектрисы AL и BK пересекаются в точке F. Найдите величину всех внутренних углов четырехугольника $CKFL$.

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой три стороны имеют длину по 5 см, а длина четвертой стороны равна 7 см.

4.* В шестиугольнике $ABCDEF$ внутренние углы при вершинах A, C, E равны по $85°$, а при вершинах B, D, F внутренние углы также равны. Найдите величину каждого из этих углов.

5.* В параллелограмме $ABCD$, площадь которого равна 36 см^2, на сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и N так, что $BM : MC = 3 : 1$, $CN : ND = 2 : 1$. Найдите площадь пятиугольника $ABMND$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

Вариант 1

1. Для результата измерения в 5368,25 грамма найдите десятичное приближение сверху с точностью до 10 граммов.

2. Укажите погрешность для результата 638,79 при измерении величины, равной 637,93.

3. Запишите с оценкой погрешности разность $a - b$ приближенных значений, если $a = 29{,}7 \pm 0{,}17$, $b = 35{,}1 \pm 0{,}25$.

4. Запишите результат округления значения (–0,17265) до разряда тысячных.

5. Укажите для числа $\frac{2}{7}$ десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 0,01.

6. С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение отношения 16 : 16,01.

7.** С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение для $\sqrt{290}$.

Вариант 2

1. Для результата измерения в 4901,36 грамма найдите десятичное приближение снизу с точностью до 100 граммов.

2. Укажите погрешность для результата 52,98 при измерении величины, равной 53,17.

3. Запишите с оценкой погрешности разность $a - b$ приближенных значений, если $a = 34{,}2 \pm 0{,}07$, $b = 46{,}7 \pm 0{,}09$.

4. Запишите результат округления значения (–2,38749) до разряда сотых.

5. Укажите для числа $\frac{3}{7}$ десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 0,01.

6. С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение отношения 8 : 8,03.

7.** С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение для $\sqrt{360}$.

Вариант 3

1. Для результата измерения в 1585,92 грамма найдите десятичное приближение сверху с точностью до 100 граммов.

2. Укажите погрешность для результата 176,12 при измерении величины, равной 175,86.

3. Запишите с оценкой погрешности разность $a - b$ приближенных значений, если $a = 52{,}5 \pm 0{,}27$, $b = 58{,}3 \pm 0{,}14$.

4. Запишите результат округления значения $(-0{,}0856)$ до третьего разряда после запятой.

5. Укажите для числа $\frac{4}{7}$ десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 0,01.

6. С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение отношения 5 : 5,09.

7.** С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение для $\sqrt{730}$.

Вариант 4

1. Для результата измерения в 3452,76 грамма найдите десятичное приближение сверху с точностью до 10 граммов.

2. Укажите погрешность для результата 96,83 при измерении величины, равной 97,05.

3. Запишите с оценкой погрешности разность $a - b$ приближенных значений, если $a = 61{,}4 \pm 0{,}09$, $b = 69{,}3 \pm 0{,}15$.

4. Запишите результат округления значения $(-5{,}7162)$ до второго разряда после запятой.

5. Укажите для числа $\frac{5}{7}$ десятичные приближения сверху и снизу с точностью до 0,01.

6. С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение отношения 25 : 25,01.

7.** С помощью приближенной формулы найдите приближенное значение для $\sqrt{840}$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Вычислите: а) $2 \cdot 2^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^2$ б) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^{-2}$ в) $\left(\frac{25}{64}\right)^{-2} \cdot 2^{-6}$

2. Упростите $7a^3b^{-2} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-3} : (ab^{-3})^2$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3. Произведите указанные действия, предполагая, что значения переменных не равны нулю: $\left(\left(\frac{3a^{-1}bx^{-2}c^2}{2x^{-3}yca^{-2}}\right)^2\right)^{-1}$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = -\frac{2}{3}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

5. Найдите два различных дробных числа, квадрат которых равен $2^6 \cdot 3^{-4}$.

Вариант 2

1. Вычислите: а) $2 \cdot 5^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ б) $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-3}$ в) $\left(\frac{16}{27}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$

2. Упростите $9 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{-3} \cdot (x^{-3}y)^{-1} : (y^{-1}z)^{-2}$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

3. Произведите указанные действия, предполагая, что значения переменных не равны нулю: $\left(\left(\frac{2a^{-2}bx^{-3}c^4}{3x^{-2}yc^3a^{-1}}\right)^{-1}\right)^3$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = \frac{2}{7}$ и знаменателем $q = -\frac{1}{2}$.

5. Найдите два различных дробных числа, квадрат которых равен $3^6 \cdot 2^{-4}$.

Вариант 3

1. Вычислите: а) $2^{-3} + 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$ б) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}\right)^{-1}$ в) $\left(\frac{9}{32}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$

2. Упростите $a^2 \cdot \left(\frac{1}{3}b\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} : (b^{-1}a^{-3})^2$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3. Произведите указанные действия, предполагая, что значения переменных не равны нулю: $\left(\left(\dfrac{4a^{-2}b^2x^{-1}c^3y}{3x^{-3}y^{-2}b^4a^{-2}}\right)^{-3}\right)^2$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = -\dfrac{2}{7}$ и знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$.

5. Найдите два различных дробных числа, квадрат которых равен $2^8 \cdot 3^{-6}$.

Вариант 4

1. Вычислите: а) $5^{-2} + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$ б) $\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-4}\right)^{-1}$ в) $\left(\dfrac{25}{32}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^3$

2. Упростите $4 \cdot \left(\dfrac{z}{x^3}\right)^{-1} \cdot (xy^{-2})^{-2} : (y^{-1}z^2)^{-1}$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

3. Произведите указанные действия, предполагая, что значения переменных не равны нулю: $\left(\left(\dfrac{3a^{-1}bx^{-2}cy^{-1}}{4x^{-3}y^{-2}b^2a^{-3}}\right)^2\right)^{-1}$.

4. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = 1\dfrac{1}{3}$ и знаменателем $q = -\dfrac{1}{2}$.

5. Найдите два различных дробных числа, квадрат которых равен $3^8 \cdot 2^{-6}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Запишите $(2a - b)^3$ в виде произведения двух многочленов ненулевой степени.

2. Вычислите $1\,000\,567^2 - 1\,000\,565^2$.

3. Упростите $(x + 6y)^2 + (3x - 2y)^2$.

4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$$(x - 1)(x + 3)(x + 1).$$

5. С помощью формулы степени бинома запишите $\left(\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{3}b\right)^4$ в виде суммы одночленов.

Вариант 2

1. Запишите $(b - 2a)^3$ в виде произведения двух многочленов ненулевой степени.

2. Вычислите $2\,000\,345^2 - 2\,000\,343^2$.

3. Упростите $(3a + 2b)^2 + (6a - b)^2$.

4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$$(x - 3)(x - 1)(x + 1).$$

5. С помощью формулы степени бинома запишите $\left(3x - \frac{1}{2}y\right)^4$ в виде суммы одночленов.

Вариант 3

1. Запишите $(a - 2b)^3$ в виде произведения двух многочленов ненулевой степени.

2. Вычислите $1\,000\,987^2 - 1\,000\,985^2$.

3. Упростите $(3x - 4y)^2 + (6x + 2y)^2$.

4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$$(x + 4)(x + 1)(x - 1).$$

5. С помощью формулы степени бинома запишите $\left(\frac{1}{3}a - 2b\right)^4$ в виде суммы одночленов.

Вариант 4

1. Запишите $(2b - a)^3$ в виде произведения двух многочленов ненулевой степени.

2. Вычислите $2\,000\,765^2 - 2\,000\,763^2$.

3. Упростите $(2a - 6b)^2 + (4a + 3b)^2$.

4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$$(x + 1)(x - 1)(x - 4).$$

5. С помощью формулы степени бинома запишите $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)^4$ в виде суммы одночленов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Решите уравнение $2 \cdot (5x + 3) = 3(x - 2)$.

2. Решите уравнение $\frac{x - 2}{5} = \frac{x + 4}{7}$.

3. Решите уравнение $(x + 3)^2 - (x + 1)^2 = 11^2$.

4. Имеется 300 г раствора, содержащего 5% соли. Найдите, сколько к нему нужно добавить раствора, содержащего 2% соли, чтобы получить раствор, содержащий 4% соли.

5. Двигаясь с некоторой постоянной скоростью, из пункта A в пункт B можно доехать за 45 мин. Если увеличить скорость движения на 8 км/ч, то на весь путь потребуется на 5 мин меньше. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

Вариант 2

1. Решите уравнение $3 \cdot (4 - x) = 5(x + 3)$.

2. Решите уравнение $\dfrac{3 - x}{7} = \dfrac{5 - x}{6}$.

3. Решите уравнение $(x - 5)^2 - (x - 3)^2 = 14^2$.

4. Имеется 300 г раствора, содержащего 4% соли. Найдите, сколько к нему нужно добавить раствора, содержащего 1% соли, чтобы получить раствор, содержащий 3% соли.

5. Двигаясь с некоторой постоянной скоростью, из пункта A в пункт B можно доехать за 35 мин. Если увеличить скорость движения на 10 км/ч, то на весь путь потребуется на 5 мин меньше. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

Вариант 3

1. Решите уравнение $4 \cdot (2x - 3) = 3(4 - x)$.

2. Решите уравнение $\dfrac{x + 4}{7} = \dfrac{3 - x}{4}$.

3. Решите уравнение $(x + 5)^2 - (x + 3)^2 = 12^2$.

4. Имеется 600 г раствора, содержащего 5% соли. Найдите, сколько к нему нужно добавить раствора, содержащего 1% соли, чтобы получить раствор, содержащий 4% соли.

5. Двигаясь с некоторой постоянной скоростью, из пункта A в пункт B можно доехать за 50 мин. Если увеличить скорость движения на 6 км/ч, то на весь путь потребуется на 5 мин меньше. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

Вариант 4

1. Решите уравнение $5 \cdot (2x - 3) = 2(3x - 4)$.

2. Решите уравнение $\dfrac{x - 3}{9} = \dfrac{2 + x}{7}$.

3. Решите уравнение $(x - 2)^2 - (x - 4)^2 = 15^2$.

4. Имеется 200 г раствора, содержащего 6% соли. Найдите, сколько к нему нужно добавить раствора, содержащего 2% соли, чтобы получить раствор, содержащий 3% соли.

5. Двигаясь с некоторой постоянной скоростью, из пункта A в пункт B можно доехать за 30 мин. Если увеличить скорость движения на 10 км/ч, то на весь путь потребуется на 5 мин меньше. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Запишите какое-нибудь неравенство вида $ax \geq b$, где a и b — целые числа, которое равносильно неравенству $5 - 3x \leq 2 - \frac{7}{2}x$.

2. Решите неравенство $5x - 1 - 3 \cdot (x - 2) < 4x + 3 - 2 \cdot (1 - 3x)$.

3. Изобразите на числовой прямой множество решений неравенства $\frac{2}{3}x - 1 \geq \frac{3}{2}x + 3$ и запишите ответ в виде промежутка числовой прямой.

4. Решите неравенство $(1 - x) \cdot (3 - x) < (x + 1) \cdot (x + 2)$.

5. Найдите все целые числа, которые одновременно содержатся в промежутках $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$ и $\left(-\frac{63}{14}; \infty\right)$.

6.* Докажите, что если $a > 1$, то $a + \frac{1}{a - 1} \geq 3$.

Вариант 2

1. Запишите какое-нибудь неравенство вида $ax < b$, где a и b — целые числа, которое равносильно неравенству $2x + 4 > 3 - \frac{2}{3}x$.

2. Решите неравенство $3 - 7x - 2 \cdot (x + 1) \geq x + 4 - 5 \cdot (1 + x)$.

3. Изобразите на числовой прямой множество решений неравенства $\frac{5}{2}x - 2 \leq \frac{4}{3}x + 1$ и запишите ответ в виде промежутка числовой прямой.

4. Решите неравенство $(x - 1) \cdot (x + 2) \geq (x - 3) \cdot (x - 2)$.

5. Найдите все целые числа, которые одновременно содержатся в промежутках $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ и $\left(-\frac{57}{18}; \infty\right)$.

6.* Докажите, что если $a < -1$, то $a + \frac{1}{a + 1} \leq -3$.

Вариант 3

1. Запишите какое-нибудь неравенство вида $ax \geq b$, где a и b — целые числа, которое равносильно неравенству $3 - 2x \geq 5 - \frac{3}{4}x$.

2. Решите неравенство $6x - 2 - 3 \cdot (x - 2) > 5x + 3 - 2 \cdot (1 - 3x)$.

3. Изобразите на числовой прямой множество решений неравенства $\frac{3}{2}x + 2 \leq \frac{2}{3}x - 1$ и запишите ответ в виде промежутка числовой прямой.

4. Решите неравенство $(x + 2) \cdot (x + 3) > (1 - x) \cdot (2 - x)$.

5. Найдите все целые числа, которые одновременно содержатся в промежутках $\left(-\infty; \frac{43}{12}\right]$ и $\left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$.

6.* Докажите, что если $a > 2$, то $a + \frac{1}{a - 2} \geq 4$.

Вариант 4

1. Запишите какое-нибудь неравенство вида $ax > b$, где a и b — целые числа, которое равносильно неравенству $3x + 2 < 4 - \frac{1}{3}x$.

2. Решите неравенство $2 - 6x - 2 \cdot (x + 1) \leq x + 3 - 5 \cdot (1 + x)$.

3. Изобразите на числовой прямой множество решений неравенства $\frac{3}{2}x - 1 \geq \frac{1}{3}x + 3$ и запишите ответ в виде промежутка числовой прямой.

4. Решите неравенство $(x + 1) \cdot (x - 2) \leq (x + 3) \cdot (x + 2)$.

5. Найдите все целые числа, которые одновременно содержатся в промежутках $\left(-\infty; \frac{68}{15}\right]$ и $\left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$.

6.* Докажите, что если $a < -2$, то $a + \frac{1}{a + 2} \leq -4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Докажите, что в остроугольном треугольнике ABC средняя линия, параллельная стороне AC, делит пополам высоту, проведенную к AC.

2. На стороне AB угла BAC расположены точки E и F так, что $AE = 4$ см, $AF = 7$ см. На стороне AC угла расположены точки G и H так, что $AG = 6$ см, а отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка GH.

3. Площадь треугольника равна 24 $см^2$. Найдите площадь меньшей из частей, на которые делит этот треугольник его средняя линия.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ см и $AD = 14$ см делится средней линией на две трапеции. Чему равна длина средней линии той из этих трапеций, у которой одним из оснований является отрезок BC.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 8$ см и $AD = 14$ см и боковой стороной $AB = 6$ см угол при вершине A равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

Вариант 2

1. Докажите, что в треугольнике ABC средняя линия, параллельная стороне AC, делит пополам медиану, проведенную к AC.

2. На стороне AB угла BAC расположены точки E и F так, что $AE = 6$ см, $AF = 10$ см. На стороне AC угла расположены точки G и H так, что $AG = 9$ см, а отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка GH.

3. Площадь треугольника равна 30 $см^2$. Найдите площадь большей из частей, на которые делит этот треугольник его средняя линия.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 10$ см и $AD = 20$ см делится средней линией на две трапеции. Чему равна длина средней линии той из этих трапеций, у которой одним из оснований является отрезок AD.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 6$ см и $AD = 16$ см и боковой стороной $AB = 8$ см угол при вершине B равен 45°. Найдите площадь этой трапеции.

Вариант 3

1. Докажите, что в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC средняя линия делит пополам каждую из диагоналей.

2. На стороне AB угла BAC расположены точки E и F так, что $AE = 5$ см, $AF = 9$ см. На стороне AC угла расположены точки G и H так, что $AH = 12$ см, а отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка GH.

3. Средняя линия делит треугольник на две части, и площадь меньшей части равна 12 $см^2$. Найдите площадь этого треугольника.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 14$ см и $AD = 16$ см делится средней линией на две трапеции. Чему равна длина средней линии той из этих трапеций, у которой одним из оснований является отрезок BC.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 2$ см и $AD = 12$ см и боковой стороной $AB = 8$ см угол при вершине A равен $45°$. Найдите площадь этой трапеции.

Вариант 4

1. Докажите, что в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC средняя линия делит пополам отрезок, соединяющий середины оснований.

2. На стороне AB угла BAC расположены точки E и F так, что $AE = 3$ см, $AF = 8$ см. На стороне AC угла расположены точки G и H так, что $AH = 12$ см, а отрезки EG и FH параллельны. Найдите длину отрезка GH.

3. Средняя линия делит треугольник на две части, и площадь большей части равна 18 см^2. Найдите площадь этого треугольника.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ см и $AD = 18$ см делится средней линией на две трапеции. Чему равна длина средней линии той из этих трапеций, у которой одним из оснований является отрезок AD.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 8$ см и $AD = 10$ см и боковой стороной $AB = 6$ см угол при вершине B равен $45°$. Найдите площадь этой трапеции.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. Найдите числа a и b, при которых система $\begin{cases} ax + 2y = 8, \\ 3x + by = 9 \end{cases}$ имеет решение $(2; -3)$.

2. Решите систему: а) $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 7x + 5y = 16 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 2y = 3, \\ 6x - 4y = 5 \end{cases}$

3. На сумму 997 руб. закуплено 20 кг крупы двух видов: по 53 руб. за килограмм и по 48 руб. за килограмм. Найдите, сколько крупы каждого вида было закуплено.

4.* Докажите, что система $\begin{cases} 472x + 289y = 2000, \\ 367x + 235y = 10\,000 \end{cases}$ имеет единственное решение.

5.** Запишите общий вид решения уравнения $7x - 5y = 4$ в целых числах.

Вариант 2

1. Найдите числа a и b, при которых система $\begin{cases} 2x + ay = 12, \\ bx + 3y = 10 \end{cases}$ имеет решение $(-2; 4)$.

2. Решите систему: а) $\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 3x - 5y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x + 3y = 7, \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$

3. На сумму 978 руб. закуплено 3 кг сыра двух видов: по 335 руб. за килограмм и по 320 руб. за килограмм. Найдите, сколько сыра каждого вида было закуплено.

4.* Докажите, что система $\begin{cases} 513x + 391y = 1000, \\ 376x + 215y = 20\,000 \end{cases}$ имеет единственное решение.

5.** Запишите общий вид решения уравнения $5x + 6y = 1$ в целых числах.

Вариант 3

1. Найдите числа a и b, при которых система $\begin{cases} ax - 3y = 6, \\ 2x + by = 8 \end{cases}$ имеет решение $(-3; 2)$.

2. Решите систему: а) $\begin{cases} 3x - 2y = 10, \\ 2x + 7y = 15 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x - 4y = 3, \\ 6x + 2y = 7 \end{cases}$

3. На сумму 998 руб. закуплено 15 кг крупы двух видов: по 64 руб. за килограмм и по 69 руб. за килограмм. Найдите, сколько крупы каждого вида было закуплено.

4. Докажите, что система $\begin{cases} 247x + 356y = 3000, \\ 473x + 672y = 10\,000 \end{cases}$ имеет единственное решение.

5.** Запишите общий вид решения уравнения $3y - 7x = 2$ в целых числах.

Вариант 4

1. Найдите числа a и b, при которых система $\begin{cases} 3x + ay = 7, \\ bx - 4y = 11 \end{cases}$ имеет решение $(3; -2)$.

2. Решите систему: а) $\begin{cases} 5x + 2y = 11, \\ 4x - 5y = 22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 9y = 2 \end{cases}$

3. На сумму 996 руб. закуплено 3 кг сыра двух видов: по 326 руб. за килограмм и по 336 руб. за килограмм. Найдите, сколько сыра каждого вида было закуплено.

4. Докажите, что система $\begin{cases} 137x + 453y = 1000, \\ 203x + 896y = 30\,000 \end{cases}$ имеет единственное решение.

5.** Запишите общий вид решения уравнения $8x + 5y = 3$ в целых числах.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1

1. Найдите произведение $23{,}27 \cdot 41{,}56$ и округлите результат до разряда сотых.

2. При измерении стороны квадрата получили приближенное значение 1,78 см ± 0,016 см. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение периметра этого квадрата.

3. При измерении трех углов четырехугольника инструментом, точность которого $\pm 0{,}17^\circ$, получили приближенные значения $72{,}3^\circ$; $107{,}4^\circ$; $86{,}5^\circ$. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение величины четвертого угла четырехугольника.

4. Для приближенных значений $a = 2{,}3 \pm 0{,}07$ и $b = 4{,}7 \pm 0{,}09$ найдите с оценкой погрешности приближенное значение $5a - 3b$.

5. Найдите, на сколько площадь квадрата со стороной 3 м 2 мм больше площади квадрата со стороной 3 м.

Вариант 2

1. Найдите произведение $18{,}63 \cdot 52{,}34$ и округлите результат до разряда сотых.

2. При измерении стороны равностороннего треугольника получили приближенное значение 0,67 см ± 0,018 см. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение периметра этого треугольника.

3. При измерении трех углов четырехугольника инструментом, точность которого $\pm 0{,}14^\circ$, получили приближенные значения $114{,}2^\circ$; $93{,}7^\circ$; $69{,}4^\circ$. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение величины четвертого угла четырехугольника.

4. Для приближенных значений $a = 3{,}6 \pm 0{,}04$ и $b = 1{,}9 \pm 0{,}07$ найдите с оценкой погрешности приближенное значение $3a - 5b$.

5. Найдите, на сколько площадь квадрата со стороной 2 м 3 мм больше площади квадрата со стороной 2 м.

Вариант 3

1. Найдите произведение $36{,}39 \cdot 37{,}42$ и округлите результат до разряда сотых.

2. При измерении стороны квадрата получили приближенное значение 1,49 см ± 0,017 см. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение периметра этого квадрата.

3. При измерении трех углов четырехугольника инструментом, точность которого $\pm 0{,}18°$, получили приближенные значения $82{,}9°$; $121{,}6°$; $56{,}7°$. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение величины четвертого угла четырехугольника.

4. Для приближенных значений $a = 2{,}7 \pm 0{,}09$ и $b = 4{,}3 \pm 0{,}06$ найдите с оценкой погрешности приближенное значение $4a - 2b$.

5. Найдите, на сколько площадь квадрата со стороной 4 м 2 мм больше площади квадрата со стороной 4 м.

Вариант 4

1. Найдите произведение $45{,}87 \cdot 24{,}18$ и округлите результат до разряда сотых.

2. При измерении стороны равностороннего треугольника получили приближенное значение 0, 74 см ± 0, 014 см. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение периметра этого треугольника.

3. При измерении трех углов четырехугольника инструментом, точность которого $\pm 0{,}16°$, получили приближенные значения $100{,}7°$; $114{,}8°$; $73{,}9°$. Найдите с оценкой погрешности приближенное значение величины четвертого угла четырехугольника.

4. Для приближенных значений $a = 2{,}3 \pm 0{,}07$ и $b = 4,\ 7 \pm 0{,}09$ найдите с оценкой погрешности приближенное значение $5a - 3b$.

5. Найдите, на сколько площадь квадрата со стороной 2 м 4 мм больше площади квадрата со стороной 2 м.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1

1. Решите уравнение $(2x + 1)(4 - x) = (x - 2)(5 - 2x)$.

2. Найдите все общие целые решения двух неравенств $4(x + 3) \geq 2 - x$ и $5(x - 1) < 7 + 2x$.

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 29x + 9y = 2, \\ 16x + 5y = 1 \end{cases}$

4. Упростите выражение $(a^2 - b) \cdot (a^4 + b^2) \cdot (a^2 + b)$.

5.* Определите, какое из двух чисел — 4^{45} и 27^{20} — больше другого.

6.** Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 73.

Вариант 2

1. Решите уравнение $(2x - 1)(2 - x) = (x - 3)(4 - 2x)$.

2. Найдите все общие целые решения двух неравенств $2(x + 4) > x + 5$ и $3(x - 2) \leq 2 - x$.

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 8x - 27y = 1, \\ 5x - 17y = 2 \end{cases}$

4. Упростите выражение $(x + y^2) \cdot (x^2 + y^4) \cdot (x - y^2)$.

5. Определите, какое из двух чисел — 4^{27} и 27^{12} — больше другого.

6.** Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 61.

Вариант 3

1. Решите уравнение $(x + 4)(1 - 2x) = (3 - x)(2x + 5)$.

2. Найдите все общие целые решения двух неравенств $3(x + 2) \geq 2x + 1$ и $6(x + 2) < 11 - x$.

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 20x + 11y = 2, \\ 11x + 6y = 1 \end{cases}$

4. Упростите выражение $(a^2 - 2b) \cdot (a^4 + 4b^2) \cdot (a^2 + 2b)$.

5.* Определите, какое из двух чисел — 16^{18} и 27^{16} — больше другого.

6.** Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 79.

Вариант 4

1. Решите уравнение $(1-2x)(x+2)=(x+3)(5-2x)$.

2. Найдите все общие целые решения двух неравенств $3(x-1)>2x+1$ и $5(x-4)\le 2x+4$.

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases}9x-19y=1,\\ 8x-17y=2\end{cases}$

4. Упростите выражение $(2x+y^2)\cdot(4x^2+y^4)\cdot(2x-y^2)$.

5. Определите, какое из двух чисел — 32^{18} и 27^{20} — больше другого.

6.** Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 67.

ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. **1.** $126°33'$. **2.** $72°$. **3.** $19°$ и $93°$. **4.** $60°$ и $300°$. **5.** $72°$.

Вариант 2. **1.** $123°12'$. **2.** $75°$. **3.** $35°$ и $91°$. **4.** $39°$ и $321°$. **5.** $54°$.

Вариант 3. **1.** $122°43'$. **2.** $78°45'$. **3.** $19°$ и $97°$. **4.** $31°$ и $329°$. **5.** $144°$.

Вариант 4. **1.** $126°41'$. **2.** $84°$. **3.** $14°$ и $110°$. **4.** $24°$ и $336°$. **5.** $126°$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. **1.** а) 4^{15}; б) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-10}$; в) 32^6; г) $(0{,}25)^{-15}$. **2.** 3, 4, 5, 6. **3.** a^{-m}. **4.** $\left(2\frac{1}{4}\right)^3$. **5.** В 11 200 раз.

Вариант 2. **1.** а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-30}$; б) 27^{20}; в) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-15}$; г) 243^{12}. **2.** 10, 11, 12. **3.** a^{m+2}. **4.** $\left(15\frac{5}{8}\right)^2$. **5.** В 384 раза.

Вариант 3. **1.** а) 8^{10}; б) $(0{,}5)^{-30}$; в) 32^6; г) $(0{,}125)^{-10}$. **2.** 8, 9, 10, 11. **3.** a^{-m-2}. **4.** $\left(1\frac{7}{9}\right)^3$. **5.** В 4800 раз.

Вариант 4. **1.** а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-60}$; б) 27^{20}; в) $\left(\frac{1}{243}\right)^{-12}$; г) 81^{15}. **2.** 4, 5, 6. **3.** a^m. **4.** $\left(1\frac{91}{125}\right)^2$. **5.** В 44 раза.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. **1.** 13. **2.** $10a - 20b$. **4.** $2a - 3b$ и $3b - 2a$. **5.** *Указание*. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

Вариант 2. **1.** 40. **2.** $30a - 10b$. **4.** $5m - 2n$ и $2n - 5m$. **5.** *Указание*. $x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$.

Вариант 3. **1.** 28. **2.** $30a - 20b$. **4.** $3x - 2y$ и $2y - 3x$. **5.** *Указание*. $4x^4 - 5x^2 + 1 = (x^2 - 1)(4x^2 - 1)$.

Вариант 4. **1.** 84. **2.** $30a - 20b$. **4.** $2p - 5q$ и $5q - 2p$. **5.** *Указание*. $9x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 1)(9x^2 - 1)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. **3.** 48 см^2. **4.** 63 см^2. **5.** $\frac{7}{16}U$.

Вариант 2. **3.** 108 см^2. **4.** 35 см^2. **5.** $\frac{5}{18}U$.

Вариант 3. **3.** 48 см^2. **4.** 56 см^2. **5.** $\frac{17}{50}U$.

Вариант 4. **3.** 108 см^2. **4.** 88 см^2. **5.** $\frac{1}{3}U$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. **1.** $-3{,}25$. **2.** 4. **3.** $a = 3{,}5$. **4.** 0,5. **5.** 4,9 кг и 2,1 кг.

Вариант 2. **1.** 2,4. **2.** 3,75. **3.** $a = 3{,}5$. **4.** 0,25. **5.** 3,2 кг и 4,8 кг.

Вариант 3. **1.** $-\frac{2}{3}$. **2.** 5. **3.** $a = -0{,}5$. **4.** 0,25. **5.** 3,2 кг и 2,8 кг.

Вариант 4. **1.** 0,5. **2.** 3. **3.** $a = 4{,}5$. **4.** 0,5. **5.** 7,2 кг и 1,8 кг.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. **2.** 1250. **4.** 230°. **5.** 12.

Вариант 2. **2.** 3150. **4.** 160°. **5.** 22.

Вариант 3. **2.** 3600. **4.** 250°. **5.** 12.

Вариант 4. **2.** 3850. **4.** 140°. **5.** 12.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1. **1.** $x < 3{,}25$. **2.** $x \le 2$. **3.** $x < 4{,}5$. **4.** $x \le -33{,}6$. **5.** 2.

Вариант 2. **1.** $x > -2{,}8$. **2.** $x \ge 1{,}25$. **3.** $x < \frac{1}{3}$. **4.** $-x \ge 2\frac{3}{16}$. **5.** 4.

Вариант 3. **1.** $x < -5\frac{1}{3}$. **2.** $x \le 8$. **3.** $x > 3$. **4.** $x \ge 14\frac{2}{7}$. **5.** -1.

Вариант 4. **1.** $x > 3\frac{1}{3}$. **2.** $x \ge 1{,}4$. **3.** $x > 5$. **4.** $x \ge 4\frac{10}{29}$. **5.** 5.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1. **1.** $(-1{,}8;\ \infty)$. **2.** $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{6}\right]$. **3.** $a = 0$. **4.** $[2;\ 3{,}5)$. **5.** *Указание*. Сложить по частям заданные неравенства. **6.** *Указание*. Привести неравенство к виду $\frac{(3x-1)^2}{x} \geq 0$.

Вариант 2. **1.** $(-\infty;\ 2{,}6)$. **2.** $\left(-\infty;\ -1\frac{1}{6}\right]$. **3.** $a = 1$. **4.** $(1;\ 1{,}5]$. **5.** *Указание*. Сложить по частям заданные неравенства. **6.** *Указание*. Привести неравенство к виду $\frac{(3x+2)^2}{x} \leq 0$.

Вариант 3. **1.** $(-\infty;\ -1{,}8)$. **2.** $\left(-\infty;\ -3\frac{1}{3}\right]$. **3.** $a = 0$. **4.** $[-2;\ -0{,}5)$. **5.** *Указание*. Сложить по частям заданные неравенства. **6.** *Указание*. Привести неравенство к виду $\frac{(2x-3)^2}{x} \geq 0$.

Вариант 4. **1.** $(2{,}8;\ \infty)$. **2.** $\left(-\infty;\ -3\frac{1}{3}\right]$. **3.** $a = 1$. **4.** $(3;\ 3{,}5]$. **5.** *Указание*. Сложить по частям заданные неравенства. **6.** *Указание*. Привести неравенство к виду $\frac{(2x+1)^2}{4x} \leq 0$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Вариант 1. **2.** $15\sqrt{2}$ см^2. **4.** 62 см. **5.** 4,7 см^2.
Вариант 2. **2.** $21\sqrt{2}$ см^2. **4.** 34 см. **5.** 4,3 см^2.
Вариант 3. **2.** 12 см^2. **4.** 74 см. **5.** 5,8 см^2.
Вариант 4. **2.** 12 см^2. **4.** 38 см. **5.** 3,7 см^2.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Вариант 1. **1.** 6,25 см. **2.** 2 : 3. **3.** 16 см. **4.** 1 : 2. **5.** 4 : 1. **6.** *Указание*. Если $AM : MB = p : q$, то каждая из последующих точек делит соответствующую сторону в таком же отношении.

Вариант 2. **1.** 3,6 см. **2.** 12:37. **3.** 24 см. **4.** 2 : 1. **5.** 5 : 2. **6.** *Указание*. Если $AM : MB = p : q$, то каждая из последующих точек делит соответствующую сторону в таком же отношении.

Вариант 3. **1.** 7,2 см. **2.** 10 : 39. **3.** 24 см. **4.** 1 : 2. **5.** 7 : 3. **6.** *Указание*. Если $AM : MB = p : q$, то каждая из последующих точек делит соответствующую сторону в таком же отношении.

Вариант 4. **1.** 10,5 см. **2.** 4 : 3. **3.** 22 см. **4.** 2 : 1. **5.** 11 : 3. **6.** *Указание*. Если $AM : MB = p : q$, то каждая из последующих точек делит соответствующую сторону в таком же отношении.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Вариант 1. **2.** 1,5. **3.** 6. **4.** $y = -\frac{1}{3}x - 5$. **5.** $y = \frac{1 - 5x}{3}$.

Вариант 2. **2.** 1,4. **3.** 5. **4.** $y = \frac{2}{3}x - 10$. **5.** $y = \frac{3x - 4}{5}$.

Вариант 3. **2.** 13,5. **3.** –3. **4.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **5.** $y = \frac{4x + 7}{5}$.

Вариант 4. **2.** 12,6. **3.** –4. **4.** $y = \frac{1}{3}x + 9$. **5.** $y = \frac{-3x - 1}{5}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Вариант 1. **1.** 8 см. **2.** 0,7 см. **3.** 24 см. **4.** 5 см. **5.** *Указание*. Центр окружности, касающийся сторон угла, лежит на биссектрисе.

Вариант 2. **1.** 10 см. **2.** 0,6 см. **3.** 28 см. **4.** $6\sqrt{3}$ см. **5.** *Указание*. Треугольники EMF и ENF прямоугольные.

Вариант 3. **1.** 7 см. **2.** 0,9 см. **3.** 32 см. **4.** 5 см. **5.** *Указание*. Оба угла прямые.

Вариант 4. **1.** 30 см. **2.** 1,1 см. **3.** 36 см. **4.** 24 см. **5.** *Указание*. Углы EMF и ENF прямые.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Вариант 1. **1.** $\left(\frac{11}{27}; -\frac{1}{9}\right)$. **2.** (1,5; 3,5). **3.** (2; 1). **4.** $(4 - 2a; a)$, где a — любое число. **5.** (4; –1).

Вариант 2. **1.** $\left(\frac{1}{8}; -\frac{9}{32}\right)$. **2.** (2; –1). **3.** (1; 2). **4.** $(a; 2a - 3)$, где a — любое число. **5.** (4; 2).

Вариант 3. **1.** $\left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{8}\right)$. **2.** $(3; -1)$. **3.** $(1; -2)$. **4.** $(a; 2-3a)$, где a — любое число. **5.** $(4; 1)$.

Вариант 4. **1.** $(0{,}54; -0{,}1)$. **2.** $(0{,}4; 1{,}4)$. **3.** $(2; -1)$. **4.** $(4+3a; a)$, где a — любое число. **5.** $(5; -1)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Вариант 1. **1.** 60 см^2. **2.** $66°$, $68°$, $80°$, $146°$. **3.** $20\sqrt{15}$ см^2. **4.** $170°$. **5.** 42 см^2.

Вариант 2. **1.** 48 см^2. **2.** $50°$, $89°$, $106°$, $115°$. **3.** $32\sqrt{2}$ см^2. **4.** $165°$. **5.** 77 см^2.

Вариант 3. **1.** 108 см^2. **2.** $66°$, $78°$, $84°$, $132°$. **3.** $48\sqrt{6}$ см^2. **4.** $160°$. **5.** 52 см^2.

Вариант 4. **1.** 60 см^2. **2.** $54°$, $86°$, $103°$, $117°$. **3.** $12\sqrt{6}$ см^2. **4.** $155°$. **5.** 33 см^2.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

Вариант 1. **1.** 5370 г. **2.** $-0{,}76$. **3.** $-5{,}4 \pm 0{,}43$. **4.** $-0{,}173$. **5.** 0,29 и 0,28. **6.** $1 - \frac{1}{1600}$. **7.** $17 + \frac{1}{34}$.

Вариант 2. **1.** 4900 г. **2.** 0,19. **3.** $-2{,}5 \pm 0{,}16$. **4.** $-2{,}39$. **5.** 0,43 и 0,42. **6.** $1 - \frac{3}{800}$. **7.** $19 - \frac{1}{38}$.

Вариант 3. **1.** 1600 г. **2.** $-0{,}26$. **3.** $-5{,}8 \pm 0{,}41$. **4.** $-0{,}086$. **5.** 0,58 и 0,57. **6.** $1 - \frac{9}{500}$. **7.** $27 + \frac{1}{54}$.

Вариант 4. **1.** 3460 г. **2.** 0,22. **3.** $-7{,}9 \pm 0{,}24$. **4.** $-5{,}72$. **5.** 0,72 и 0,71. **6.** $1 - \frac{1}{2500}$. **7.** $29 + \frac{1}{58}$.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. 1. а) 0,29; б) $\frac{1}{64}$; в) $\frac{64}{625}$. **2.** $7a^4b$. **3.** $\frac{4y^2}{9a^2b^2c^2x^2}$. **4.** $-\frac{21}{16}$.
5. $\frac{8}{9}$ и $-\frac{8}{9}$.

Вариант 2. 1. а) 0,33; б) $\frac{1}{729}$; в) $\frac{81}{1024}$. **2.** $9z^2$. **3.** $\frac{27a^3x^3y^3}{8b^3c^3}$. **4.** $\frac{3}{16}$.
5. $\frac{27}{4}$ и $-\frac{27}{4}$.

Вариант 3. 1. а) $\frac{33}{200}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $5\frac{1}{3}$. **2.** $27a^6b$. **3.** $\frac{9b^4c^2}{16x^4y^2}$. **4.** $-\frac{9}{16}$.
5. $\frac{16}{27}$ и $-\frac{16}{27}$.

Вариант 4. 1. а) $\frac{33}{200}$; б) $\frac{1}{81}$; в) 0,4. **2.** $4xy^3z$. **3.** $\frac{16b^2}{9a^4c^2x^2y^2}$. **4.** $\frac{7}{8}$.
5. $\frac{27}{16}$ и $-\frac{27}{16}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. 1. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$. **2.** 4 002 264. **3.** $10x^2+40y^2$.
4. x^3+3x^2-x-3. **5.** $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{6}a^3b+\frac{1}{6}a^2b^2+\frac{2}{27}ab^3+\frac{1}{81}b^4$.

Вариант 2. 1. $(b-2a)(b^2+2ab+4a^2)$. **2.** 8 001 376. **3.** $45a^2+5b^2$.
4. x^3-3x^2-x+3. **5.** $81x^4-54x^3y+\frac{27}{2}x^2y^2-\frac{3}{2}xy^3+\frac{1}{16}y^4$.

Вариант 3. 1. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$. **2.** 4 003 944. **3.** $45x^2+20y^2$.
4. x^3+4x^2-x-4. **5.** $\frac{1}{81}a^4-\frac{8}{27}a^3b+\frac{8}{3}a^2b^2-\frac{32}{3}ab^3+16b^4$.

Вариант 4. 1. $(2b-a)(4b^2+2ab+a^2)$. **2.** 8 003 056. **3.** $20a^2+45b^2$.
4. x^3-4x^2-x+4. **5.** $\frac{1}{16}a^4-\frac{1}{6}a^3b+\frac{1}{6}a^2b^2-\frac{2}{27}ab^3+\frac{1}{81}b^4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. **1.** $-1\frac{5}{7}$. **2.** 17. **3.** 28,25. **4.** 150 г. **5.** 48 км.

Вариант 2. **1.** $-0{,}375$. **2.** 17. **3.** -45. **4.** 150 г. **5.** 35 км.

Вариант 3. **1.** $2\frac{2}{11}$. **2.** $\frac{5}{11}$. **3.** 32. **4.** 200 г. **5.** 45 км.

Вариант 4. **1.** 1,75. **2.** $-19{,}5$. **3.** 59,25. **4.** 600 г. **5.** 25 км.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. **1.** $(-1) \cdot x \ge 6$. **2.** $x > 0{,}25$. **3.** $(-\infty; -4{,}8]$. **4.** $x > \frac{1}{7}$. **5.** $-4, -3, -2, -1, 0, 1$. **6.** *Указание.* $(a-1) + \frac{1}{a-1} \ge 2$.

Вариант 2. **1.** $(-8) \cdot x < 3$. **2.** $x \le 0{,}4$. **3.** $\left(-\infty; 2\frac{4}{7}\right]$. **4.** $x \ge 1\frac{1}{3}$. **5.** $-3, -2, -1, 0$. **6.** *Указание.* $(a+1) + \frac{1}{a+1} \le -2$.

Вариант 3. **1.** $(-5) \cdot x \ge 8$. **2.** $x < 0{,}6$. **3.** $(-\infty; -3{,}6]$. **4.** $x > -2$. **5.** $-1, 0, 1, 2, 3$. **6.** *Указание.* $a - 12 + \frac{1}{a-2} \ge 2$.

Вариант 4. **1.** $(-5) \cdot x > -1$. **2.** $x \ge 0{,}5$. **3.** $\left[3\frac{3}{7}; \infty\right)$. **4.** $x \ge -1\frac{1}{3}$. **5.** $-1, 0, 1, 2, 3, 4$. **6.** *Указание.* $a + 2 + \frac{1}{a+2} \le -2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. **2.** 4,5 см. **3.** 6 см^2. **4.** 13,5 см. **5.** $33\sqrt{2}$ см^2.

Вариант 2. **2.** 6 см. **3.** 22,5 см^2. **4.** 17,5 см. **5.** $22\sqrt{2}$ см^2.

Вариант 3. **2.** $5\frac{1}{3}$ см. **3.** 48 см^2. **4.** 14,5 см. **5.** $28\sqrt{2}$ см^2.

Вариант 4. **2.** 7,5 см. **3.** 24 см^2. **4.** 16,5 см. **5.** $27\sqrt{2}$ см^2.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. **1.** $a = 7$, $b = -1$. **2.** а) $(3; -1)$; б) $\left(\frac{11}{14}; -\frac{1}{14}\right)$. **3.** 7,4 кг и 12,6 кг. **4.** *Указание*. Определитель системы нечетное число. **5.** $x = 2 + 5m$, $y = 2 + 7m$, где m — целое число.

Вариант 2. **1.** $a = 4$, $b = 1$. **2.** а) (5; 2); б) $\left(\frac{47}{36}; -\frac{5}{18}\right)$. **3.** 1,8 кг и 1,2 кг. **4.** *Указание*. Определитель системы нечетное число. **5.** $x = -1 + 6m$, $y = 1 - 5m$, где m — целое число.

Вариант 3. **1.** $a = 4$, $b = 7$. **2.** а) (4; 1); б) $\left(\frac{17}{20}; -\frac{19}{10}\right)$. **3.** 7,4 кг и 7,6 кг. **4.** *Указание*. Определитель системы нечетное число. **5.** $x = 1 + 3m$, $y = 3 + 7m$, где m — целое число.

Вариант 4. **1.** $a = 1$, $b = 1$. **2.** а) (3; –2); б) $\left(\frac{29}{9}; -\frac{23}{27}\right)$. **3.** 1,2 кг и 1,8 кг. **4.** *Указание*. Определитель системы нечетное число. **5.** $x = 1 + 5m$, $y = -1 - 8m$, где m — целое число.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1. **1.** 957,10. **2.** 7,12 см ± 0,064 см. **3.** 93,8° ± 0,51°. **4.** –2,6 ± 0,52. **5.** На 120 см^2 4 мм^2.

Вариант 2. **1.** 975,09. **2.** 2,01 см ± 0,072 см. **3.** 82,7° ± 0,42°. **4.** 1,3 ± 0,47. **5.** На 120 см^2 9 мм^2.

Вариант 3. **1.** 1361,71. **2.** 5,96 см ± 0,068 см. **3.** 98,8° ± 0,54°. **4.** 2,2 ± 0,48. **5.** На 160 см^2 4 мм^2.

Вариант 4. **1.** 1109,14. **2.** 2,22 см ± 0,042 см. **3.** 70,6° ± 0,48°. **4.** –2,6 ± 0,62. **5.** На 160 см^2 16 мм^2.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1. **1.** $1\frac{5}{9}$. **2.** –2; –1; 0; 1; 2; 3. **3.** (1; –3). **4.** $a^8 - b^4$. **5.** 27^{20}. **6.** 37 и 36.

Вариант 2. **1.** 2. **2.** –2; –1; 0; 1; 2; **3.** (–37; –11). **4.** $x^4 - y^8$. **5.** 27^{12}. **6.** 31 и 30.

Вариант 3. **1.** –1,375. **2.** –5; –4; –3; –2. **3.** (–1; 2). **4.** $a^8 - 16b^4$. **5.** 27^{16}. **6.** 40 и 39.

Вариант 4. **1.**–7,5. **2.** 5; 6; 7; 8; **3.** (–21; –10). **4.** $16x^4 - y^8$. **5.** 27^{20}. **6.** 34 и 33.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**
Глава 1								
§ 1	2	2	2	2	1, 2	2, 3	2, 3, 4	3
§ 2	3	4	3	4	3, 4	2, 3	2, 4	1, 3, 4
Глава 2								
§ 1	3	2	3	4	1	1, 2	1, 2, 4	1, 2
§ 2	4	3	2	3	1, 4	1, 2, 3	1, 3	2
§ 3	3	4	2	1	1, 2, 3	4	2	2
§ 4	4	4	4	2	2	4	1, 2, 3	1, 4
Глава 3								
§ 1	2	4	4	3	1, 3	1, 2	1, 2, 3, 4	1, 3, 4
§ 2	3	3	3	3	4	1, 4	1, 4	1, 3
§ 3	4	4	3	4	1, 2	1	3	1, 2, 4
§ 4	4	3	2	2	1, 2	1, 3	1, 2	2, 3
§ 5	3	4	2	3	2, 3	3, 4	1, 3	2, 3, 4
Глава 4								
§ 1	4	2	2	4	1, 2, 3	1, 4	4	1, 3
§ 2	4	4	1	4	3	2, 3	2, 3, 4	2, 3
§ 3	2	3	3	3	1, 2, 3	4	1, 3	2, 3, 4
§ 4	4	3	2	3	1, 2, 3	2, 3	2, 4	4
Глава 5								
§ 1	2	4	3	1	1, 2, 3	1, 2, 4	1, 4	1, 3, 4
§ 2	2	1	4	2	1, 4	1, 4	1, 3	1, 2, 3
§ 3	4	2	4	1	1, 4	3, 4	1	1, 2
Глава 6								
§ 1	2	4	3	1	1, 2	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4
§ 2	4	4	2	4	3	1, 3, 4	1	4

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**
§ 3	4	3	4	4	2, 4	1, 2, 4	2, 3, 4	2, 4
Глава 7								
§ 1	3	2	3	3	1, 3	1, 3	3, 4	2, 4
§ 2	2	2	3	2	1, 2	1, 2	1, 2, 4	3, 4
§ 3	1	4	4	2	1, 3	1, 3	4	1, 2, 3, 4
§ 4	4	2	3	4	1, 3	2, 3	3, 4	1
§ 5	4	3	4	2	2, 4	4	1, 4	1, 2, 3, 4
Глава 8								
§ 1	4	4	3	3	2, 3, 4	1, 3	1, 4	1, 4
§ 2	3	4	2	4	1, 2, 3	3, 4	1, 2	2, 4
§ 3	4	3	2	4	2, 3	1, 3	2	1, 2
§ 4	2	2	4	1	3, 4	1, 2, 3	1, 3, 4	1, 2
Глава 9								
§ 1	2	2	3	4	4	1, 4	2, 3, 4	2, 3
§ 2	2	2	4	3	4	1, 2	1, 3, 4	3, 4
§ 3	3	1	3	2	1, 2	1, 2, 4	3, 4	1, 4
Глава 10								
§ 1	3	3	4	4	1, 4	1, 3, 4	2, 3, 4	1, 2, 4
§ 2	2	3	2	2	2, 3, 4	1, 3, 4	1, 2, 3	1, 2, 3
§ 3	3	2	3	4	1, 4	1, 4	2, 4	1, 3
§ 4	4	1	3	2	1, 4	1, 2	1, 3, 4	1, 2
Глава 11								
§ 1	4	2	4	3	2, 4	1, 4	2, 3	1, 3
§ 2	3	1	4	3	1, 3	1	1, 3, 4	1, 4
Глава 12								
§ 1	3	2	4	3	3, 4	2	2, 3	2, 3, 4
§ 2	2	3	4	3	1, 4	1, 2, 3, 4	1	2, 4

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**
§ 3	4	4	2	1	1, 2, 3, 4	2, 4	1, 3	2, 3

Глава 13

§ 1	1	3	3	1	1, 2, 3	3	1, 4	4
§ 2	2	2	4	3	3	1, 4	1, 2, 3	1, 3
§ 3	4	3	3	2	1, 2, 4	1, 2	1	1, 3, 4
§ 4	4	2	2	2	3, 4	1, 2	3, 4	1, 2

Глава 14

§ 1	4	4	3	4	2	2, 3	1, 3	1, 3, 4
§ 2	3	3	2	2	3, 4	2, 3	3, 4	1, 3, 4
§ 3	4	1	2	3	3	1, 3	2, 4	4
§ 4	4	4	4	3	2, 3	3, 4	2, 3	1, 4
§ 5	2	3	2	3	1, 4	1, 3, 4	2, 3	1, 2, 3, 4
§ 6	3	2	3	4	1, 2, 3	1, 2	1, 2, 4	2, 4

СОДЕРЖАНИЕ

ФГОС
Инновационная школа

Козлов Валерий Васильевич,
Никитин Александр Александрович,
Белоносов Владимир Сергеевич,
Мальцев Андрей Анатольевич,
Марковичев Александр Сергеевич,
Михеев Юрий Викторович,
Фокин Михаил Валентинович

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ
к учебнику
«Математика: алгебра и геометрия»
7 класс
под редакцией академика РАН *В.В. Козлова*
и академика РАО *А.А. Никитина*

Редактор *Е.В. Лебедева*
Художественный редактор *В.В. Тырданова*
Рисунки *Е.А. Бреславского, Л.Х. Матвеевой*
Корректор *Г.А. Голубкова*
Верстка *Л.Х. Матвеевой*

Подписано в печать 19.07.13. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16. Тираж 2000 экз. Заказ
Изд. № 16092.

ООО «Русское слово — учебник».
125009, Москва, ул. Тверская, д. 9/17, стр. 5.
Тел.: (495) 969-24-54, (499) 689-02-65.

ISBN 978-5-00007-191-5