ФГОС

ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

# КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

**К УЧЕБНИКУ «МАТЕМАТИКА»**
**6 КЛАСС**

***Под редакцией академика РАН В.В. Козлова и академика РАО А.А. Никитина***

Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2013

УДК 372.016:51*06(072)
ББК 74.262.21
К53

Авторы-составители:
В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин

К53 **Книга** для учителя к учебнику «Математика». 6 класс. Под ред. акад. РАН В.В. Козлова и акад. РАО А.А. Никитина / авт.-сост. В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2013. — 216 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

ISBN 978-5-91218-991-3

Издание адресовано учителям математики общеобразовательных учреждений, методистам.

**УДК 372.016:51*06(072)**
**ББК 74.262.21**

ISBN 978-5-91218-991-3

# Пояснительная записка

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности и учитывают психологические особенности учащихся. Такая тенденция в области естественно-научных дисциплин проявилась давно, в частности, это можно видеть по широкому распространению специализированных классов и школ физико-математического профиля. В каждой школе встречаются учащиеся с разными способностями к изучению математики, однако не везде имеются возможности для организации специализированного обучения. Поэтому целесообразно применять учебники, включающие в себя различные уровни изложения материала.

Авторским коллективом профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета, научных сотрудников Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института педагогических исследований одаренности детей Российской академии образования реализована идея многоуровневого преподавания математики в общеобразовательной школе с 5 по 11 класс в рамках единой концепции.

Остановимся на основных принципах этой концепции.

Математика — единая наука: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, начала математического анализа и так далее являются зависимыми друг от друга дисциплинами. Единое изложение всего предмета подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов.

Математика тесно связана с различными науками. Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие (далее — пособие) для учителей к учебнику «Математика: учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений»[1] учебно-методического комплекса из серии «ФГОС. Инновационная школа. Математика» в составе трехуровневых учебников, рабочих тетрадей и дидактических материалов с 5 по 11 класс рассчитано на то, чтобы облегчить работу преподавателей, уменьшить затраты времени и усилий на восприятие замысла и содержания многоуровневого учебника.

Изучать математику целесообразно в единстве ее идей и методов. Единое изложение материала подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов, тесную связь с другими науками, а также красоту математики как важного элемента общей человеческой культуры.

Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

Развитие интереса к математике является одним из залогов ее качественного усвоения. Использование увлекательных задач позволяет подчеркнуть красоту математики и помогает сделать преподавание математики живым и менее формальным.

Математика носит абстрактный характер, имеет свои законы развития и применяется в различных сферах человеческой деятельности. Умение абстрактно мыслить вырабатывается постепенно, опираясь на конкретные реальные объекты.

Потребности использования математики в разных областях человеческой деятельности различны, так же как различны и природные склонности, способности и типы мышления уча-

[1] Математика: учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. — М.: «Русское слово», 2012.

щихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объеме. Кроме того, изучение и осознанное восприятие многих математических понятий, свойств и методов требует постепенного перехода от наблюдений и экспериментов к точным формулировкам и доказательствам, неоднократного возвращения к фундаментальным понятиям.

Авторским коллективом из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одаренности детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета создан учебно-методический комплекс, в котором предложены три уровня обучения математике.

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности. Многоуровневое обучение математике, начиная с 5 класса, способно обеспечить минимальные запросы общества к уровню математической подготовки и предоставить всем учащимся широкие возможности для развития своих способностей и получения дополнительных математических знаний. При этом учителя получают возможность строить преподавание с учетом специфики учебных заведений, интересов и уровня подготовки учащихся и при наличии возможности осуществлять углубленное изучение математики. Допредпрофильным обучением мы будем называть обучение более высокого уровня в 5—6 классах, при котором уделяется повышенное внимание элементам логических рассуждений на основе конкретных примеров в дополнение к освоению фактических знаний и алгоритмов. Предпрофильным обучением принято считать обучение более высокого уровня в 7—9 классах, которое отличается не столько тем, что ученики решают в целом более трудные задачи, а скорее более точными и основательными рассуждениями, установлением взаимосвязей различных утверждений. Профильное обучение, наряду со специализированной подготовкой, осуществляемое в старших классах и реализуемое в рамках различных организационных и дидактических форм изучения предмета, рассчитано на то, чтобы учащиеся по окончании старших классов приобретали компетенции, необходимые для последующего обучения в вузах с высокими требованиями к математическим дисциплинам.

Первый уровень предполагает овладение таким минимумом знаний и умений, которые необходимы каждому культурному человеку.

Второй уровень развивает и дополняет первый уровень, тесно с ним связан и содержит часть материала для углубленного изучения математики. Он позволяет обеспечить умения и навыки, необходимые для успешного продолжения обучения в вузе.

Третий уровень — специализированный — рассчитан на воспитание профессионального интереса к математике и сознательное овладение логикой рассуждений.

В многоуровневом учебнике по математике для 6 класса продолжается формирование единого цельного восприятия математики по основным направлениям, опираясь на материал учебника 5 класса.

Первое направление продолжает развитие понятия числа. К уже известным натуральным числам и положительным дробям добавляются целые числа и отрицательные дроби и в расширенных числовых множествах определяются основные арифметические операции и отношение порядка. И хотя в тексте учебника не говорится явно о рациональных числах, но на самом деле в 6 классе завершается построение множества рациональных чисел с изучением основных свойств.

Второе направление отражает практическое значение математики. С этой целью в учебнике рассматривается применение графиков для приближенного решения некоторых прикладных задач.

Третье направление относится к систематическому изучению геометрии. К известным из курса 5 класса свойствам геометрических фигур добавляются новые. Рассматриваются первый признак равенства треугольников, свойства равнобедренного треугольника и ромба, перпендикулярность прямых и отрезков, свойства касательных к окружности, основные свойства осевой симметрии.

Четвертое направление связано с применением алгебраических методов в геометрии, что достигается за счет введения понятия координат точек как на числовой прямой, так и на координатной плоскости.

Пятое направление затрагивает понятие функциональной зависимости, что отчетливо проявляется в последних главах учебника, в которых рассматриваются понятие прямой пропорциональности и графики некоторых функций, для которых на наглядном уровне устанавливаются некоторые свойства.

Шестое направление отражает главную особенность математики: логическое обоснование формулируемых результатов. Несмотря на то что в 6 классе изучение математики в значительной степени опирается на наглядность и на конкретные примеры, доля тех утверждений, которые приводятся с полноценными обоснованиями, больше, чем была в 5 классе.

Изучение теоретического материала предполагает решение задач и упражнений, ответы на тесты как из учебника, так и из рабочей тетради.

В целом структура учебника по математике для 6 класса достаточно традиционна: учебник разбит на главы, главы — на параграфы, параграфы разбиты на пункты, в конце каждого параграфа формулируются контрольные вопросы и приводятся задачи, упражнения и тесты.

К особенностям изложения материала следует отнести распределение пунктов по уровням изучения и наличие в конце каждого пункта так называемого «открытого» вопроса, который предназначен для того, чтобы учащиеся осмыслили прочитанное и могли найти ответ на поставленный вопрос либо из самого текста пункта, либо на основе ранее изученного материала. Иногда для ответа учащимся нужно попытаться самим дать определения понятий, обобщить некоторые рассуждения и т.п. Чаще всего предполагается, что смысл открытого вопроса является естественным продолжением основной идеи пункта. Тем самым ответ на открытый вопрос можно считать промежуточным итогом по изучению соответствующего пункта. Открытые вопросы не являются контрольными и не всегда подразумевают наличие точных или конкретных ответов. Открытый вопрос позволяет читателю остановиться и задуматься над только что прочитанным материалом. Иногда ответ на вопрос приводит материал пункта к определенному логическому завершению. Именно поэтому необходимо найти ответы на открытые вопросы либо самостоятельно, либо с посторонней помощью. Разумеется, иногда учащиеся могут дать неверные или неудовлетворительные с математической точки зрения ответы на эти вопросы. В таком случае имеет смысл сравнить приведенный ответ с правильным и выяснить, из каких соображений проистекает правильный ответ. Тем самым делается попытка подвести учащихся к пониманию естественности математических определений, приемов рассуждений.

Материал учебника рассматривается, следуя структуре учебника, по определенной схеме. Сначала определяются **цели,** которые должны достигаться в процессе изучения данной главы, данного параграфа. Затем уточняются **особенности** изложения учебного материала данной главы, данного параграфа, особенности распределения учебного материала по уровням обучения. При этом указываются **предварительные знания, умения и навыки,** предполагаемые у учащихся. Перечисляются также **новые математические понятия и свойства**, изучение которых производится в данном параграфе или данной главе и которые могут быть определены и обоснованы с различной степенью строгости. Указываются также **вспомогательные понятия.** Это преимущественно понятия из жизненной практики или других учебных дисциплин. Вспомогательными на текущем этапе обучения могут оказаться термины, которые только упоминаются в тексте, в полном объеме будут изучаться в дальнейшем, но математическое определение которых давать преждевременно. Многократное возвращение к важнейшим понятиям способствует их лучшему восприятию, расширению кругозора, привитию ощущения «широты мира», осознанию того, что понятия могут вмещать в себя значительно больше, чем изучено на данном этапе.

Учебник 6 класса и рабочие тетради к нему содержат значительное число непростых задач, преимущественно рассчитанных на третий уровень. В пособии приводятся **указания к решению** большинства **наиболее трудных** или нестандартных **задач.**

В пособии приводятся варианты ответов на **открытые вопросы к пунктам.** Во многих случаях это только варианты ответов, так как со стороны учащихся можно ожидать разнообразных, а иногда и неожиданных правильных ответов.

В учебнике 6 класса и рабочих тетрадях к нему содержатся образцы двух видов тестовых заданий. Задания первого вида рассчитаны на выбор одного верного варианта из числа приведенных. Задания второго вида — многовариантные тесты, рассчитанные на выбор нескольких правильных ответов из числа приведенных. Работа над многовариантными тестами чаще всего предполагает анализ заданий и поиск закономерностей, с учетом которых можно получить правильный ответ, состоящий **в выборе всех верных вариантов**. Среди многовариантных тестов можно найти значительное число непростых задач, в основном рассчитанных на третий уровень. В конце пособия приводятся **ответы ко всем тестам** из учебника.

В конце пособия приведены **образцы вариантов самостоятельных и контрольных работ**.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровнего обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе работы в формировании содержания трехуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — доцента В.В. Войтишека, профессоров Т.И. Зеленяка и Д.М. Смирнова.

# Глава 1
# НАПРАВЛЕНИЕ И КООРДИНАТЫ

**Цель главы** — начальное знакомство с идеей введения систем координат на плоскости и в пространстве, с понятием направления на прямой.

**Особенности параграфа.** Восприятие идеи координат на плоскости упрощается с привлечением клетчатой бумаги, потому что положение каждой клеточки определяется горизонталью и вертикалью, на которых данная клеточка находится. Приводимые в главе примеры как раз и подчеркивают эту особенность.

## § 1. «МОРСКОЙ БОЙ»

**Цель параграфа** — на доступных и хорошо знакомых игровых примерах ознакомить учащихся с понятием системы координат, выработать навыки использования простейших координатных систем.

**Метод.** Наглядное описание, демонстрация примеров, добавление игровых элементов.

**Особенности параграфа.** Не все учащиеся могут быть знакомы с игрой в «Морской бой» или с шахматной нотацией. На это следует обратить внимание и подробно растолковать правила игры, привлекая на помощь учащихся, которым эти правила уже известны. При изучении параграфа важно выработать у детей устойчивое понимание того, что при задании координат игровых клеток необходимо учитывать порядок, в котором перечисляются координаты. Основная задача учителя — пробудить у всех учащихся интерес к изучаемому материалу.

Пример с шахматами только условно отнесен ко второму уровню. Третий уровень выделен только более сложными задачами.

**Новые математические понятия:** координаты.

**Вспомогательные понятия:** названия шахматных фигур; шахматная нотация.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Каким может быть число неудачных «выстрелов» при самой плохой игре?

*Ответ.* Не заштрихованных клеточек 80, поэтому число неудачных выстрелов может быть любым числом от 0 до 80.

**1.2.** Где вы встречали похожие системы обозначений?

*Варианты ответа.* 1. При игре в шахматы или шашки. 2. При определении места на географических картах.

**1.3.** Где вы встречали слово «координаты»?

*Варианты ответа.* 1. При изучении числовой прямой. 2. В географии.

**1.4.*** На какие поля свободной шахматной доски может попасть конь с поля «*b*3» за один ход?

*Ответ.* На поля «*a*1», «*a*5», «*c*1», «*c*5», «*d*2», «*d*4».

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**3.**** В игре в «Морской бой» корабли расставляют так, чтобы они не соприкасались друг с другом. Допустим, что противнику сразу удалось уничтожить все корабли, содержащие более одной клеточки. Противник знает, что не нужно стрелять в клеточки, соседние с уничтоженными кораблями. Какое наибольшее и какое наименьшее число клеточек может остаться для поиска «подводных лодок»?

*Указание.* Располагая все большие корабли около противоположных сторон игрового поля, удается получить 60 клеток, в которые можно расставлять подводные лодки. Это наибольшее число клеток, в которых придется разыскивать подводные лодки. Располагая большие корабли так, чтобы для них не было общих даже соседних клеток, удается получить 16 клеток, в которые можно расставлять подводные лодки.

**4.**** На какие поля свободной шахматной доски (рис. 1) может попасть за один ход с поля «е4»:

а) король; б) ферзь; в) слон; г) ладья; д) пешка?

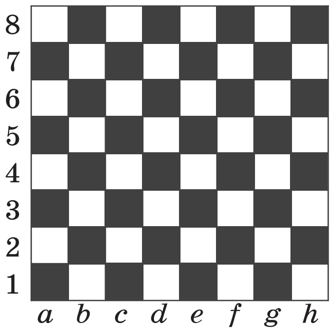


Рис. 1

*Указание.* Нужно вспомнить правила хода этих фигур.

**6.**** Может ли конь ровно через 100 ходов с поля «е4» попасть на поле «е3»?

*Указание.* Через каждые два хода конь попадает на поле такого же цвета, на котором он и стоял.

**7.**** Представим, что по клетчатой бумаге по правилам шахматной игры прыгает конь. На какое наибольшее расстояние от начальной клетки сможет уйти конь за 1000 прыжков, если за расстояние между клеточками принять расстояние между их центрами?

*Указание.* Соединяя последовательно центры клеток отрезками, получим либо ломаную, либо отрезок. Поэтому наибольшее расстояние в 1000 раз больше длины одного хода коня. Длину одного хода коня вы сможете найти после того, как в главе 5 узнаете, что такое теорема Пифагора.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.2.** Закрашенная в левом верхнем углу клетка имеет координаты *а*1 (рис. 2). Какие координаты имеет незакрашенная клетка внутри нарисованного квадрата?

1) *д*7; 2) *в*8; 3) *г*8; 4) *г*9.

*Указание.* Положение внутренней клетки определяется вертикалью «*а*» и горизонталью «8».

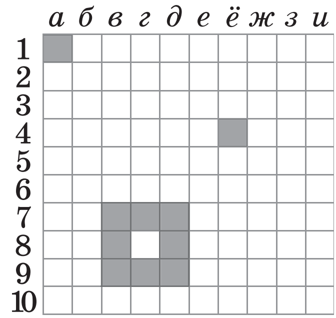


Рис. 2

**2.4.*** На шахматной доске слон перемещается по направлениям диагоналей на любое возможное расстояние. С каких из приведенных полей слон за один ход может попасть на поле *d*5 (рис. 3)?

1) *b*3; 2) *c*7; 3) *f*3; 4) *g*8.

*Указание.* Одним из способов частичной проверки вариантов является проверка цвета полей, в данном случае поля должны быть белыми.

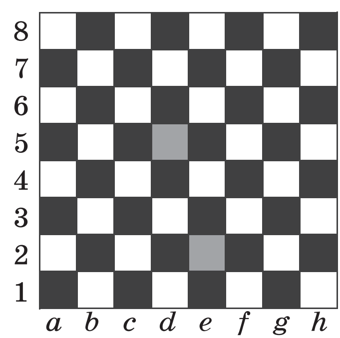


Рис. 3

## § 2. КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

**Цель параграфа** — на наглядном уровне ввести понятие направления; подойти к определению числовой прямой; сформировать начальные представления о размерности прямой, плоскости и пространства.

**Особенности параграфа.** Параграф носит вспомогательный характер. Его можно считать пропедевтикой для последующего введения систем координат на плоскости и в пространстве. Все, что связано с определением числовой прямой, предназначено для изучения на первом уровне. Второй уровень — рассмотрение полярных координат на плоскости. Знакомство с координатами в пространстве — это третий уровень.

Изучение материала целесообразно проводить, опираясь на житейский опыт.

**Новые математические понятия:** направление; числовая прямая.

**Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления:** размерность.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Как с помощью дорожных километровых столбов указать направление на дороге?

*Вариант ответа.* Указать, должны ли числа на километровых столбах возрастать или убывать при движении в нужном направлении.

**2.2.** Сколько числовых прямых можно задать на одной прямой с заданной начальной точкой при выбранной единице измерения расстояния?

*Ответ.* Две числовые прямые.

**2.3.** Как используют компас для измерения углов?

*Ответ.* Надо встать в вершину угла, по одной из сторон угла сориентировать компас так, чтобы сторона угла показывала на 0°, и отметить, на какое деление шкалы компаса показывает другая сторона угла. Иными словами, найти азимут одной стороны угла по отношению к другой. Обычно азимут определяют в градусах.

**2.4.*** Как с помощью двух координат задается положение точки на поверхности Земли?

*Вариант ответа.* Один из способов рассмотрен в пункте 2.4 учебника.

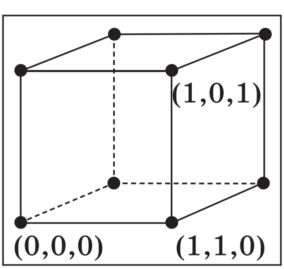

Рис. 1

**2.5.**** Как можно задать числами положение любой вершины куба по отношению к одной его выбранной вершине?

*Ответ.* Расположим куб так, чтобы выбранная вершина оказалась левым нижним углом обращенной к нам грани (рис. 1). Теперь, чтобы попасть в любую другую вершину, достаточно последовательно пройти вдоль ребер куба в трех направлениях — направо, прямо, вверх. При этом движение в одном или двух из этих направлений иногда можно пропустить. Например, чтобы попасть в вершину, лежащую на другом конце диагонали, обращенной к нам грани куба, нужно сначала идти направо, потом — остаться на месте (не идти прямо), а затем подняться вверх. Чтобы попасть в вершину, лежащую на другом конце диагонали основания куба, нужно сначала идти направо, затем — прямо, а потом не идти вверх. Если движение в соответствующем направлении обозначить числом 1, а отсутствие движения — числом 0, то путь из выбранной вершины в любую другую можно охарактеризовать набором из трех чисел, каждое из которых равно либо 0, либо 1. В приведенных выше примерах соответствующие тройки равны (1; 0; 1) и (1; 1; 0). Исходной вершине соответствует тройка (0; 0; 0). Есть еще 5 троек: (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 1) и (1; 1; 1). Заметим, что получившиеся тройки в точности совпадают с координатами вершин в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с выбранной вершиной, а оси проходят через выходящие из вершины ребра куба.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**1.** На километровых указателях, расположенных между пунктами $A$ и $B$, пишут два числа: одно число указывает расстояние от указателя до пункта $A$, а другое число указывает расстояние от этого же указателя до пункта $B$ на этой дороге.

На рис. 2 изображены два указателя на одной и той же дороге. Какое число следует поставить вместо вопросительного знака?


Рис. 2

*Указание.* Сумма чисел на каждом столбе постоянна.

**2.*** Как указать направление при движении по окружности, например по круговой беговой дорожке стадиона?

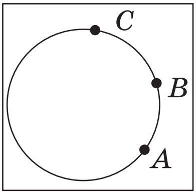


Рис. 3

*Указание.* Можно указать три точки на окружности и порядок, в каком их проходить. Для движения против часовой стрелки на рис. 3 это будет порядок $ABC$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.2.** На клетчатой бумаге точки расставлены так, как указано на рис. 4. В каком из указанных направлений нужно двигаться по прямой, чтобы из точки $A$ попасть в точку $M$?

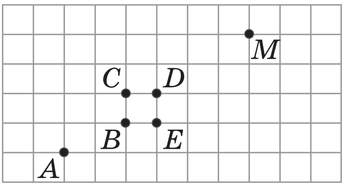


Рис. 4

1) от точки $A$ к точке $B$;

2) от точки $A$ к точке $C$;

3) от точки $A$ к точке $D$;

4) от точки $A$ к точке $E$.

*Указание.* Из точки $A$ в точку $M$ можно попасть, если пройти 6 шагов сетки вправо и 4 шага сетки вверх, а из точки $A$ в точку $D$ можно попасть, если пройти 3 шага сетки вправо и 2 шага сетки вверх.

**2.3.** При каких из указанных движений человека на плоскости из точки $A$ в точку $B$ общее направление перемещения соответствует показанию на компасе в 270° против часовой стрелки от направления на север?

1) сначала 200 м на восток, затем 100 м на запад;

2) сначала 100 м на восток, затем 200 м на запад;

3) сначала 100 м на юг, затем 200 м на запад, затем 100 м на север;

4) сначала 200 м на север, затем 100 м на запад, затем 100 м на юг.

*Указание.* 270° можно представить как сумму 180° + 90°. Направление на 180° соответствует движению в южном направлении, а если это направление изменить на 90°, то получим движение на запад.

**2.4.** При каких из указанных движений человека на плоскости из точки $A$ в точку $B$ общее направление перемещения соответствует показанию на компасе в 225° по часовой стрелке от направления на север?

1) сначала 100 м на север, затем 100 м на восток;

2) сначала 100 м на запад, затем 100 м на юг;

3) сначала 100 м на юг, затем 100 м на запад;

4) сначала 100 м на восток, затем 100 м на север.

*Указание.* 225° можно представить как сумму 180° + 45°. Направление на 180° соответствует движению в южном направлении, а если это направление изменить на 45°, то получим движение на юго-запад.

# Глава 2
# ДЕЛИТЕЛИ И КРАТНЫЕ

**Цель главы** — продолжить изучение свойств делимости для натуральных чисел.

**Особенности главы.** Глава имеет важное значение для всего последующего школьного курса математики, потому что в ней в дополнение к изученным в 5 классе свойствам делимости добавляется еще целый ряд новых понятий и свойств. В главе напоминается о делителях натурального числа, о простых и составных числах, что подводит учащихся к основной теореме арифметики, вводятся понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел; показывается, как находить наибольший общий делитель двух натуральных чисел и длину наибольшей общей меры двух отрезков при помощи алгоритма Евклида, как используются понятия наибольшего общего делителя и общего кратного двух чисел при сокращении дробей и приведении дробей к общему знаменателю.

## § 1. ДЕЛИТЕЛИ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

**Цель параграфа** — повторить понятие делителя натурального числа, напомнить понятия четного и нечетного чисел и указать общий вид числа, кратного данному числу $a$.

**Особенности главы.** В главе в основном повторяются те понятия, которые изучались в 5 классе, потому что этот материал необходим для изучения в последующих параграфах. Новым является изучение понятия кратности чисел, а также способ записи с помощью формулы всех чисел, кратных заданному числу.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: понятие натурального числа; число 0; сложение; умножение и деление натуральных чисел в десятичной системе счисления.

**Новые математические понятия:** делитель; кратное; формула четного числа; формула нечетного числа; формула числа, кратного числу $a$.

**Вспомогательные понятия:** эквивалентные утверждения (синоним: равносильные утверждения); признак делимости; последовательные натуральные числа; таблица умножения.

**Открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Какие делители числа 1026 вы можете найти?

*Ответ.* Раскладывая число 1026 на простые множители, получаем

$$1026 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19 = 2 \cdot 3^3 \cdot 19.$$

Теперь легко представить число 1026 в виде произведений пар чисел:

| Первый сомножитель | 1 | 2 | 3 | 6 | 9 | 18 | 19 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Второй сомножитель | 1026 | 513 | 342 | 171 | 114 | 57 | 54 | 38 |

Всего делителей шестнадцать: 1; 2; 3; 6; 9; 18; 19; 27; 38; 54; 57; 114; 171; 342; 513; 1026. Тем самым найдены все делители. Этого в вопросе не требуется, поэтому вполне достаточно указать один или несколько делителей.

**1.2.** На какое число необходимо умножить 8, чтобы получить 256?

*Ответ.* На 32.

**1.3.*** Почему при нахождении всех делителей числа 15 можно ограничиться перебором чисел от 2 до 7?

*Ответ.* Если взять делитель $d$, то, разделив на него число 15, получим $15 = d \cdot k$, где $k$ — натуральное число. Если $d$ больше 7, то $k$ должно быть меньше 2, а с учетом того, что $k$ — натуральное число, получаем $k = 1$ и $d = 15$. Значит, при переборе можно ограничиться проверкой делимости числа 15 на числа, не большие 7.

**1.4.** Какой формулой задаются все натуральные числа, кратные числу 100?

*Ответ.* Такой формулой будет $n = 100k$.

**1.5.*** Какое наименьшее натуральное число кратно 1?

*Ответ.* 1.

**1.6.** Почему число 0 считают кратным числу 1998?

*Ответ.* Потому что число 0 представимо в виде $0 = 1998 \cdot 0$.

**1.7.*** Почему число, запись которого в десятичной системе оканчивается на одну из цифр — 0 или 5, кратно 5?

*Ответ.* Это число имеет вид $10k + 0 = 5 \cdot 2k$ или $10k + 5 = 5 \cdot (2k + 1)$, где $k$ — натуральное число или 0. По определению каждое из таких чисел кратно 5.

**1.8.** Какими будут числа $n$, заданные формулой $n = 2 \cdot m + 1$, где $m$ — любое натуральное число?

*Ответ.* Заметим, что $2m + 1 = 2(m + 1) - 1$. Этой формулой описываются все нечетные числа, большие 1.

**1.9.*** Чему равна сумма первых десяти нечетных чисел?

*Ответ.* В тексте пункта 1.9.* отмечена такая закономерность: сумма двух последовательных нечетных чисел, начиная с 1, равна $2^2$; сумма трех последовательных нечетных чисел, начиная с 1, равна $3^2$; сумма четырех — равна $4^2$ и т.д. В данном случае речь идет о сумме десяти последовательных нечетных чисел, начиная с 1, значит, она равна $10^2 = 100$.

Можно непосредственно вычислить указанную сумму, группируя слагаемые следующим образом:

$$(1 + 19) + (3 + 17) + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11) =$$
$$= 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100.$$

**1.10.**** Почему значение выражения $a^4 + a^3 + a^2 + a$ при любом натуральном $a$ четно?

*Ответ.* Если число $a$ четно, то все числа $a^2$, $a^3$, $a^4$ также четны. Сумма четных чисел тоже четна.

Пусть теперь $a$ нечетно. Произведение двух нечетных чисел тоже нечетно. Следовательно, $a^2$, $a^3$ и $a^4$ — нечетные числа. Сумма же $a^4 + a^3 + a^2 + a$ есть сумма четырех нечетных чисел, а поэтому является числом четным.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**2.** В виде какого выражения можно записать все натуральные числа, кратные: а) числу 2; б) числу 3; в) числу 5; г) числам 2 и 3; д) числам 2 и 5; е) числам 3 и 5; е)* числам 2, 3 и 5?

*Указание.* В пунктах г) — е) решение сводится к записи всех чисел, кратных произведению указанных чисел.

**8.*** Почему все числа, две последние цифры которых либо 00, либо 25, либо 50, либо 75, делятся на 25?

*Указание.* Данные числа имеют вид либо $100m = 25 \cdot (4m)$, либо $100m + 25 = 25 \cdot (4m + 1)$, либо $100m + 50 = 25 \cdot (4m + 2)$, либо $100m + 75 = 25 \cdot (4m + 3)$, где $m$ — целое число.

**12.**** Укажите общие делители всех чисел, имеющих вид $48k$, где $k$ — натуральное число.

*Указание.* Каждый делитель числа 48 будет общим делителем всех чисел заданного вида.

**13.*** Верно ли, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, обязательно делится на 37?

*Указание.* $111 = 37 \cdot 3$.

**14.** Четной или нечетной является сумма:

а) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$;

б) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 25$;

в)* $1+ 3 + 5+ 7 + \ldots +199$;

г)** $1 + 3 + 5 + 7+ \ldots + 1\,000\,001$?

*Указание.* В каждой из сумм слагаемые нечетны. Поэтому для ответа на вопрос задачи достаточно узнать, четное или нечетное количество слагаемых в сумме.

**15.**** Четной или нечетной является сумма:

а) всех двузначных чисел; б) всех трехзначных чисел?

*Указание.* Для ответа на вопрос задачи достаточно узнать количество нечетных слагаемых. Двузначные нечетные слагаемые — это числа вида $2m - 1$, где $m$ — целое, причем $6 \le m \le 50$. Трехзначные нечетные слагаемые — это числа вида $2m - 1$, причем $51 \le m \le 500$.

**18.**** При каких натуральных $n$ число $n^2 - 1$ делится:

а) на 2; б) на 3?

*Указание.* $n^2 - 1 = (n - 1) \cdot (n + 1)$. Отсюда следует, что заданное число будет делиться на 2 только в тех случаях, когда $n - 1$ четно или $n + 1$ четно, т.е. при нечетных значениях $n$. Аналогично заданное число будет делиться на 3 только в тех случаях, когда $n - 1$ или $n + 1$ кратно 3. Для этого $n$ не должно делиться на 3.

**19.**** Покажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел всегда делится на 3.

*Указание.* Три последовательных натуральных числа удобно записать в виде: $n - 1$, $n$, $n + 1$, если $n > 1$. Тогда сумма этих трех чисел равна $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$, то есть делится на 3.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.2.** Сколько различных делителей имеет число $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, включая числа 1 и 30?

1) 4; 2) 6; 3) 8; 4) 12.

*Указание.* Делители можно подсчитывать, основываясь на следующих рассуждениях. Разобьем множество всех делителей на две группы: в одной группе те, которые делятся на 2, а в другой, — которые не делятся на 2. В каждой из этих групп будет по равному числу делителей. После этого в каждой группе можно провести аналогичные рассуждения относительно делимости на 3.

**2.3.** Какие из указанных сумм являются нечетными?

1) сумма всех натуральных чисел от 1 до 5 включительно;

2) сумма всех натуральных чисел от 6 до 12 включительно;

3) сумма всех натуральных чисел от 11 до 20 включительно;

4) сумма всех натуральных чисел от 1 до 10 включительно.

*Указание.* В каждом из случаев нужно определить количество нечетных слагаемых, входящих в сумму.

**2.4.** Какие из указанных сумм являются четными?

1) сумма всех нечетных натуральных чисел от 1 до 15 включительно;

2) сумма всех нечетных натуральных чисел от 1 до 21 включительно;

3) сумма всех нечетных натуральных чисел от 7 до 21 включительно;

4) сумма всех натуральных чисел от 1 до 20 включительно.

*Указание.* В каждом из случаев нужно определить количество нечетных слагаемых, входящих в сумму.

## § 2. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБИ

**Цель параграфа** — напомнить учащимся о простых и составных числах, сформулировать и проиллюстрировать примерами основную теорему арифметики; рассуждением от противного показать, что простых чисел бесконечно много; научить учащихся раскладывать натуральные числа на простые множители и сокращать дроби.

**Особенности параграфа.** Параграф посвящен понятию простого числа — одному из самых основных и самых глубоких понятий математики. Простые числа являются тем строительным материалом, из которого сооружается все здание арифметики. Поэтому в параграфе напоминается и уточняется понятие простого числа, вспоминается способ нахождения простых чисел при помощи «решета Эратосфена». Затем рассматривается важное утверждение, которое известно как основная теорема арифметики.

На третьем уровне предлагается рассмотреть доказательство бесконечности множества простых чисел.

Все учащиеся должны научиться раскладывать число на простые множители, находить делители числа и сокращать дроби.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: «решето Эратосфена»; сложение, умножение и деление натуральных чисел; понятие степени; понятие делителя; понятие дроби.

**Новые математические понятия:** разложение числа на простые множители; степень простого числа в разложении числа на простые множители; сокращение дроби.

**Вспомогательные понятия:** признак делимости; делитель числа; бесконечно много.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Как проверить, что число 43 простое?

*Варианты ответа.* Первый. При помощи решета Эратосфена. В ряду чисел от 2 до 43 оставляем число 2 как первое простое и вычеркиваем все последующие числа, делящиеся на 2. Затем оставляем число 3 — второе простое — и вычеркиваем все, делящиеся на 3. И так далее. В итоге число 43 вычеркнуто не будет. Значит, оно простое.

Второй. На третьем уровне можно объяснить учащимся, что число $n$ является простым, если оно не имеет простых делителей, не превосходящих $\sqrt{43}$. В частности, в простоте числа 43 можно убедиться, проверив, что оно не делится на простые числа, меньшие $\sqrt{43} < 7$, т.е. достаточно проверить, $\sqrt{43} < 7$ и что 43 не делится на 2, 3, 5. После этого можно будет сделать вывод, что 43 — простое число.

**2.2.** Как представить в виде произведения простых сомножителей число $98 \cdot 99 \cdot 100$?

*Ответ.* Надо каждый множитель в отдельности разложить на простые множители: $98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7 \cdot 7$, $99 = 3 \cdot 33 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, $100 = 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Отсюда $98 \cdot 99 \cdot 100 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

**2.3.** Как вы понимаете слова «если не учитывать порядок сомножителей»?

*Ответ.* Единственность разложения на простые множители с точностью до перестановки сомножителей понимается в том смысле, что любые два разложения числа на простые множители содержат одни и те же простые числа и каждый простой множитель встречается одинаковое число раз в обоих разложениях.

Например, $2 \cdot 2 \cdot 3$ и $2 \cdot 3 \cdot 3$ — разложения разных чисел, но $2 \cdot 2 \cdot 3$ и $2 \cdot 3 \cdot 2$ — разложения одного числа 12.

**2.4.** Как сокращенно записать произведение всех натуральных чисел от 1 до 10 в виде произведения степеней простых чисел?

*Ответ.* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$
$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$

**2.5.** Почему самое большое десятизначное число не является простым?

*Ответ.* Все цифры этого числа равны 9. Их сумма делится на 9. Следовательно, число 9 999 999 999 составное, причем $9\,999\,999\,999 = 9 \cdot 1\,111\,111\,111$.

**2.6.**** Почему число $2^{99} \cdot 3^{100}$ не делится нацело на число $2^{100} \cdot 3^{99}$.

*Ответ.* Предположим, что число $a = 2^{99} \cdot 3^{100}$ делится на число $m = 2^{100} \cdot 3^{99}$.

Тогда степень простого делителя 2 в числе $m$ должна быть не больше степени простого делителя 2 в числе $a$, т.е. 100 должно быть не больше 99. Получаем противоречие. Поэтому число $2^{100} \cdot 3^{99}$ не может быть делителем числа $2^{99} \cdot 3^{100}$.

**2.7.**** Как показать, что существует простое число, которое больше 97?

*Ответ.* Составим произведение всех простых чисел от 2 до 97, прибавим к этому произведению единицу. Получим число $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 97 + 1$. При делении на каждое из простых чисел от 2 до 97 включительно оно дает остаток 1. В то же время число $n > 1$ и должно быть простым или составным. Если оно составное, то по основной теореме арифметики число $n$ должно делиться на некоторое простое число $p$. Это простое $p$ не встречается среди простых чисел от 2 до 97 и поэтому $p > 97$.

На этот вопрос можно ответить и непосредственно, указав простое число 101. В его простоте легко убедиться, обнаружив, что оно не делится на 2, 3, 5, 7. Поскольку $11^2 = 121 > 101$, то на числа, большие 11, делить его не обязательно. Правда, такой ответ не использует соображений, изложенных в тексте пункта 2.7.

**2.8.** Как можно сократить дробь $\dfrac{987\,654\,321}{123\,456\,789}$?

*Ответ.* Сумма цифр числителя, так же как и сумма цифр знаменателя, равна 45 и делится на 9. Следовательно, числитель и знаменатель делятся на одно и то же число 9. Разделив числитель и знаменатель на 9, получим дробь $\dfrac{109\,739\,369}{13\,717\,421}$.

Заметим, что дальнейшие попытки отыскать общий делитель числителя и знаменателя весьма непросты и требовать этого от учеников 6 класса не нужно.

**Указание к решению наиболее трудных задач.**

**5.** Сколько нулей в конце записи произведения всех чисел от 1 до 20?

*Указание.* Количество нулей совпадает с показателем степени числа 5 в разложении произведения на простые множители.

**7.** Укажите все двузначные числа, разложение которых на простые сомножители содержит только два сомножителя. Найдите среди них числа, имеющие два одинаковых простых сомножителя.

*Указание.* Проще всего составить произведения пар простых чисел: числа 2 на простые числа, меньшие 50; числа 3 на простые числа, меньшие 34; числа 5 на простые числа, меньшие 20; и т.д.

**11.** Каким числам кратно наибольшее трехзначное число?

*Указание.* Нужные числа — делители числа 999.

**14.**** Покажите, что число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1$$

делится на 11.

*Указание.* Для решения задачи можно в произведении сгруппировать сомножители по парам:

$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = (1 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 8) \cdot$ $\cdot (5 \cdot 9)$.

Тогда $N + 1 = (11 - 1) \cdot (11 \cdot 1 + 1) \cdot (11 \cdot 2 - 1) \cdot (11 \cdot 3 - 1) \cdot$ $\cdot (11 \cdot 4 + 1) + 1$. Если теперь начать раскрывать скобки, то в итоге останутся слагаемые, каждое из которых имеет множитель 11.

**15.**** Укажите десять последовательных натуральных составных чисел, т.е. чисел вида $a$, $a + 1$, $a + 2, \ldots, a + 9$, каждое из которых составное.

*Указание.* Десять последовательных натуральных чисел можно искать не только в таком виде, как они записаны в условии задачи, но и в другом. Например, $m + 5$, $m + 6$, $m + 7$, $\ldots$, $m + 14$ также десять последовательных натуральных чисел. Если в этой записи взять $m = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 14$, то ясно, что первое из записанных чисел будет иметь делитель 5, второе — делитель 6, и т.д.

**18.*** Почему все четырехзначные числа, записанные одинаковыми цифрами, являются составными?

*Указание.* Заметим, что число 1111 делится на 11, а остальные такие числа кратны числу 1111.

**19.**** Покажите, что двадцатипятизначное число, записанное одними единицами, является составным.

*Указание.* Такое число делится на 11 111.

**21.**** Проверьте, что в равенстве $989 \cdot 1147 = 851 \cdot 1333$ каждый из четырех сомножителей является составным числом.

*Указание.* Если предположить, что 989 простое, то это число должно содержаться в разложении одного из чисел 851 или 1333 на простые множители, что невозможно.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** На какое наибольшее число из указанных чисел можно сократить числитель и знаменатель выражения $\dfrac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}$?

1) 5; 2) 9; 3) 15; 4) 45.

*Указание.* На число 2 сократить невозможно. В числителе можно найти только нечетные множители 3 и 5, которые являются множителями и в знаменателе.

**2.3.** Какие из указанных чисел являются делителями произведения $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$?

1) 105; 2) 120; 3) 140; 4) 210.

*Указание.* Каждое из приведенных чисел нужно представить в виде произведения простых множителей.

**2.4.** Какие из указанных дробей нельзя сократить?

1) $\dfrac{37}{33}$; 2) $\dfrac{27}{111}$; 3) $\dfrac{37}{111}$; 4) $\dfrac{33}{121}$.

*Указание.* Число 37 простое, поэтому в варианте 1) дробь несократима. В варианте 2) дробь можно сократить на 3; в варианте 3) дробь можно сократить на 37; в варианте 4) дробь можно сократить на 11.

## § 3. ОБЩИЕ ДЕЛИТЕЛИ И ОБЩИЕ КРАТНЫЕ

**Цель параграфа** — ввести понятие общего делителя двух чисел и научить школьников находить наибольший общий делитель путем разложения чисел на простые множители.

**Особенности параграфа.** Нахождение наибольшего общего делителя двух чисел несложно, когда данные числа представлены в виде произведения простых чисел. Однако сделать это не всегда просто. Поэтому рассматривается общий подход к нахождению наибольшего общего делителя, основанный на алгоритме

Евклида. Важно обратить внимание на то, что алгоритм Евклида применим к любым парам натуральных чисел и всегда приводит к конкретному однозначному результату. Рассматривается также геометрическая иллюстрация алгоритма Евклида; определяется понятие взаимно простых чисел и понятие несократимой дроби; вводится понятие наименьшего общего кратного двух натуральных чисел и показывается, как пользоваться им при приведении дробей к общему знаменателю.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: деление с остатком; неполное частное; остаток; свойства делимости нацело.

**Новые математические понятия:** общий делитель; наибольший общий делитель; общая мера отрезков; наибольшая общая мера; взаимно простые числа; несократимая дробь; общее кратное; наименьшее общее кратное.

**Вспомогательные понятия:** делитель; кратное; разложение числа на простые множители; формула разности квадратов $a^2 - b^2$; прямоугольник; квадрат.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Какое число является общим делителем для всех натуральных чисел?

*Указание.* Каждое натуральное число имеет делителем 1. Поэтому единица будет общим делителем всех натуральных чисел. Ясно, что других общих делителей нет, так как число не может быть меньше его делителя.

**3.2.** Чему равно значение НОД $(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6,\ 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)$?

*Указание.* Так как $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то НОД $(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6,\ 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

**3.3.** Как показать, что число $3^{12} - 1$ делится на 13?

*Указание.* $3^{12} = (3^3)^4 = 27^4$, $(27^4 - 1) = (27^2 - 1)(27^2 + 1) = (27 - 1)(27 + 1)(27^2 + 1) = 26\,(27 + 1)(27^2 + 1) = 2 \cdot 13 \cdot 28\,(1 + 27^2)$.

**3.4.**** Как показать, что НОД $(a + b, b)$ = НОД $(a, b)$?

*Ответ.* Числа $a + b$ и $b$ имеют те же самые общие делители, что и числа $a$ и $b$. Если это проверить, то получим, что и наибольшие общие делители пар $a + b$, $b$ и $a$, $b$ тоже одинаковы.

Проверка: пусть $d$ — общий делитель чисел $a$ и $b$. Тогда $d$ делит сумму $a + b$ и поэтому является общим делителем чисел $a + b$ и $b$.

Обратно, пусть $d$ — общий делитель чисел $a + b$ и $b$. Тогда $a = (a + b) - b$, т.е. $d$ — делитель числа $a$ и поэтому является общим делителем чисел $a$ и $b$.

**3.5.**** Как изменится наибольшая общая мера двух отрезков, если их длины одновременно увеличить в 10 раз?

*Ответ.* Если измерить длины новых отрезков единицей длины, в 10 раз большей прежней, то их длины будут выражаться теми же числами. Значит, наибольшая общая мера выразится тем же числом, но в новых единицах длины. Следовательно, наибольшая общая мера двух новых отрезков в 10 раз больше наибольшей общей меры исходных отрезков.

**3.6.** Как показать, что НОД $(3,50) = 1$?

*Ответ.* Первый способ. Число 3 простое и имеет лишь два делителя 1 и 3. Число 50 не делится на 3. Следовательно, числа 3 и 50 имеют лишь один общий делитель 1. Он и будет их наибольшим общим делителем.

Второй способ. Продемонстрируем на этом примере использование алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

$$50 = 3 \cdot 16 + 2;\ 3 = 2 \cdot 1 + 1,\ 2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

Предпоследний (последний ненулевой) остаток равен 1, поэтому числа 3 и 50 взаимно просты.

**3.7.**** Как показать, что дробь, у которой числитель и знаменатель являются различными простыми числами, несократима?

*Ответ.* Вычислим наибольший общий делитель числителя и знаменателя. По условию числитель и знаменатель — разные простые числа. Если обозначить их через $p$ и $q$, то делителями $p$ будут лишь числа 1 и $p$, а делителями $q$ — лишь числа 1 и $q$. При этом $p \neq q$. Следовательно, $p$ и $q$ имеют единственный общий делитель 1. А это значит, что НОД $(p,\ q) = 1$ и данная дробь несократима.

**3.8.** Почему всегда НОК $(a,\ b)$ не больше, чем $a \cdot b$?

*Ответ.* Произведение $a \cdot b$ делится на $a$ и делится на $b$. Следовательно, оно кратно $a$ и кратно $b$. Поэтому $a \cdot b$ — общее кратное чисел $a$ и $b$. Поскольку НОК $(a,\ b)$ — наименьшее из общих кратных, то НОК $(a,\ b)$ не больше, чем $a \cdot b$.

**3.9.** Какой общий знаменатель у дробей $\frac{1}{2^9}$ и $\frac{1}{2^{10}}$ вы можете найти?

*Ответ.* В качестве общего знаменателя можно взять любое общее кратное чисел $2^9$ и $2^{10}$. В этом примере в качестве общего знаменателя удобно взять НОК $(2^9,\ 2^{10}) = 2^{10}$, так как в этом случае мы получим дроби $\frac{2}{2^{10}}$ и $\frac{1}{2^{10}}$ с наименьшим общим знаменателем.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**3.** Какой остаток получится при делении числа 27 346: а) на 5; б) на 10; в) на 4; г) на 25?

*Указание.* Для ответа на вопрос пункта а) достаточно представить заданное число в виде суммы числа, кратного 5, и небольшого числа. Например, $27\,346 = 27\,340 + 6 = 5 \cdot (2 \cdot 2734) + 6$. После этого ясно, что остаток от деления числа 27 346 на 5 такой же, как и остаток от деления числа 6 на 5. Аналогично решаются и другие примеры.

**4.**** Пусть $a > b$. Покажите, что у пары чисел $a$ и $b$ и у пары чисел $a - b$ и $b$ совпадают общие делители.

*Указание.* Провести два рассуждения (см. ответ на вопрос 3.4):

1) показать, что если число $d$ — общий делитель чисел $a$ и $b$, то $d$ также общий делитель чисел $a - b$ и $b$;

2) показать, что каждый общий делитель чисел $a - b$ и $b$ является также общим делителем чисел $a$ и $b$.

**14.**** Покажите, что если правильная дробь $\frac{m}{n}$ несократима, то дробь $\frac{n-m}{n}$, дополняющая дробь $\frac{m}{n}$ до 1, тоже несократима.

*Указание.* Вспомнить утверждение, сформулированное в задаче 4.**

**16.**** Чтобы измерить расстояние между двумя деревьями, отец и сын отошли от одного дерева и дошли до второго дерева. Длина шага отца 70 см, длина шага сына 56 см. Найдите расстояние между деревьями, если известно, что их следы совпали 10 раз, включая начало и конец пути.

*Указание.* Найти НОК (70, 56).

**19.**** Покажите, что произведение НОД и НОК двух чисел равно произведению этих чисел.

*Указание.* Если НОД $(a, b) = p$, то $a = ps$, $b = pt$, где $s$ и $t$ взаимно простые. Тогда НОК $(a, b) = p \cdot s \cdot t$ и НОД $(a, b) \cdot$ НОК $(a, b) = p \cdot s \cdot t \cdot p = (p \cdot s) \cdot (p \cdot t) = a \cdot b$.

**20.**** Наименьшее общее кратное двух чисел равно 210, их наибольший общий делитель равен 21. Найдите эти числа.

*Указание.* Можно искать числа в виде $a = 21 \cdot m$, $b = 21 \cdot n$, где $m$ и $n$ — взаимно простые числа, причем $m \le n$. Тогда НОК $(a, b) = 21m \cdot n = 210$. Следовательно, $m \cdot n = 10$, после чего нетрудно найти два варианта: $m = 1$ и $n = 10$ или $m = 2$ и $n = 5$.

**22.**** При каких натуральных значениях $n$ дробь $\frac{3n+4}{n}$ сократима?

*Указание.* Запишем равенство $\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$.

Из этого равенства следует, что исходная дробь сократима только тогда, когда сократима дробь $\frac{4}{n}$. Так как $4 = 2^2$, то сокращение возможно только при четном $n$.

**23.**** При каких натуральных значениях $n$ дробь $\frac{5n+16}{n+2}$ есть а) целое число; б) сократимая дробь; в) несократимая дробь?

*Указание.* а) Запишем равенство $\frac{5n+16}{n+2} = 5 + \frac{6}{n+2}$. Из этого равенства следует, что исходная дробь равна целому числу только в том случае, когда число $\frac{6}{n+2}$ целое. Учитывая, что $n + 2 \geq 3$, находим два варианта: $n + 2 = 3$ или $n + 2 = 6$.

б) Если $n + 2$ и $5n + 16$ имеют общий делитель, отличный от 1, то и $5n + 16 - 5(n + 2) = 6$ имеет этот же делитель. Но $6 = 3 \cdot 2$, поэтому дробь сократима, если $n$ четное, а также тогда, когда $n + 2$ делится на 3. в) Если $n + 2$ нечетное и не делится на 3, то $\frac{5n+16}{n+2}$ несократима.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.1.** Какое из указанных чисел является наибольшим общим делителем чисел 30 и 72?

1) 3; 2) 6; 3) 8; 4) 12.

*Указание.* Можно искать НОД (30, 72 – 60).

**1.4.** Какое из указанных чисел является наименьшим общим кратным чисел 60 и 150?

1) $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; 2) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; 3) $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; 4) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

*Указание.* Можно заметить, что степень числа 3 должна быть равной 1.

**2.2.** Какие из указанных чисел являются общими кратными чисел 20 и 35?

1) 70; 2) 280; 3) 420; 4) 630.

*Указание.* Сначала можно найти НОК (20, 35) = 140.

**2.4.** Напомним, что если натуральные числа $a$ и $b$ делятся на натуральное число $c$, причем $a$ больше $b$, то число $a - b$ тоже делится на $c$. При каких из указанных значений $n$ числа $n$ и $n + 3$ являются взаимно простыми?

1) $n = 101$;  2) $n = 102$;  3) $n = 103$;  4) $n = 104$.

*Указание*. Если $n$ и $n + 3$ имеют общий делитель $d$, то число $d$ будет также делителем разности $(n + 3) - n = 3$. Значит, либо числа $n$ и $(n + 3)$ взаимно простые, либо их общим делителем является число 3. Осталось выбрать среди данных чисел те, которые не делятся на 3.

# Глава 3
# ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

**Цель главы** — ввести понятия медианы, биссектрисы и высоты, рассмотреть первый признак равенства треугольников и с его помощью установить ряд свойств равнобедренного треугольника и ромба.

**Особенности главы.** В главе сначала вводятся понятия, которые в дальнейшем будут использоваться для установления новых свойств. Затем рассматривается важный с теоретической точки зрения первый признак равенства треугольников. В дальнейшем с использованием этого признака устанавливаются некоторые свойства равнобедренного треугольника и ромба.

Одним из существенных моментов в данной главе является то, что большое внимание уделяется понятию соответствия, в частности, соответствия между вершинами треугольника. Рассматривая этот материал, необходимо стремиться к тому, чтобы учащиеся поняли, что соответствие — это не то, что сразу присутствует в рассматриваемой ситуации, а то, что мы сами задаем по установленным правилам и затем используем в последующих рассуждениях.

## § 1. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

**Цель параграфа —** ввести понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

**Особенности параграфа.** В параграфе вводятся понятия, которые в дальнейшем неоднократно будут объектами изучения. При рассмотрении этого материала и решении задач главное внимание следует уделить тому, чтобы ученики постепенно привыкали к понятиям медианы, биссектрисы и высоты. Те свойства этих линий, которые можно заметить, следует выделять, обращать на них внимание и сообщать, что эти свойства будут обоснованы гораздо позже.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: отрезок; треугольник; вершина треугольника; сторона треугольника; угол треугольника; прямой угол.

**Новые математические понятия:** медиана треугольника; биссектриса треугольника; высота треугольника; основание высоты.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Может ли медиана треугольника быть в 100 раз длиннее его стороны?

*Ответ.* Может. Например, если взять треугольник со сторонами 200 см, 200 см и 1 см, то в таком треугольнике медиана, проведенная к стороне в 1 см, точно больше 100 см.

**1.2.** Может ли биссектриса треугольника быть короче всех его сторон?

*Ответ.* Может. Например, в треугольнике со сторонами 10 см, 10 см и 19 см биссектриса, проведенная к стороне в 19 см, имеет длину меньше 1 см.

**1.3.** Может ли высота треугольника совпадать с одной из его сторон?

*Ответ.* Да, если треугольник прямоугольный, а высота опущена на один из его катетов. Две высоты прямоугольного треугольника — его катеты, основания этих высот — вершина прямого угла треугольника.

**1.4.** Могут ли две высоты треугольника быть расположены вне его?

*Ответ.* Один из углов такого треугольника тупой. Тогда высота, расположенная вне треугольника, опущена из вершины острого угла. Всего в случае тупоугольного треугольника будет две высоты, расположенные вне его.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**6.**** Начертите произвольный треугольник. С помощью измерительной линейки проведите все три медианы этого треугольника. Какие предположения вы можете сделать о пересечении медиан треугольника?

*Указание.* Можно заметить, что все три медианы пересекутся в одной точке.

**7.**** Начертите произвольный треугольник $ABC$. С помощью линейки проведите в нем две медианы $AM$ и $BN$. Через точку пересечения этих медиан и третью вершину $C$ проведите прямую. Сравните длины отрезков, на которые эта прямая разделит сторону $AB$. Какие предположения вы можете сделать?

*Указание.* При аккуратном чертеже можно заметить, что прямая, проходящая через вершину $C$ и точку пересечения медиан, выходящих из двух других вершин, $A$ и $B$, делит сторону

$AB$ пополам. То есть эта прямая является продолжением медианы, выходящей из вершины $C$.

**8.**** Начертите произвольный треугольник. С помощью измерительной линейки и транспортира проведите в нем все три биссектрисы. Какие предположения вы можете сделать о пересечении биссектрис треугольника?

*Указание.* Можно заметить, что все три биссектрисы пересекутся в одной точке. Можно также заметить, что эта точка равноудалена от сторон треугольника, т.е. перпендикуляры, опущенные из нее на стороны треугольника, равны между собой.

**9.**** Начертите произвольный треугольник $ABC$. Проведите в нем биссектрисы углов $A$ и $B$. Через точку пересечения биссектрис и вершину $C$ проведите прямую. Сравните углы, на которые эта прямая разбивает угол $C$. Какие предположения вы можете сделать?

*Указание.* Угол $C$ разделится на два равных угла.

**10.**** Начертите остроугольный треугольник. С помощью угольника (или линейки и транспортира) проведите в нем все три высоты. Какие предположения вы можете сделать, глядя на получившийся рисунок?

*Ответ.* Все три высоты пройдут через одну точку внутри треугольника.

**11.**** Начертите остроугольный треугольник $ABC$ и проведите в нем высоты $AM$ и $BN$. Через точку пересечения высот и вершину $C$ проведите прямую. Измерьте при помощи транспортира угол, который образует эта прямая со стороной $AB$. Какие предположения вы можете сделать?

*Указание.* Измеренный угол будет прямым.

**12.**** Начертите тупоугольный треугольник $ABC$ с тупым углом при вершине $A$. Проведите прямые через все его высоты. Какие выводы вы можете сделать о пересечении этих прямых?

*Ответ.* Все три прямые, содержащие высоты, пройдут через одну точку вне треугольника.

**13.** Где в прямоугольном треугольнике расположена точка пересечения высот?

*Ответ.* В вершине прямого угла.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** На плоскости проведены два луча $AB$ и $AC$, угол между которыми равен 48°. Луч $AM$ является биссектрисой одного из плоских углов со сторонами $AB$ и $AC$. Какие значения не может иметь величина угла $BAM$?

1) 24°; 2) 36°; 3) 144°; 4) 156°.

*Указание.* Важно понять, что образуется два плоских угла, а поэтому в каждом из них нужно рассмотреть биссектрису.

**2.4.** $ABCD$ и $CDEF$ — два квадрата, имеющих общую сторону $CD$. В каких из указанных треугольников отрезок $EF$ является высотой?

1) $\Delta BCF$; 2) $\Delta CDF$; 3) $\Delta BEF$; 4) $\Delta BDF$.

*Указание.* Нужно выбрать треугольники, у которых одна из сторон расположена на прямой $AD$ или на прямой $BC$.

## § 2. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

**Цель параграфа** — познакомить учащихся с первым признаком равенства треугольников, научить устанавливать соответствие между углами и отрезками в равных треугольниках.

**Особенности параграфа.** В этом параграфе закладываются основы для всего последующего курса геометрии по двум важным направлениям. Первое из них относится к понятию взаимно однозначного соответствия между элементами двух множеств. В геометрии это напрямую относится к понятию равенства фигур, а в дальнейшем и к понятию подобия. Поэтому на изучение соответствия из-за совпадения числа элементов следует обратить особое внимание. Практика показывает, что при изучении равенства и подобия геометрических фигур основные трудности у учащихся чаще всего возникают из-за того, что они недостаточно обращают внимание на соответствие между элементами фигур.

Другое направление в этом параграфе относится к введению в курс геометрии как аксиомы первого признака равенства треугольников, что является основой для последующих логических построений, которые относятся к равенству фигур.

Первый признак появляется как обобщение хорошо знакомого первого признака равенства прямоугольных треугольников и принимается без доказательства. В параграфе особое внимание обращается также на связь между равенством треугольников и существованием перемещения, которое копию одного из треугольников переводит в другой треугольник. С учетом этого объясняется, что данное перемещение позволяет установить соответствие не только между сторонами и углами треугольников, но также между медианами, биссектрисами и т.д. При изучении параграфа важно напомнить учащимся известные свойства перемещений, признак равенства прямоугольных треугольников по катетам.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: равенство фигур; первый признак равенства прямоугольных треугольников.

**Новые математические понятия:** соответствие (между элементами треугольника); первый признак равенства треугольников.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Сколько всего различных однозначных соответствий можно установить между вершинами треугольников $ABC$ и $KLM$?

*Ответ.* Вершине $A$ можно сопоставить любую из трех вершин: $K$, $L$ или $M$, вершине $B$ — любую из двух оставшихся вершин, вершине $C$ — оставшуюся вершину второго треугольника. Всего различных соответствий $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

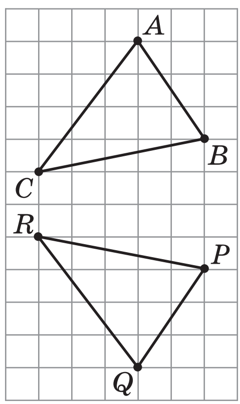


Рис. 1

**2.2.** Какой угол треугольника $KLM$ будет соответствовать углу $CBA$ треугольника $ABC$, если $A \to L$, $B \to K$, $C \to M$?

*Ответ.* Угол $MKL$. Впрочем, этот угол можно обозначить также $LKM$.

**2.3.** При каком соответствии вершин в равных треугольниках $ABC$ и $PQR$, изображенных на рис. 1, соответственные стороны будут попарно равны?

*Ответ.* $A \to Q$, $B \to P$, $C \to R$.

**2.4.** Как проверить, что на рис. 2 треугольники не равны?

*Вариант ответа.* Нарисовать внутри треугольника $KML$ треугольник, который равен треугольнику $ABC$.

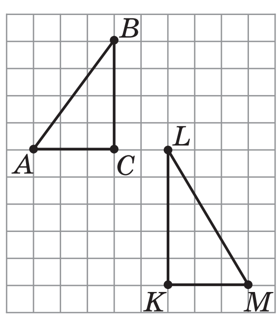


Рис. 2

**2.5.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются под прямым углом в точке $O$, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок $BD$, если отрезок $|AC| = 10$ см?

*Ответ.* $|BD| = 10$ см, поскольку прямоугольный треугольник $AOC$ равен прямоугольному треугольнику $BOD$.

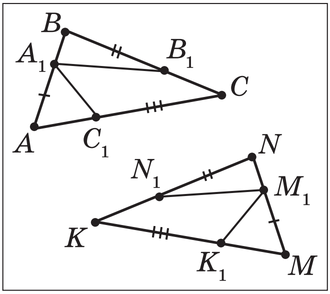


Рис. 3

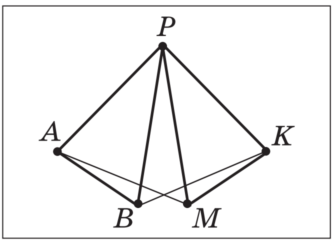


Рис. 4

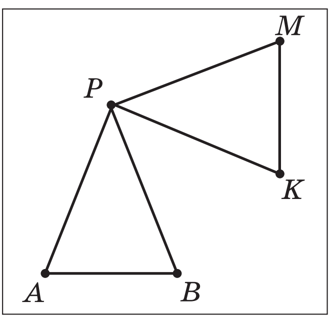


Рис. 5

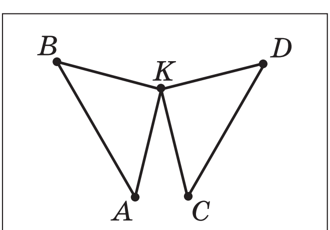


Рис. 6

**2.6.**** Какие равные между собой треугольники можно найти на рис. 3, если известно, что треугольник $MNK$ равен треугольнику $ABC$?

*Варианты ответа.* Например:
$\Delta A_1BB_1 = \Delta M_1NN_1$;
$\Delta A_1AC_1 = \Delta M_1MK_1$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**12.**** Треугольники $APB$ и $MPK$ равны и расположены, как на рис. 4, причем $AP = PB = MP = PK$. Объясните, почему $AM = BK$.

*Указание.* $\angle APM = \angle BPK$, поэтому $\Delta AMP = \Delta BKP$.

**13.**** Треугольники $APB$ и $MPK$ равны и расположены так, что $AP = PB = MP = PK$. Могут ли быть неравными отрезки $AM$ и $BK$.

*Указание.* Пример приведен на рис. 5.

**14.*** На рис. 6 для треугольников $ABK$ и $CDK$ выполняются соотношения: $AK = CK$, $BK = DK$, $\angle AKB = \angle CKD$. Объясните, почему треугольник с вершинами $C$, $K$, $B$ равен треугольнику с вершинами $A$, $K$, $D$.

*Указание.* Установить, что $\angle BKC = \angle DKA$.

**15.*** В треугольниках $ABC$ и $MNP$ равны углы $ABC$ и $MNP$, а сторона $AB$ не равна стороне $MN$, сторона $BC$ не равна стороне $NP$. Могут ли оказаться равными треугольники $ABC$ и $MNP$?

*Ответ.* Могут, если $NP = BA$, $NM = BC$ (рис. 7).

**16.**** В треугольниках $ABC$ и $MNP$ выполняются соотношения: $AC = MN$, $BC = NP$, $\angle ABC = \angle NPM$. Приведите примеры, когда эти треугольники не будут равными.

*Указание.* Переместим треугольник $MNP$ таким образом, что точка $P$ совместится с точкой $B$, точка $N$ — с точкой $C$, а $\angle MPN$ — с $\angle ABC$. Но в этом случае точка $M$ может не совпасть с точкой $A$ (рис. 8).

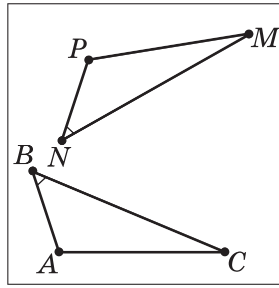


Рис. 7

**18.** Треугольники $ABC$ и $BCD$ на рис. 9 равны, при этом $AB = CD$, $\angle ABC = \angle DCB$. а) Объясните, почему $\Delta ABD = \Delta ACD$. б)* Объясните, почему $BM = MC$, если точка $M$ — середина отрезка $AD$.

*Указание.* а) $\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD$, $\angle DCA = \angle DCB - \angle BCA$, следовательно, $\angle ABD = \angle DCA$. б)* $\angle BAD = \angle CDA$, следовательно, $\Delta ABM = \Delta DCM$.

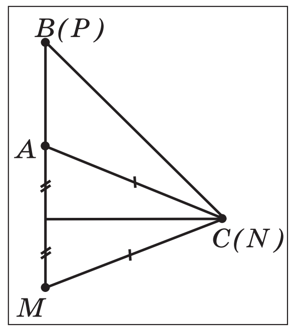


Рис. 8

**19.*** На рис. 10 диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся пополам в точке пересечения, угол $BDC$ равен 70°. Найдите величину угла $ABD$.

*Указание.* Докажем, что $\Delta AOB = \Delta COD$, $\Delta AOD = \Delta COB$. Отсюда $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle BCD = \angle DAB$. Поэтому $\Delta BAD = \Delta DCB$ по первому признаку равенства.

**20.*** На рис. 11 углы $ABM$ и $NBC$ равны, $AB = BC$, $BM = BN$. Объясните, почему углы $NAC$ и $MCA$ равны.

*Указание.* Рассмотреть треугольники $ABN$ и $CBM$ и доказать их равенство.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** На сторонах угла с вершиной $A$ поставлены точки (рис. 12), причем $AB = \frac{1}{2}AC = AD = \frac{1}{2}AE$. Какие пары указанных треугольников равны?

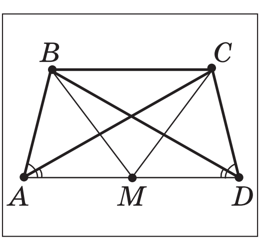


Рис. 9

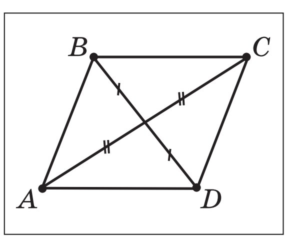


Рис. 10

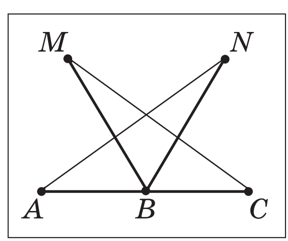


Рис. 11

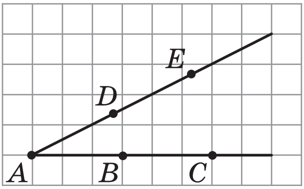


Рис. 12

1) $\Delta ABD$ и $\Delta ACE$; 2) $\Delta ABE$ и $\Delta ADC$; 3) $\Delta BCE$ и $\Delta DCE$; 4) $\Delta ABD$ и $\Delta BDE$.

*Указание*. Вариант 2) можно выбрать на основании первого признака равенства, вариант 3) — основываясь на наглядных соображениях, соответствующих третьему признаку равенства.

**2.4.** Дан треугольник $ABC$, у которого $|AB| = 3$ см, $|AC| = 4$ см, $\angle BAC = 40°$. При выполнении каких условий треугольник $XYZ$ равен треугольнику $ABC$?

1) $|XZ| = 3$ см, $|YZ| = 4$ см, $\angle XZY = 40°$;
2) $|XY| = 4$ см, $|YZ| = 3$ см, $\angle XZY = 40°$;
3) $|XY| = 3$ см, $|XZ| = 4$ см, $\angle XZY = 40°$;
4) $|XY| = 4$ см, $|ZX| = 3$ см, $\angle XZY = 40°$.

*Указание*. Приведенные в вариантах стороны должны иметь общую вершину $Z$.

## § 3. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА И РОМБА

**Цель параграфа** — привести определения равнобедренного треугольника и ромба, сформулировать и обосновать начальные свойства этих геометрических фигур.

**Особенности параграфа.** При изучении параграфа продолжается работа по выработке навыков логических рассуждений, причем основой для этих рассуждений служит первый признак равенства треугольников. В связи с этим необходимо объяснить учащимся, что при поиске доказательств в первую очередь необходимо обращать внимание на равенство углов в некоторых треугольниках, а затем рассматривать прилежащие стороны. Преследуя именно такую цель, при доказательстве равенства углов при основании равнобедренного треугольника приходится проводить биссектрису угла при вершине. При наличии времени можно провести, например, медиану к основанию и обсудить, чего не хватает для того, чтобы сделать вывод о равенстве треугольников.

Еще одной особенностью параграфа является добавление утверждений, называемых признаками. Учитывая, что при формулировке свойств и признаков часто происходит путаница, уже на примере равнобедренных треугольников полезно разъяснить различие.

Как правило, основные геометрические объекты имеют особое название. Такое название применяется, если выполняется условие соответствующего определения. Можно считать, что утверждение, называемое свойством геометрической фигуры, — это такое ее свойство, которое не указано в определении. В отличие от этого признаком геометрической фигуры следует считать то утверждение, которого достаточно для выделения из более широкого множества фигур подмножества, описываемого исходным определением. Например, равенства диагоналей ромба достаточно для выделения из множества всех ромбов квадратов. Учитывая тот факт, что в 6 классе изучаются не все признаки равенства треугольников, признаки равнобедренного треугольника формулируются без доказательства.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагается известным: многоугольник; вершины многоугольника; сторона многоугольника; диагональ четырехугольника; первый признак равенства треугольников.

**Новые математические понятия:** равнобедренный треугольник; боковые стороны равнобедренного треугольника; основание равнобедренного треугольника; вершина равнобедренного треугольника; признаки равнобедренного треугольника; равносторонний (или правильный) треугольник; ромб.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Какая из сторон $AF$, $FH$, $AH$ на рис. 1 является основанием равнобедренного треугольника $AFH$?

*Ответ.* $FH$.

**3.2.** Как показать, что медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является биссектрисой этого треугольника?

*Ответ.* Из доказательства в пункте 3.2 следует, что биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, делит основание на два равных отрезка, т.е. является медианой. Но к данной стороне треугольника можно провести только одну медиану, поэтому в нашем случае медиана совпадает с биссектрисой.

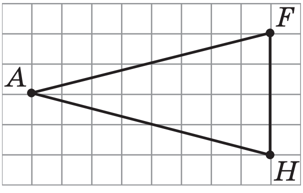

Рис. 1

**3.3.** Как показать, что в квадрате $ABCD$ биссектриса угла $ABC$ перпендикулярна диагонали $AC$?

*Ответ.* Треугольник $ABC$ равнобедренный, поэтому биссектриса, проведенная к его основанию $AC$, является высотой, а следовательно, перпендикулярна $AC$.

**3.4.** Какие углы имеет равнобедренный треугольник, если известно, что один из его углов равен сумме двух оставшихся?

*Ответ.* Обозначим через $\alpha$ величину угла при основании, а через $\gamma = 2\alpha$ — величину угла при вершине. Тогда $180° = \alpha + \alpha + 2\alpha$, откуда $\alpha = 45°$, $\gamma = 90°$, и мы получаем равнобедренный прямоугольный треугольник.

**3.5.** Как показать, что все медианы равностороннего треугольника равны между собой?

*Ответ.* Первый вариант. Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — медианы равностороннего треугольника $ABC$. Тогда $\Delta ABA_1 = \Delta AB_1A$ по первому признаку ($\angle A = \angle B = 60°$), следовательно, $AA_1 = BB_1$.

Второй вариант. Этот вариант имеет более формальный характер. $\Delta ABC = \Delta BCA$ (в записи отражены соответственные вершины), следовательно, и соответственные элементы этих треугольников равны, в частности, равны медианы $AA_1$ и $BB_1$.

**3.6.**** Как показать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны между собой?

*Ответ.* Пусть $C_1$ — середина стороны $AB$, $A_1$ — середина стороны $BC$, $AB = BC$. $\Delta AC_1C = \Delta CA_1A$ по первому признаку ($\angle A = \angle C$), поэтому $AA_1 = CC_1$.

**3.7.** Что вы можете сказать о треугольниках, на которых изображенный на рис. 2 ромб $PQRS$ делится диагональю $PR$?

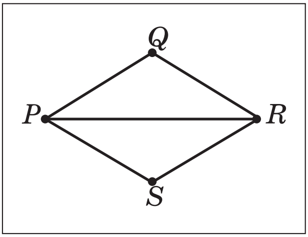


Рис. 2

*Варианты ответа.* Это равнобедренные треугольники. Это — равные треугольники.

**3.8.** Какие свойства квадрата не выполняются для произвольного ромба?

*Варианты ответа.* У квадрата диагонали равны, у произвольного ромба — нет; все четыре угла квадрата равны, у ромба — нет.

**3.9.**** Как доказать первый из приведенных в пункте 3.8 признаков?

*Ответ.* Напрямую воспользоваться признаком равенства прямоугольных треугольников по катетам.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**15.*** В равнобедренном треугольнике одна из сторон в три раза длиннее другой его стороны. Во сколько раз периметр треугольника больше длины его меньшей стороны?

*Указание.* В данном случае боковая сторона в три раза больше основания. Если предположить, что боковая сторона в три раза меньше основания, то нарушается неравенство треугольника.

**16.**** В равнобедренном треугольнике одна из сторон в $1\frac{3}{4}$ раза длиннее другой его стороны. Во сколько раз периметр треугольника может быть больше его большей стороны?

*Указание.* Рассмотреть два возможных варианта: 1) боковая сторона в $1\frac{3}{4}$ раза длиннее основания; 2) основание в $1\frac{3}{4}$ раза длиннее боковой стороны.

**17.*** На рис. 3 и 4 изображены треугольники. Объясните, почему каждый из них равнобедренный.

*Указание.* 1. Сделаем построение, как указано на рис. 5, и покажем равенство вспомогательных прямоугольных треугольников $AMB$ и $BCK$.

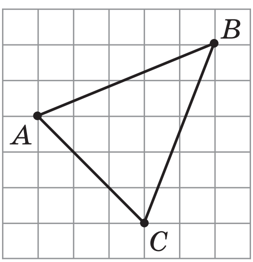


Рис. 3

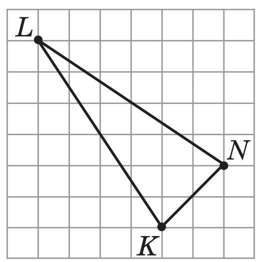


Рис. 4

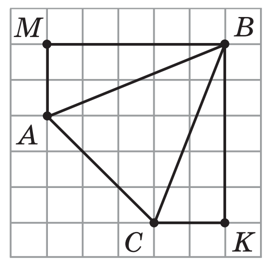


Рис. 5

2. Сделаем построение, как указано на рис. 6, и покажем равенство вспомогательных прямоугольных треугольников $MFN$ и $MEK$.

**20.** На рис. 7 отрезок $BD$ проведен под углом в 90° к отрезку $AB$ и при этом $AB = BC$. Объясните, почему треугольник $ADC$ равнобедренный.

*Указание.* Воспользуйтесь признаком равенства прямоугольных треугольников по катетам.

**21.**** Из вершин основания $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ проведены биссектрисы $AM$ и $CN$, которые пересека-

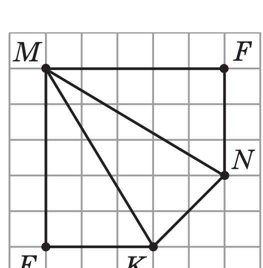


Рис. 6

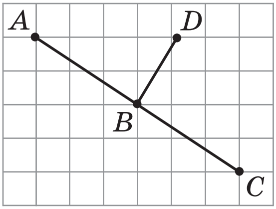


Рис. 7

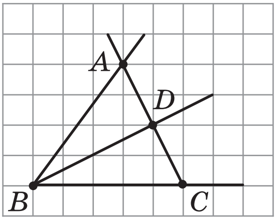


Рис. 8

ются в точке $K$. Найдите длину отрезка $CK$, если длина отрезка $AK$ равна 6,3 см.

*Указание.* Пусть в равнобедренном треугольнике $ABC$ равны стороны $AB$ и $BC$. Проведем высоту $BM$, которая является и медианой. Пусть $L$ — точка пересечения биссектрисы угла $C$ треугольника $ABC$ с высотой $BM$. Тогда $\Delta AML = \Delta CML$. Поэтому $\angle LAM = \angle LCM$, откуда следует, что луч $AL$ является биссектрисой угла $BAC$.

**22.**** На рис. 8 луч $BD$ является биссектрисой угла $ABC$, а точки $A$ и $C$ выбраны так, что $AB = BC$ и точки $A$, $D$, $C$ лежат на одной прямой. Объясните, почему $AD = DC$.

*Указание.* В треугольнике $ABC$ отрезок $BD$ является и биссектрисой, и медианой.

**23.*** Из вершины $B$ равнобедренного треугольника $ABC$ проведена высота $BH$. Сумма длин сторон треугольника $ABC$ равна 32 см, а сумма сторон треугольника $ABH$ равна 24 см. Найдите высоту $BH$.

*Указание.* Удвоенный периметр треугольника $ABH$ равен сумме периметра треугольника $ABC$ и удвоенной высоты $BH$.

**29.**** Треугольник $PQR$ таков, что его можно разрезать на два равных равнобедренных треугольника. Какие углы может иметь $\Delta PQR$?

*Указание.* Если у равных равнобедренных треугольников совмещать основания, то получится ромб; если совмещать боковые стороны, то треугольник может получится только в случае, когда углы при вершинах равнобедренных треугольников прямые.

**30.**** Нарисуйте на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в узлах сетки и с разными сторонами и разделите его на четыре равных треугольника.

*Указание.* Одно из решений представлено на рис. 9.

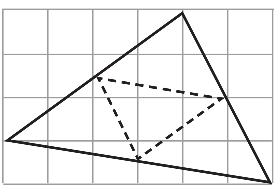

Рис. 9

**32.**** Диагональ $AC$ четырехугольника $ABCD$ делит пополам углы $A$ и $C$. Обязательно ли этот четырехугольник является ромбом? Ответ поясните примерами.

*Указание.* Составим четырехугольник из двух неравных равнобедренных треугольников с общим основанием. Этот четырехугольник удовлетворяет условию задачи, но не является ромбом.

**33.**** Диагонали некоторого четырехугольника перпендикулярны. Обязательно ли этот четырехугольник является ромбом? Ответ поясните примерами.

*Указание.* Можно нарисовать два перпендикулярных пересекающихся отрезка, каждый из которых не делится пополам точкой пересечения. Концы этих отрезков точно не будут вершинами ромба.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.1.** В каких случаях существует равнобедренный треугольник с указанными длинами основания и боковой стороны?

1) основание 2 см, боковая сторона 5 см;

2) основание 17 см, боковая сторона 8 см;

3) основание 12 см, боковая сторона 1 м;

4) основание 3 м, боковая сторона 1 м 20 см.

*Указание.* Проверить выполнение неравенства треугольника.

**2.2.** В каких случаях не существует ромба с указанными длинами стороны и одной из диагоналей?

1) сторона 5 см, диагональ 11 см;

2) сторона 12 см, диагональ 3 см;

3) сторона 8 см, диагональ 19 см;

4) сторона 46 см, диагональ 54 см.

*Указание.* Проверить выполнение неравенства треугольника.

# Глава 4
# ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

**Цель главы** — ввести понятие целого отрицательного числа, установить, как целые числа изображаются на числовой прямой, ввести правила сравнения целых чисел, определить модуль целого числа.

**Особенности параграфа.** При изучении главы важное значение имеют иллюстрации, так как изображение отрицательных чисел на числовой прямой создает естественный и легко запоминающийся зрительный образ, особенно в тех случаях, когда рассматривается понятие противоположного числа и модуля целого числа.

## § 1. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

**Цель параграфа** — познакомить учащихся с отрицательными числами, как решениями уравнений вида $x + n = 0$, с изображением отрицательных чисел на числовой прямой.

**Особенности параграфа.** При начальном знакомстве с целыми числами важное значение имеет изображение отрицательных чисел на числовой прямой, что создает естественный и легко запоминающийся зрительный образ. Весь материал параграфа достаточно прост, и на втором и третьем уровнях не должен вызывать никаких затруднений. Задачи и упражнения также довольно простые и частично рассчитаны на повторение элементарных навыков в действиях с натуральными числами.

Большинство задач учащимся лучше выполнять, изображая числа на заранее заготовленной числовой прямой.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: натуральные числа; число 0; сравнение натуральных чисел.

**Новые математические понятия:** отрицательные целые числа; положительные целые числа; целое число 0; целые числа; симметричные точки на числовой прямой.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Какое число является корнем уравнения $x + 100 = 100$?

*Ответ.* Число 0.

**1.2.** Какое число является корнем уравнения $x + 1001 = 0$?

*Ответ.* Число – 1001.

**1.3.** Чему равно расстояние между изображениями чисел 5 и −1?

*Ответ.* 6.

**1.4.** Чему равно расстояние между изображениями чисел −5 и 1?

*Ответ.* 6.

**1.5.** Какие примеры использования отрицательных чисел вы можете привести?

*Вариант ответа.* Отрицательные числа используются при измерении температуры ниже 0°; для обозначения долга при денежных расчетах; при решении уравнений.

**1.6.** В какой точке числовой прямой находится середина отрезка с концами −27 и 27?

*Ответ.* Изображения обоих чисел расположено на расстоянии 27 от точки *O*, поэтому середина указанного отрезка находится в точке *O*.

**1.7.** Какие из чисел 3, 4, −2, 5, −1, −4 изображаются на числовой прямой точками, симметричными относительно точки *O*?

*Ответ.* На равных расстояниях от точки *O* находятся только изображения чисел 4 и −4.

**Указание к решению наиболее трудных задач.**

**13.** Два велосипедиста движутся прямо навстречу друг другу со скоростями 10 км/ч каждый. Через сколько часов расстояние между ними будет равно 20 км, если в начальный момент оно равнялось 40 км?

*Указание.* Первый ответ — 1 ч находят сразу практически все. Очень часто пропускают второй ответ — через 1 ч после встречи велосипедистов, т.е. через 3 ч, расстояние между разъезжающимися велосипедистами вновь будет 20 км.

**16*.** От Казани до Астрахани пароход идет 3 дня, а обратно пароход идет 4 дня. За сколько дней доплывут плоты от Казани до Астрахани?

*Указание.* За день пароход по течению проходит $\frac{1}{3}$ расстояния между городами (это скорость парохода по течению в км/день), против течения $-\frac{1}{4}$ расстояния между городами (это скорость парохода против течения в км/день), разность между скоростями равна удвоенной скорости реки (в км/день) и равна $\frac{1}{12}$ расстояния между городами. Стало быть, плот за день проплывает $\frac{1}{24}$ расстояния между городами.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.4.** Какие из указанных точек на числовой прямой находятся ближе к точке $A(1)$, чем к точке $B(-5)$?

1) $C(-4)$; 2) $D(-3)$; 3) $E(-1)$; 4) $F(0)$.

*Указание*. Вычислить каждое из расстояний и сравнить.

## § 2. СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель параграфа** — научить учащихся сравнивать любые целые числа.

**Особенности параграфа.** Изучение материала опирается на правила сравнения для натуральных чисел, которые в самом начале нужно напомнить. При переходе к правилам сравнения целых чисел следует обратить особое внимание на аналогию с натуральными числами, которая очень наглядна при сравнении чисел по их изображениям на числовой прямой.

Задачи рекомендуется решать с использованием числовой прямой.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагается известным: сравнение натуральных чисел.

**Новые математические понятия:** большее из двух целых чисел; меньшее из двух целых чисел.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Как сравнивать натуральные числа по их десятичной записи?

*Варианты ответа.* Сравнение начинаем с количества разрядов. Если число разрядов двух чисел одинаково, то сравниваем цифры старшего разряда. Если они одинаковы, то переходим к сравнению следующего (вправо), младшего разряда. И так делаем до тех пор, пока в одном из соответственных разрядов не получим разные цифры. Большим будет то число, у которого эта цифра больше. Подобная процедура сравнения целых чисел изучалась в 5 классе.

**2.2.** Что можно сказать о числах $a$ и $c$, если $a$ не больше $b$ и $b$ не больше $c$?

*Ответ*. Число $a$ не больше $c$.

**2.3.** Как вы понимаете фразу «число $a$ не меньше числа $b$»?

*Ответ*. Число $a$ больше числа $b$, либо $a$ равно $b$.

**2.4.** Почему любое положительное целое число больше любого отрицательного целого числа?

*Ответ.* На числовой прямой любое положительное число лежит правее любого отрицательного числа, потому что положительное число лежит правее 0, а число 0 лежит правее отрицательного числа.

**2.5.**** Как сформулировать свойство транзитивности для отношения «больше», если направление числовой прямой выбрано «вниз»?

*Ответ.* Из двух чисел больше то число, изображение которого расположено ниже.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.2.** Какое из указанных чисел находится на числовой прямой на расстоянии 11 от числа $-17$ и меньше числа $-17$?

1) $-28$;   2) $-6$;   3) $6$;   4) $28$.

*Указание.* На расстоянии 11 от числа $-17$ находится число $-28$.

## § 3. МОДУЛЬ ЧИСЛА

**Цель параграфа** — ввести понятие модуля, которое важно не только для целых, но и для рациональных, действительных и комплексных чисел.

**Особенности параграфа.** В параграфе вводится достаточно трудное понятие модуля числа. На первом уровне следует стремиться к тому, чтобы учащиеся научились безошибочно находить модуль любого конкретного числа, а на основе этого достичь понимания того, что модуль числа — это всегда неотрицательное число. На втором уровне дополнительно следует обратить внимание на алгебраические правила записи значений модуля, которые позволяют избавляться от знака модуля. Это непросто, поэтому требуется достаточное число упражнений, чтобы учащиеся поняли, в каких случаях вместо записи $|a|$ можно использовать просто $a$, а в каких случаях — использовать $(-a)$. На третьем уровне предлагается разобрать решение уравнений вида $|x| = m$ путем перебора всех логических возможностей.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагается известным: сравнение целых чисел.

**Новые математические понятия:** модуль числа; абсолютная величина числа.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Почему модули чисел 12 и –12 равны?

*Вариант ответа.* Числа 12 и –12 находятся на равных расстояниях от нуля, поэтому по определению их модули равны.

**3.2.** Что можно сказать о модуле числа, которое меньше числа –100?

*Ответ.* Модуль такого числа больше ста.

**3.3.**** Почему уравнение $|x| + 1 = 0$ не имеет корней?

*Ответ.* Число $|x|$ всегда неотрицательно, а поэтому $|x| + 1$ не меньше числа 1 и не может равняться нулю.

**Указание к решению наиболее трудных задач.**

**3.** Найдите значение выражений:

а) $|6| - |-4|$; б) $|2| + |-8|$; в) $|-40| : |-5|$; г) $|-55| - |44|$.

*Указание.* а) $|6| - |-4| = 6 - 4 = 2$; б) $|2| + |-8| = 2 + 8 = 10$;

в) $|-40| : |-5| = 40 : 5 = 8$; г) $|-55| - |44| = 55 - 44 = 11$.

**7.**** Найдите $|x|$, если $|-x| = 3$.

*Указание.* Всегда $|x| = |-x|$.

**8. **** Решите уравнения:

а) $|x| = 5$; б) $|x| = 34$; в) $|x| = 0$; г) $|x| = -2$.

*Указание.* В пунктах а), б) можно найти по одному положительному и одному отрицательному корню. В пункте в) единственный корень $x = 0$. В пункте г) уравнение корней не имеет.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.4.** Какие из указанных уравнений имеют по два корня?

1) $|x| = 3$; 2) $|x| = 0$; 3) $|x| + 1 = 0$; 4) $|x| - 1 = 0$.

*Указание*. Два корня имеют такие уравнения, у которых значение модуля положительно.

# Глава 5

# ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ОТРЕЗКОВ

**Цель главы** — изучить понятия перпендикулярности и связанных с ним вопросов; рассмотреть построение перпендикуляров при помощи циркуля и линейки и обоснование теоремы Пифагора, основанное на сравнении площадей фигур.

**Особенности главы.** Изложение материала для первого уровня в основном опирается на наглядные представления. Рассматриваются доказательства только самых простых утверждений. Поэтому на первом уровне учащиеся должны хорошо разобраться с определениями и знать формулировки изучаемых утверждений. В последнем параграфе главы, рассчитанном на второй и третий уровень обучения, затрагиваются вопросы, относящиеся к обоснованию единственности объекта, удовлетворяющего заданным условиям. Наиболее важным в этом месте следует считать обоснование единственности перпендикуляра, проведенного из заданной точки к данной прямой. С учетом прямой с самого начала избыточной аксиоматики в учебнике приводится доказательство, основанное на полученном ранее утверждении о сумме острых углов прямоугольного треугольника.

## § 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ. ПЕРПЕНДИКУЛЯР

**Цель параграфа —** рассмотреть перпендикулярность прямых и отрезков, определить перпендикуляр и наклонную к прямой, расстояние от точки до прямой, изучить некоторые способы построения перпендикуляров.

**Особенности параграфа.** В параграфе рассматриваются важные понятия перпендикулярности прямых и отрезков, перпендикуляра и наклонной, расстояния от точки до прямой. Многие из понятий или утверждений сначала рассматриваются на основе наглядных соображений. В частности, утверждение о том, что длина наклонной больше длины перпендикуляров, проведенных к прямой, сначала формулируется без доказательства. Это позволяет вполне содержательно ввести понятие расстояния от точки до прямой. И только после этого на третьем уровне рассматривается обоснование указанного свойства перпендикуляра. На первом уровне наряду с практическими способами целесообразно также ознакомиться с построением прямой, перпендикулярной к заданной прямой, при помощи циркуля и линейки.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: вертикальные и смежные углы; градусная мера угла; основное свойство градусной меры; прямой угол; прямоугольный треугольник; свойство острых углов прямоугольного треугольника; прямоугольник, квадрат, ромб; неравенство треугольника.

**Новые математические понятия:** перпендикулярность прямых; перпендикулярность отрезка и прямой; перпендикулярность отрезков; перпендикуляр; наклонная; расстояние от точки до прямой; построение перпендикуляра к прямой при помощи циркуля и линейки; единственность перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Какие предметы в форме прямоугольника или прямоугольного треугольника вы знаете?

*Варианты ответа.* Стены комнаты, потолок, книга, тетрадь, косынка, парус.

**1.2.** В чем отличие двух перпендикулярных прямых от двух неперпендикулярных прямых?

*Ответ.* Все четыре угла, образованные при пересечении перпендикулярных прямых, равны между собой. Это свойство не выполняется, если прямые не перпендикулярны.

**1.3.** Как бы вы определили перпендикулярность двух лучей с различными началами?

*Ответ.* Лучи, которые расположены на перпендикулярных прямых.

**1.4.** Почему перпендикуляр, проведенный из вершины равнобедренного треугольника к основанию, делит основание этого треугольника пополам?

*Ответ.* В силу свойств равнобедренного треугольника его высота совпадает с медианой.

**1.5.** Чему равно расстояние от вершины квадрата со стороной 7 см до стороны, не содержащей эту вершину?

*Ответ:* Это расстояние равно стороне квадрата, так как его стороны взаимно перпендикулярны.

**1.6.**** Как объяснить, что в прямоугольном треугольнике длина каждого катета меньше длины гипотенузы?

*Ответ.* Если в треугольнике $ABC$ угол при вершине $B$ прямой, то катет $AB$ — перпендикуляр к прямой $BC$, а гипотенуза $AC$ — наклонная к этой прямой. Поэтому $AB < AC$. Аналогично показывается, что $BC < AC$.

**1.7.** Где расположена вершина равнобедренного треугольника, противолежащая его основанию?

*Вариант ответа.* На высоте, проведенной к основанию.

**1.8.**** Как при помощи циркуля и линейки через данную точку $A$, не лежащую на прямой $a$, провести прямую $b$, перпендикулярную $a$?

*Ответ.* Проведем окружность с центром в точке $A$, пересекающую прямую $a$ в двух точках $B$ и $C$. Тем же радиусом проведем окружности с центрами в точках $B$ и $C$. Они пересекутся в точке $A$ и еще в одной точке $D$. Прямая $AD$ — искомая.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**9.**** Две стены комнаты пересекаются по отрезку $AC$, причем точка $C$ расположена на полу. Как вы считаете, по отношению к каким отрезкам на полу комнаты отрезок $AC$ будет перпендикуляром?

*Ответ.* К любым отрезкам на полу.

**10.*** Диагонали ромба $ABCD$, изображенного на рис. 1, пересекаются в точке $K$. Среди отрезков, изображенных на этом рисунке, укажите пары взаимно перпендикулярных отрезков.

*Указание.* Например, перпендикулярны $BK$ и $CK$, $DK$ и $AC$.

**11.*** Из бумаги вырежьте равнобедренный треугольник. С помощью линейки и этого треугольника начертите два взаимно перпендикулярных отрезка.

*Указание. Для* построения используем ромб, составленный из двух таких треугольников.

**12.**** Из бумаги вырежьте произвольный треугольник, не имеющий равных сторон. С помощью линейки и этого треугольника начертите два взаимно перпендикулярных отрезка.

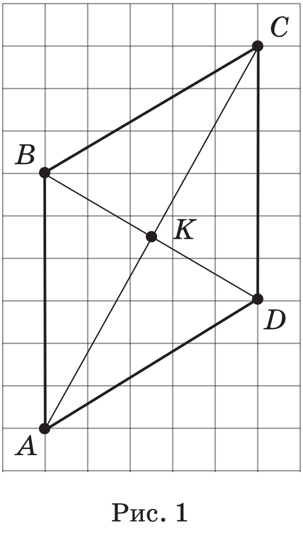


Рис. 1

*Указание.* Нарисуем треугольник, а затем симметричный ему треугольник относительно одной из сторон. Высоты в этих треугольниках, проведенные к общей стороне, будут иметь общее основание.

**14.*** Даны две взаимно перпендикулярные прямые. С помощью циркуля изобразите вершины такого квадрата, что две его стороны лежат на данных прямых.

*Указание.* Сначала на двух лучах, выходящих из точки пересечения прямых, раствором циркуля, равным $a$, отложить два отрезка, равных $a$; затем с центрами в полученных точках провести две окружности радиуса $a$.

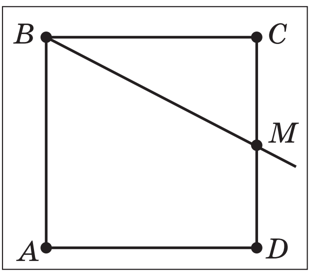

Рис. 2

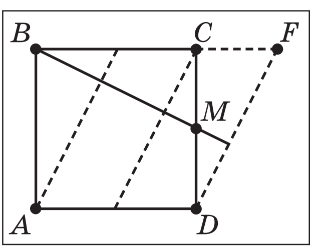

Рис. 3

**17.**** На рис. 2 точка $M$ является серединой стороны $CD$ квадрата $ABCD$. Покажите, как провести перпендикуляр к прямой $BM$ из точки $A$.

*Указание.* Соединить точку $A$ с серединой стороны $BC$ (рис. 3).

**18.**** На рис. 2 точка $M$ является серединой стороны $CD$ квадрата $ABCD$. Покажите, как провести перпендикуляр к прямой $BM$ из точки $C$.

*Указание.* Соединить точку $C$ с серединой стороны $AD$ (рис. 3).

**19.**** На рис. 2 точка $M$ является серединой стороны $CD$ квадрата $ABCD$. Покажите, как провести перпендикуляр к прямой $BM$ из точки $D$.

*Указание.* На продолжении стороны $BC$ отложить отрезок $CF$, равный половине $BC$, и соединить точку $D$ с точкой $F$.

**20.** Покажите, как на рис. 4 провести перпендикуляр из точки $C$ к прямой $AB$.

*Указание.* Соединить точку $C$ с точкой $D$, являющейся серединой $AB$.

**21.**** Покажите, как на рис. 5 провести перпендикуляр из точки $C$ к прямой $AB$.

*Указание.* Сначала построить точку $K$, как указано на рис. 6. В результате появляется прямой угол $ABK$. После этого построить четырехугольник $CKBM$. Отрезки $CM$ и $AB$ будут перпендикулярны.

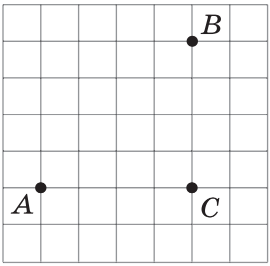


Рис. 4

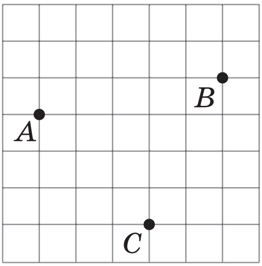


Рис. 5

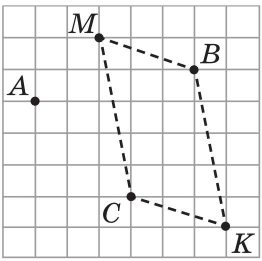


Рис. 6

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** Какие из указанных на рис. 7 отрезков перпендикулярны отрезку $AC$?

1) $MN$; 2) $KL$; 3) $PQ$; 4) $RS$.

*Указание*. Для того чтобы найти нужные варианты, следует обратить внимание на перпендикулярность диагоналей заданного квадрата и неявным образом ориентироваться на параллельность нужных отрезков второй диагонали квадрата.

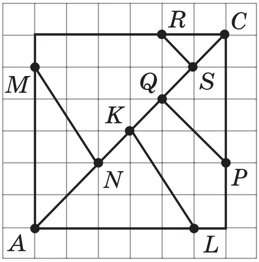


Рис. 7

**2.4.** На прямой $b$, которая перпендикулярна прямой $a$, выбраны точки $M$ и $N$, находящиеся на расстоянии 3 см и 7 см от прямой $a$. Какой может быть длина отрезка $MN$?

1) 2 см; 2) 4 см; 3) 8 см; 4) 10 см.

*Указание*. Для того чтобы найти нужные варианты, следует понять, что длины равны либо сумме расстояний, либо модулю их разности.

## § 2. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

**Цель параграфа** — сформулировать и доказать одну из важнейших теорем планиметрии — теорему Пифагора, а также указать некоторые следствия из нее.

**Особенности параграфа.** Теорема Пифагора — одно из немногих фундаментальных геометрических утверждений, которые можно провести с обоснованием в 6 классе уже на первом уровне. Основанный на свойстве площади вывод теоремы Пифагора чрезвычайно наглядный, не содержит никаких сложных технических моментов и, по-видимому, изобретен гораздо раньше времен самого Пифагора (VI в. до н.э.).

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: свойства площади; формулы площадей прямоугольного треугольника и квадрата; понятие равносоставленности.

**Новые математические утверждения:** формулировка теоремы Пифагора в общем виде; утверждение, обратное теореме Пифагора.

**Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления:** иррациональные числа; обратное утверждение.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Какие фигуры называются равносоставленными?

*Ответ.* Две фигуры называются равносоставленными, если каждую из них можно так разбить на части, что из этих частей можно сложить другую фигуру (без наложения частей друг на друга).

**2.2.** В примере 1 рассматривается, как найти гипотенузу прямоугольного треугольника, зная длины его катетов. *Вопрос.* Как изменится ответ в примере 1, если оба катета увеличить в 3 раза?

*Ответ.* Увеличится в 3 раза. Действительно, если катеты были равны $a$ и $b$, то гипотенуза равна $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. После увеличения длины катетов станут равными $3a$ и $3b$, а гипотенуза будет равна $\sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = \sqrt{9a^2 + 9b^2} = \sqrt{9(a^2 + b^2)} = 3 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 3c$.

**2.3.** Как объяснить, что треугольник со сторонами 39 см, 80 см и 89 см является прямоугольным?

*Ответ.* Сначала проверяем, что $89^2 = 80^2 + 39^2$. После этого на основании утверждения, обратного теореме Пифагора, делаем вывод, что данный треугольник прямоугольный.

**2.4.** Почему верно равенство $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

*Ответ.* Это равенство проверяется непосредственными преобразованиями:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 =$$
$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2.$$

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**2.** В прямоугольном треугольнике катет равен 1 см, а площадь квадрата, построенного на другом катете, равна 15 см$^2$. Чему равна гипотенуза этого треугольника?

*Указание.* Численное значение площади квадрата — это квадрат стороны, поэтому квадрат гипотенузы равен площади построенного на гипотенузе квадрата, что по теореме Пифагора равно сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

**9.** В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 м, а основание равно 8 м. Найдите боковую сторону.

*Указание.* Высота делит основание на два отрезка по 4 м.

**16.*** В равностороннем треугольнике стороны равны по 5 см. Чему равна каждая высота этого треугольника?

*Указание.* Вычисления приводят к выражению $\sqrt{5-(2{,}5)^2}$.

**20.**** На рис. 1 отрезок $AH$ — перпендикуляр к прямой $BC$, точки $D_1$ и $D_2$ лежат на прямой $BC$. Как показать, что длина $AD_2$ больше длины $AD_1$?

*Указание.* Для сравнения длин отрезков $AD_1$ и $AD_2$ нужно сравнить числа $|AH|^2+|HD_1|^2$ и $|AH|^2+|HD_2|^2$.

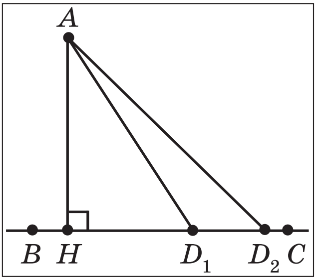


Рис. 1

**23.*** Прямоугольные треугольники $ABP$ и $CDP$ расположены так, что $APD$ — прямая (рис. 2). Найдите площадь квадрата со стороной $BC$, если известно, что $|AB|=12$ см, $|AP|=9$ см, $|PD|=12$ см, $|CD|=9$ см.

*Указание.* Заметим, что треугольник $BPC$ также прямоугольный, а поэтому

$$BC^2=BP^2+PC^2.$$

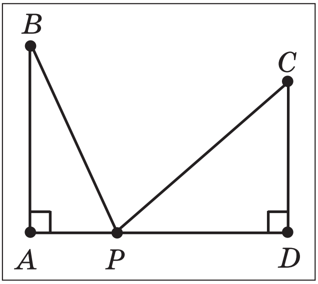


Рис. 2

**24.*** Прямоугольные треугольники $ABP$ и $CDP$ расположены так, как на рис. 3. Четырехугольник $ABKD$ — прямоугольник, у которого вершина $K$ расположена на прямой $CD$. Найдите расстояние между точками $B$ и $C$, если известно, что $|AB|=1{,}5$ см, $|AP|=2$ см, $|PD|=1$ см, $|CD|=2{,}5$ см.

*Указание.* Треугольник $BKC$ — прямоугольный, причем

$|BK|=|AP|+|PD|$, $|CK|=|CD|-|AB|$.

**27.**** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 25 см. Найдите длины катетов, если известно, что они выражаются целыми числами.

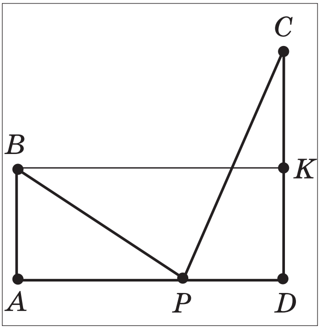


Рис. 3

*Указание.* Пусть длины катетов $a$ см и $b$ см. Тогда $a^2 + b^2 = 25^2$ или $a^2 = 25^2 - b^2 = (25 - b) \cdot (25 + b)$. При такой записи нетрудно перебрать целые значения $b$ от 1 до 24 и отобрать из них такие, для которых произведение $(25 - b) \cdot (25 + b)$ является квадратом натурального числа. В результате перебора получатся следующие пары: $a = 24$, $b = 7$; $a = 20$, $b = 15$; $a = 15$, $b = 20$; $a = 7$, $b = 24$. Перебор можно сократить до $b = 17$, если предполагать, что $a > b$. В принципе можно отыскать и другие закономерности, которые сокращают перебор.

**28.**** Решается аналогично задаче 27.**

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** В ромбе со стороной 13 см одна из диагоналей равна 24 см. Чему равна другая диагональ ромба?

1) 4 см; 2) 6 см; 3) 8 см; 4) 10 см.

*Указание.* Половины диагоналей ромба и соединяющая их концы сторона образуют прямоугольный треугольник.

**2.4.** Одна из сторон треугольника имеет длину 5 см. Какими из указанных могут быть длины двух других его сторон?

1) 7 см и 12 см; 2) 2 см и 3 см;

3) 9 см и 6 см; 4) 15 см и 19 см.

*Указание.* Использовать неравенство треугольника.

## § 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ

**Цель параграфа** — знакомство с некоторыми утверждениями о единственности объекта, удовлетворяющего заданным условиям.

**Особенности параграфа.** Материал параграфа предназначен в основном для изучения на втором уровне и предполагает обратить внимание учащихся на полноту исследования математической задачи. С этой целью приводится ряд примеров, в которых существует более одного объекта, удовлетворяющего заданным условиям. В конце параграфа приводятся обоснования того, что в данном треугольнике из заданной вершины можно провести единственную медиану, единственную биссектрису, единственную высоту.

**Предварительные знания, умения, навыки.** Предполагаются известными: медиана треугольника; биссектриса треугольника; высота треугольника; свойства градусной меры.

**Новые математические понятия:** утверждение о единственности объекта.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.*** Сколько решений имеет уравнение $0 \cdot x = 1$?

*Ответ.* У этого уравнения нет решений, так как при любом $x$ имеет место равенство $0 \cdot x = 0$, а поэтому $0 \cdot x \neq 1$.

**3.2.*** Какие еще четырехугольники можно составить из двух указанных на рис. 1 треугольников?

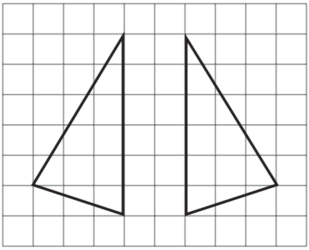

Рис. 1

*Ответ.* Можно еще сложить треугольники самыми короткими сторонами, причем сделать это можно двумя способами.

**3.3.*** Сколько существует различных отрезков с концами в вершинах квадрата?

*Ответ.* 6.

**3.4.*** Может ли в равнобедренном треугольнике биссектриса угла, противолежащего основанию, не совпадать с высотой, проведенной к основанию?

*Вариант ответа.* Вопрос очень непростой. Дело в том, что биссектрисой угла обычно называют луч, а биссектрисой треугольника — отрезок. Поэтому в приведенной формулировке вопроса следует считать, что биссектриса не совпадает с высотой! Однако биссектриса равнобедренного треугольника (но не угла!), проведенная к основанию, всегда совпадает с проведенной к основанию высотой. К сожалению, удержаться на уровне строго формального подхода к математике трудно, а потому иногда переходят на уровень математического «сленга». И в этом смысле часто понятия биссектрисы угла треугольника и биссектрисы треугольника смешивают, считая их одинаковыми.

Обсуждать отмеченные особенности имеет смысл только на третьем уровне.

**3.5.*** Как показать, что из точки, лежащей на заданной прямой, можно провести два луча, перпендикулярные к этой прямой, но эти лучи вместе составляют прямую?

*Ответ.* Прямая делит плоскость на две полуплоскости. По свойству откладывания углов в каждой полуплоскости можно провести только по одному лучу, перпендикулярному этой прямой. В пункте 1.1 показано, что вместе эти лучи образуют прямую.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**2.*** Сколько различных четырехугольников можно сложить из двух равных равнобедренных треугольников, у которых боковая сторона не равна основанию и угол при вершине не прямой?

*Указание*. Из двух равнобедренных треугольников, отличающихся от равносторонних, можно сложить три разных четырехугольника: одним способом, совмещая основания, и двумя способами, совмещая боковые стороны.

**8.*** Рассмотрим фокус с угадыванием числа. Угадывающий дает следующую серию заданий: «Задумайте число. Прибавьте к нему 3. Результат умножьте на 2. К результату прибавьте 4. От результата отнимите задуманное число. Назовите, что у вас получилось». Покажите, что по ответу можно единственным способом восстановить задуманное число.

*Указание*. Если задумано число $m$, то вслух произносится число $(m + 10)$.

**15.**** Некто задумывает число, которое делится на 9, стирает в нем одну цифру и сообщает, чему равна сумма оставшихся цифр. В каких случаях можно правильно назвать вычеркнутую цифру, а в каких можно ошибиться?

*Указание*. Ошибиться можно только в тех случаях, когда стерта цифра 0 или цифра 9.

**16.**** Некто задумывает два двухзначных числа сообщает их сумму. В каких случаях можно угадать оба числа?

*Указание*. Нетрудно понять, что если названо число 20, то задуманные числа 10 и 10, потому что во всех других случаях сумма должна быть больше 20. Похожими рассуждениями можно найти еще три варианта: называется либо 21, либо 198, либо 197.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.*** Сколько разного вида четырехугольников можно составить из двух равных прямоугольных треугольников с катетами 3 см и 4 см?

1) три; 2) четыре; 3) пять; 4) шесть.

*Указание*. Совмещая гипотенузы, можно получить два вида четырехугольников; совмещая меньшие или большие катеты, в каждом случае можно получить один вид четырехугольников.

**2.3.*** Из какого числа квадратов со стороной 1 см можно составить прямоугольник только одного вида?

1) из 7 квадратов; 2) из 8 квадратов;
3) из 15 квадратов; 4) из 17 квадратов.

*Указание*. Площади таких прямоугольников могут быть только простым числом.

# Глава 6
# СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель главы** — распространить на целые числа операции сложения и вычитания.

**Особенности главы.** В главе более последовательно, чем в 5 классе, реализуется идея неявной индукции. Это позволит в дальнейшем осуществить постепенный переход к методу математической индукции, который является одним из важнейших методов в математике.

## § 1. СЛОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель параграфа** — определить сумму любых целых чисел, распространить на целые числа переместительный и сочетательный законы сложения, дополнить эти законы свойствами нуля относительно сложения и свойством суммы противоположных чисел.

**Особенности параграфа.** В начале параграфа напоминается правило прибавления единицы к натуральному числу $n$. Правило иллюстрируется на числовой прямой. По такому же правилу определяется прибавление единицы к любому целому числу. На этом этапе важно добиться понимания того, что установленное правило прибавления единицы принимается по определению и не следует ни из каких других свойств целых чисел. Затем с использованием неявной индукции определяется правило прибавления к целому числу числа 2, числа 3, и т.д. После этого по аналогичной схеме определяется правило прибавления к целому числу отрицательных целых чисел. Добавление свойства нуля относительно сложения завершает определение сложения для целых чисел.

При изучении параграфа важную роль играют иллюстрации, позволяющие легко понять и запомнить правила сложения целых чисел. Особое внимание следует обратить на иллюстрации вычисления суммы двух чисел с помощью двух линеек.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: целые числа; сумма натуральных чисел; разность натуральных чисел; свойства операций с натуральными числами.

**Новые математические понятия:** сумма целых чисел; свойство нуля относительно сложения; свойство суммы противоположных целых чисел.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Чему равняется сумма $(-1000) + 1$?

*Ответ.* $(-1000) + 1 = -(1000 - 1) = -999$.

**1.2.** Чему равняется сумма $(-1000) + ((-198) + 2 \cdot 100)$?

*Ответ.* Сумма равна $(-1000) + 2$, что равно $-998$.

**1.3.** Чему равняется $a + 3$, если известно, что $a + 2 = -1$?

*Ответ.* В этом случае $a + 3 = 0$.

**1.4.** Чему равняется $-1900 + 1995$?

*Ответ.* Числу 95.

**1.5.**** Чему равняется $a + 1000$, если $a + 1001 = -999$?

*Ответ.* В этом случае $a + 1000$ есть число, предшествующее числу $-999$, т.е. число $-1000$.

**1.6.** Как разместить начала отсчета на двух линейках с миллиметровыми делениями, чтобы найти сумму $(-199) + 91$, если длина каждой линейки равна 20 см?

*Вариант ответа.* На верхней линейке справа отметить число 0, а затем через миллиметр нанести отрицательные деления до (–20 см). На нижней линейке число 0 можно отметить посередине.

**1.7.** Чему равняется сумма $(-1000) + (-1)$?

*Ответ.* Числу $-1001$.

**1.8.** Чему равна сумма $2000 + (-2)$?

*Ответ.* Числу 1998.

**1.9.** Как объяснить, что $((-100) + 100) + ((-100) + 100) = 0$?

*Вариант ответа.* Так как $(-100) + 100 = 0$, то данная сумма равна сумме $0 + 0$, которая, в свою очередь, равна 0.

**1.10.** Как быстро найти сумму

$$(-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5?$$

*Ответ.* Перегруппировать слагаемые в виде

$$((-5) + 5) + ((-4) + 4) + ((-3) + 3) + ((-2) + 2) + ((-1) + 1) + 0$$

и воспользоваться правилом сложения противоположных чисел.

**1.11.** Как проиллюстрировать при помощи линеек прибавление числа 0 к любому целому числу?

*Ответ.* Выбранное целое число найти на верхней линейке и совместить с ним число 0 на нижней линейке. Результат сложения следует прочитать на верхней линейке напротив числа 0 нижней линейки.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.**** Почему при последовательном прибавлении к числу 1995 по –2 нельзя получить число –1996?

*Указание.* Прибавление числа –2 к нечетному положительному числу или нечетному отрицательному числу также дает нечетное число.

**5.*** Уровень воды в реке за сутки повысился на 12 см, за следующие сутки понизился на 31 см, а за третьи сутки снова повысился на 18 см. Как в итоге изменился уровень воды?

*Указание.* Изменение уровня воды в сантиметрах соответствует сумме: $12 + (-31) + 18$.

**6.*** Температура воздуха на улице сначала поднялась на 7°, затем упала на 11°, затем снова поднялась на 3°, а потом упала на 4°. Как в итоге изменилась температура?

*Указание.* Изменение температуры в градусах соответствует сумме: $7 + (-11) + 3 + (-4)$.

**7.**** Колобок катился по прямолинейным отрезкам пути: сначала на север, затем отклонился от этого курса на 45° вправо, потом поворачивал на 30° влево, после этого на 15° вправо и затем на 80° влево. В какую сторону и на сколько градусов от направления на север колобок отклонился на последнем участке пути?

*Указание.* Отклонение колобка связано с суммой: $45 + (-30) + 15 + (-80)$. Так как эта сумма, равная $(-50)$, отрицательна, то на последнем участке пути колобок уклонился от направления на север влево на 50°.

**8.**** Туристы, двигаясь по прямолинейным отрезкам пути, шли в некотором направлении, затем отклонились от курса на 25° влево, изменили курс на 35° вправо, изменили курс на 15° влево, затем еще раз изменили курс на 20° влево и в результате стали двигаться в направлении на юг. В каком направлении шли туристы первоначально?

*Указание.* Зададим начальное отклонение от направления на юг в градусах отрицательным числом, если отклонение было влево, и положительным числом, если отклонение было вправо, и обозначим это число за $x$. Тогда по условию $x + (-25) + 35 + (-15) + (-20) = 0$.

**12.*** Трое ребят имели поровну орехов. Когда каждый из них съел по 8 орехов, то у всех вместе осталось столько орехов, сколько было вначале у каждого. Сколько орехов было сначала у каждого?

*Указание*. Обозначив через $x$ начальное число орехов у каждого из ребят, можно составить уравнение: $(x - 8) \cdot 3 = x$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Чему равно $a + (b + (-1))$, если известно, что $a + b = -2011$?

1) $-2012$; 2) $-2010$; 3) $-2008$; 4) $-2006$.

*Указание*. Нужно $(-2011)$ уменьшить на 1.

**2.1.** Значение каких из указанных сумм равно 0 или отрицательно?

1) $17 + (-11) + 9 + (-12)$; 2) $(-7) + 39 + (-53) + 21$;

3) $(-14) + 28 + (-36) + 21$; 4) $36 + (-125) + 165 + (-45)$.

*Указание*. По отдельности сложить положительные слагаемые, отрицательные слагаемые, после чего знак всей суммы найти нетрудно.

**2.3.** Значение каких из указанных сумм не больше $-10$?

1) $31 + (-55) + 11$; 2) $(-18) + 46 + (-37)$;

3) $75 + (-120) + 35$; 4) $1627 + (-1578) + 1019$.

*Указание*. Важно понять, что не больше $-10$ — это либо равно $-10$, либо меньше.

## § 2. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА

**Цель параграфа** — познакомиться с понятием противоположного числа и выработать навыки сложения целых чисел.

**Особенности параграфа.** В параграфе устанавливаются удобные для практической работы правила сложения целых чисел. Эти правила основываются на умении складывать и вычитать натуральные числа. Поэтому во многом параграф носит повторительный характер, а предлагаемые задачи и упражнения в основном тренировочного плана. На третьем уровне дополнительно рассматривается запись правила сложения двух отрицательных целых чисел с использованием их модулей. На примере разъясняется, что не всегда модуль суммы двух целых чисел равен сумме их модулей.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: сумма и разность целых чисел; число 0; изображение целых чисел на числовой прямой.

**Новые математические понятия:** свойство нуля относительно сложения; свойство суммы противоположных целых чисел.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Какие из чисел 3, 105, –21, 48, –105, –6 являются противоположными?

*Ответ.* 105 и –105.

**2.2.** Какому целому числу равно значение выражения $-(-(-(-(-(-6)))))$?

*Ответ.* 6.

**2.3.** Могут ли числа $a$ и $-a$ равняться друг другу?

*Ответ.* Равны только в том случае, когда $a = 0$.

**2.4.** Почему сумма двух отрицательных целых чисел отрицательна?

*Ответ.* Отрицательные числа можно записать в виде $-m$ и $-n$, где $m$ и $n$ — положительны. $(-m) + (-n) = -(m + n)$, сумма $m + n$ положительное число, поэтому $-(m + n)$ — отрицательное число.

**2.5.**** В пункте установлено правило $(-m) + (-n) = -(m + n)$ для целых отрицательных чисел. *Вопрос.* Как показать, что аналогичное правило верно для любых целых чисел $a$ и $b$?

*Ответ.* Рассуждение, приведенное в пункте, на самом деле не использует то, что числа $m$ и $n$ натуральные. Поэтому для ответа на вопрос можно заменить $m$ и $n$ на $a$ и $b$ и дословно повторить пункт 2.5.

**2.6.** Какой знак имеет сумма $(-10^9) + 10^8$?

*Ответ.* Минус, потому что модуль первого отрицательного слагаемого больше модуля второго слагаемого.

**2.7.** Как показать, что для отрицательного целого числа $a$ и положительного целого числа $b$ выполняется соотношение $|a + b| < |a| + |b|$.

*Ответ.* Если числа $a$ и $b$ имеют разные знаки, то сумма этих чисел находится с помощью разности соответствующих натуральных чисел $|a|$ и $|b|$ (см. п. 2.6), поэтому $|a| + |b| > |a + b|$.

**2.8.**** Как формулируются правила нахождения суммы двух целых чисел при помощи модулей этих чисел в случае, когда хотя бы одно из этих чисел равно 0?

*Ответ.* В этом случае достаточно сформулировать варианты правил 1) и 2): знак суммы числа $a$ и числа 0 совпадает со знаком числа $a$ модуль суммы числа $a$ и числа 0 равен модулю $a$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.2.** Значения каких из указанных выражений противоположны значению $(-|-10|)$?

1) $|10|$; 2) $-|10|$; 3) $-(-|-10|)$; 4) $-(-(-|-10|))$.

*Указание*. Нужно найти варианты, в которых значения равны 10.

**2.3.** Значения каких из указанных выражений противоположны значению $-|-7+(-8)|$?

1) $-|8-7|$; 2) $-|7+8|$; 3) $|8-7|$; 4) $|7+8|$.

*Указание*. Нужно найти варианты, в которых значения равны 15.

**2.4.** Какие значения из указанных может принимать сумма $a+b$, если известно, что $|a|=3$, $|b|=5$?

1) $-8$; 2) $-2$; 3) 2; 4) 8.

*Указание*. Нужно перебрать четыре возможных случая и убедиться в том, что подходят все варианты.

## § 3. ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель параграфа** — распространить понятие разности на целые числа и выработать навыки решения задач на вычитание.

**Особенности параграфа.** По аналогии с натуральными числами разность $a-b$ целых чисел $a$ и $b$ определяется как операция, обратная сложению, т.е. число $a-b$ определяется как корень уравнения $b+x=a$. На следующем этапе изучения вычитания устанавливается правило, которое позволяет свести нахождение разности к выполнению сложения. Предлагаемые задачи и упражнения рассчитаны на то, чтобы учащиеся приобрели устойчивые навыки вычитания целых чисел.

Аналогично тому, как это сделано в § 1, вычитание иллюстрируется с помощью двух линеек.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** В пункте рассмотрены примеры на применение определения разности. Получены результаты, что разностью чисел $-8$ и $-5$ является число $-3$, и разностью чисел $-5$ и $-8$ является число 3. *Вопрос*. Как записать разность чисел в рассмотренных примерах?

*Ответ*. В примере 1 имеем: $(-8)-(-5)=-3$. В примере 2 имеем: $(-5)-(-8)=3$.

**3.2.** Какой другой способ вычитания целых чисел при помощи двух линеек вы можете предложить?

*Вариант ответа.* Можно поменять местами роли линеек: уменьшаемое находить на нижней линейке, совмещать с ним вычитаемое на верхней линейке и напротив нуля верхней линейки на нижней линейке определять разность.

**3.3.** Как объяснить, что $0 - a = -a$?

*Варианты ответа.* 1. Разностью $0 - a$ является корень уравнения $a + x = 0$, следовательно, $x = -a$.

2. Напротив числа 0 на верхней линейке располагаем число $a$ нижней линейки. Разность $0 - a$ находим на верхней линейке напротив 0 нижней линейки. Это число $-a$, находящееся на расстоянии $a$ слева от 0.

**3.4.** Как изменится температура воздуха за два дня, если за первый день она понизилась на 7°, а за второй день повысилась на 15°?

*Ответ.* Итоговому изменению температуры соответствует сумма $(-7) + 15 = 8$. Так как сумма положительна, то за два дня температура воздуха повысится на 8°.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.*** Вычислите $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1$.

*Указание.* Сначала следующим образом расставить скобки:

$$(99 - 97) + (95 - 93) + \ldots + (7 - 5) + (3 - 1).$$

Затем выяснить, что число пар скобок можно вычислить как $\dfrac{99-3}{4}$ или как $\dfrac{97-1}{4}$.

**5.*** Вычислите $100 - (100 - (100 - (100 - (100 - 1))))$.

*Указание.* Удобно выполнять вычисления в порядке:

а) $(100 - 1) = 99$; б) $(100 - 99) = 1$; в) $(100 - 1) = 99$;
г) $(100 - 99) = 1$; д) $(100 - 1) = 99$.

**12.**** Сумма двух чисел равна 1 111 110. В разряде тысяч и в разряде сотен большего числа стоит по цифре 8. В тех же разрядах меньшего числа стоит по цифре 2. Если заменить эти цифры нулями, то получатся новые числа, одно из которых в 9 раз больше другого. Найдите исходные числа.

*Указание.* Обозначим большее и меньшее число через $a$ и $b$ соответственно. Тогда по условию $a + b = 1\,111\,110$. После замены цифр получатся числа $a - 8800$ и $b - 2200$. Далее нужно рассмотреть возможности: 1) $a - 8800 = 9 \cdot (b - 2200)$; 2) $b - 2200 = 9 \cdot (a - 8800)$. Так как по условию $a > b$, то из двух возможных вариантов ответа остается один: $a = 998\,899$, $b = 112\,211$.

**13.** Найдите два натуральных числа, разность которых равна 9256, а частное от деления одного числа на другое равно 27.

*Указание*. Обозначить искомые числа через $a$ и $b$. Пусть $a > b$. Тогда $a - b = 9256$ и $a = 27b$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.1.** Какие из указанных разностей равны 0?

1) $643 - 643$; 2) $-643 - (-643)$;

3) $643 - (-643)$; 4) $-643 - 643$.

*Указание*. Разности только равных чисел равны нулю.

## Глава 7

# ОКРУЖНОСТЬ. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

**Цель главы** — систематическое изучение начальных свойств диаметра, радиусов, хорд окружностей и касательной к окружности, ознакомиться с понятиями вписанных и описанных многоугольников.

**Особенности главы.** Значительная часть содержания данной главы уделено условиям касания окружности с прямой, что приводит к определению касательной к окружности. На третьем уровне предлагается рассмотреть ряд задач на общие касательные к двум окружностям и разобрать несколько непростых примеров, представляющих классические задачи олимпиадного характера.

## § 1. ДИАМЕТР И ХОРДА

**Цель параграфа** — изучить свойства хорды окружности и свойство общей хорды двух окружностей.

**Особенности параграфа.** При изучении данного параграфа большое внимание следует уделить тому, что если концы хорды окружности, которая не является ее диаметром, соединить с центром окружности, то образуется равнобедренный треугольник. Поэтому к получившемуся треугольнику можно применять все общие утверждения о равнобедренных треугольниках. В частности, можно использовать свойство биссектрисы, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, свойство суммы всех углов равнобедренного треугольника и т.д. Это позволяет естественным образом воспринимать новые свойства. А именно перпендикулярность к хорде диаметра, проходящего через середину этой хорды, и перпендикулярность общей хорды двух окружностей к линии центров.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: окружность; центр окружности; радиус окружности; равнобедренный треугольник; свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию; сумма всех углов равнобедренного треугольника.

**Новые математические понятия:** диаметр окружности; диаметрально противоположные точки; хорда; общая хорда двух пересекающихся окружностей.

**Вспомогательные понятия:** условия, при которых две окружности не пересекаются; условия, при которых две окружности имеют одну общую точку; условия, при которых две окружности имеют две общие точки.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Сколько радиусов вы можете провести у заданной окружности, радиус которой равен 3 см?

*Ответ.* Сколько угодно много.

**1.2.** Как, используя неравенство треугольника, показать, что хорда, не являющаяся диаметром, имеет длину меньше диаметра?

*Ответ.* Если соединить концы хорды $AB$ с центром $O$ окружности, то получим равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны радиусу $r$. Следовательно, $AB < r + r = 2r = d$, где $d$ — диаметр.

**1.3.** Чему равна величина угла $MOK$, если в окружности с центром $O$ проведена хорда $MK$, длина которой равна радиусу окружности?

*Ответ.* В этом случае треугольник $MOK$ равносторонний. поэтому каждый из его углов равен $60°$, в том числе и угол $MOK$.

**1.4.** В каком случае диаметр, проходящий через середину хорды, не будет перпендикулярен этой хорде?

*Варианты ответа.* 1. Когда хорда является диаметром, а второй диаметр проведен не под прямым углом к первому.

2. В случае, если хорда принадлежит одной окружности, а диаметр — другой.

**1.5.**** В каком случае через две заданные точки нельзя провести окружность данного радиуса?

*Ответ.* Когда радиус меньше половины расстояния между данными точками.

**1.6.*** Как показать, что общая хорда двух различных окружностей одинакового радиуса, имеющих две различные точки пересечения, делит пополам отрезок, соединяющий центры этих окружностей?

*Ответ.* Общая хорда двух равных окружностей является диагональю ромба, вершинами которого являются центры и точки пересечения окружностей. Поэтому отрезок, соединяющий центры равных окружностей, является второй диагональю ромба и делится общей хордой пополам.

**1.7.*** Как построить перпендикуляр к прямой $a$ из точки $A$, лежащей на прямой $a$?

*Ответ.* С центром в точке $A$ провести окружность произвольного радиуса и найти точки $B$ и $C$ ее пересечения с прямой. Затем увеличить раствор циркуля и с центрами в точках $B$ и $C$ провести равные окружности. Прямая, проходящая через точки пересечения двух последних окружностей, является искомым перпендикуляром.

## Указания к решению наиболее трудных задач.

**3.*** Где расположены центры нескольких окружностей данного радиуса $r$, проходящих через данную точку $A$?

*Указание.* Центры расположены на окружности радиуса $r$ с центром $A$.

**4. в)*** На рис. 1 изображены центр O окружности и две точки $A$ и $B$, лежащие на этой окружностей. Укажите несколько таких хорд окружности с концами в узлах клетчатой бумаги, которые не являются диаметрами.

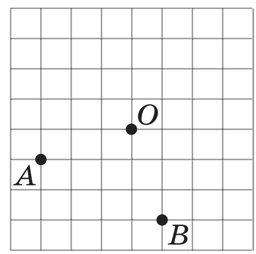


Рис. 1

*Указание.* Таких хорд можно найти много. Например, отрезки $AM$, $MN$, $MK$, $BK$ (рис. 2).

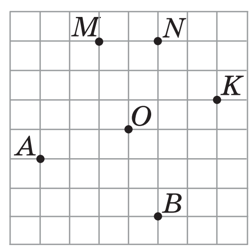


Рис. 2

**5.** Сколько различных хорд можно изобразить, используя в качестве концов точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, изображенные на рис. 3?

*Указание.* Один из способов подсчета такой: каждую из точек можно четырьмя отрезками соединить с оставшимися точками. При этом получится 4 отрезка. В итоге из пяти вершин будет проведено $4 \cdot 5$ отрезков, но каждый из них проводится по 2 раза. Поэтому всего $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ различных хорд.

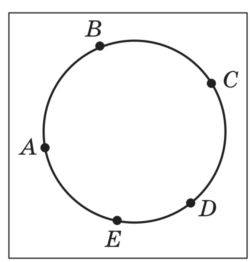


Рис. 3

**6.**** Решается аналогично задаче 5.

**8.**** Деталь имеет форму круга. Как практически можно найти центр круга?

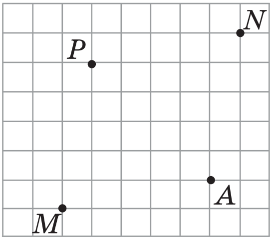


Рис. 4

*Указание.* К двум хордам границы круга провести серединные перпендикуляры.

**11.**** На рис. 4 указана точка $A$, общая для двух окружностей с центрами $M$ и $N$. Укажите еще одну общую точку этих окружностей.

*Указание.* Точка $P$ на рис. 4, так как $MN$ — серединный перпендикуляр к $AP$.

**12.** Отрезки $AB$ и $CD$ — диаметры окружности. Покажите, что: а) хорды $BD$ и $AC$ равны; б) углы $BAD, ADC, ABC$ и $BCD$ равны.

*Указание.* Воспользоваться первым признаком равенства треугольников.

**14.** В окружности с центром $O$ проведены диаметры $AB$ и $CD$. Каков периметр треугольника $AOD$, если $|AB| = 12$ см, $|BC| = 5$ см?

*Указание.* Установить равенство треугольников $AOD$ и $BOC$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Какую наибольшую длину может иметь общая хорда двух окружностей с радиусами 8 см и 10 см?

1) 12 см; 2) 14 см; 3) 16 см; 4) 18 см.

*Указание.* Равную диаметру меньшей окружности.

**2.1.** В окружности радиуса 2 см 7 мм проведена хорда длины $d$. Каким из указанных значений не может равняться $d$?

1) $d = 5$ см; 2) $d = 6$ см; 3) $d = 7$ см; 4) $d = 8$ см.

*Указание.* Диаметр данной окружности равен 5 см 4 мм.

## § 2. КАСАТЕЛЬНАЯ

**Цель параграфа** — определить касательные к окружности, вывести свойства касательных, рассмотреть способы построения касательной при помощи циркуля и линейки.

**Особенности параграфа.** В параграфе касательная определяется как прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку. Для установления существования касательных доказывается основной признак касания прямой с окружностью: прямая, проходящая через конец радиуса окружности перпендикулярно этому радиусу, является касательной к окружности. Доказательство проводится «методом от противного», на что следует обратить внимание учащихся и в связи с этим вспомнить утверждения, в которых проводились аналогичные рассуждения. Классическим можно считать применение «метода от противного» при доказательстве бесконечности множества простых чисел.

Наряду с существованием возникает вопрос и о единственности касательной, проходящей через заданную точку окружности. На первом и втором уровнях такое свойство достаточно лишь обсудить и принять без доказательства, на третьем уровне следует разобрать доказательство единственности касательной, которое приводится в пункте 2.3**. На втором и третьем уровнях разбираются способы построения касательной при помощи циркуля и линейки. При этом важно, чтобы школьники учились воспринимать разницу между рисунком, который обычно делается лишь приближенно, и построением при помощи циркуля и линейки, которое выполняется на основании известных закономерностей и с теоретической точки зрения приводит к абсолютно точному результату. Поэтому, разбирая построения, которые приведены в пункте 2.4*, следует особое внимание обратить на обоснования. Заключительный пункт параграфа можно считать вспомогательным, так как в нем без пояснений приводится интересный и неожиданный способ построения касательной с использованием только одной линейки.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: окружность; диаметр окружности; диаметрально противоположные точки; хорда; перпендикулярность прямых и отрезков.

**Новые математические понятия:** касательная к окружности; точка касания; отрезок касательной.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Сколько общих точек с окружностью имеет луч с началом в центре окружности?

*Ответ.* Каждый такой луч имеет с окружностью одну общую точку.

**2.2.** Через какие точки плоскости нельзя провести касательную к данной окружности?

*Ответ.* Если точка $A$ лежит внутри окружности (т.е. $OA < r$, где $O$ — центр и $r$ — радиус окружности), то через точку $A$ касательную к окружности провести нельзя, так как любая прямая, проходящая через точку $A$, пересекает окружность в двух точках.

**2.3.** Почему через точку окружности можно провести только одну касательную?

*Ответ.* Радиус, проведенный в точку окружности, перпендикулярен касательной, проведенной через эту точку, а через точку на прямой можно провести только одну прямую, ей перпендикулярную.

**2.4.*** Сколько касательных можно провести к окружности из одной точки?

*Ответ.* Две касательных, если точка лежит вне окружности; одну касательную, если точка лежит на окружности; нельзя провести ни одной касательной, если точка лежит внутри окружности.

**2.5.**** Какие примеры решения какой-нибудь одной задачи различными способами вам известны?

*Вариант ответа.* Например, несколько способов построения перпендикуляра.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

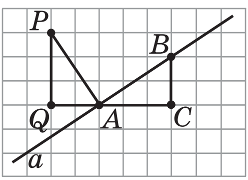


Рис. 1

**2.** На клетчатой бумаге дана прямая $a$ и точка $A$ на ней, как на рис. 1. Нарисуйте какую-нибудь окружность с центром в узле клетчатой бумаги, касающуюся прямой $a$ в точке $A$.

*Указание.* Центр одной из окружностей можно выбрать в точке $P$, отмеченной на рис. 1 и поставленной таким образом, что треугольник $APQ$ равен треугольнику $ABC$.

**3.** Где расположены центры окружностей, которые касаются заданной прямой в заданной точке?

*Указание.* Рассмотреть прямую, проходящую через данную точку перпендикулярно заданной прямой.

**9.*** Возьмем на окружности две точки $A$ и $B$ так, что хорда $AB$ не проходит через центр окружности. Через середину хорды $AB$ перпендикулярно $AB$ проведем прямую $a$ (рис. 2). Касательная к окружности в точке $A$ пересекает прямую $a$ в точке $M$. Почему прямая $BM$ также будет касательной к данной окружности?

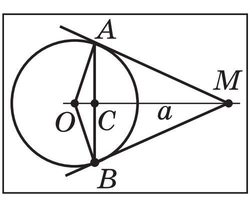


Рис. 2

*Указание.* Пусть $C$ — середина хорды $AB$. Прямоугольные треугольники $ACM$ и $BCM$ равны по двум катетам, поэтому $MB = MA$ и треугольник $AMB$ — равнобедренный. (Можно воспользоваться признаком равнобедренного треугольника: если в треугольнике медиана является высотой, то треугольник равнобедренный.)

Треугольник $AOB$ с вершиной в центре окружности также равнобедренный ($OA = OB$), поэтому его медиана $OC$ перпендикулярна $AB$.

Следовательно, перпендикуляр, проведенный к середине хорды, проходит через центр окружности.

Треугольники $OAM$ и $OBM$ равны по первому признаку ($\angle AOC = \angle BOC$, $OA = OB$, $OM$ — общая сторона). Но тогда $\angle OBM = \angle OAM = 90°$. Следовательно, прямая $MB$ перпендикулярна радиусу $OB$, а поэтому является касательной к окружности.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** Две окружности с радиусами 5 см и 8 см касаются прямой. Какие из указанных значений не может иметь расстояние между центрами этих окружностей?

1) 1 см; 2) 2 см; 3) 3 см; 4) 4 см.

*Указание*. Эти расстояния не меньше разности радиусов.

**2.4.** В каких из указанных случаев окружность с центром $E$ радиуса $R$ и окружность с центром $F$ радиуса $r$ касаются некоторой прямой $a$ в одной точке?

1) $|EF| = 5$ см, $R = 4$ см, $r = 1$ см;
2) $|EF| = 6$ см, $R = 3$ см, $r = 2$ см;
3) $|EF| = 4$ см, $R = 5$ см, $r = 1$ см;
4) $|EF| = 5$ см, $R = 7$ см, $r = 3$ см.

*Указание*. Условию поставленного вопроса соответствуют две возможности, расстояние между центрами равно сумме или модулю разности радиусов.

## § 3. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

**Цель параграфа** — начать знакомство с понятиями вписанного и описанного многоугольника, вписанной и описанной окружности.

**Особенности параграфа.** Параграф носит ознакомительный характер. Не нужно требовать от учащихся прочного запоминания определений новых понятий, так как содержательное изучение свойств вписанных и описанных окружностей для треугольника, свойств вписанных и описанных четырехугольников продолжится в старших классах. На данном этапе важно, чтобы учащиеся научились замечать некоторые особенности взаимного расположения окружности и многоугольника. В качестве примеров привлекательных задач в параграфе разбираются способы построения правильного шестиугольника и правильного пятиугольника. Также в ознакомительном плане рассказывается о приближенных способах вычисления длины окружности и площади круга.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: касательная к окружности; многоугольник.

**Новые математические понятия:** многоугольник, вписанный в окружность; окружность, описанная около многоугольника; многоугольник, описанный около окружности; окружность, вписанная в многоугольник; правильный многоугольник.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Какая окружность называется описанной около треугольника?

*Ответ.* Окружность, на которой лежат все три вершины треугольника.

**3.2.** Какая окружность называется вписанной в треугольник?

*Ответ.* Окружность, которая касается всех трех сторон треугольника.

**3.3.** Как объяснить, что на рис. 1 отрезки $CD$ и $AB$ перпендикулярны, а точка пересечения этих отрезков делит каждый из отрезков пополам?

*Ответ.* Отрезки $AB$ и $CD$ являются диагоналями ромба. Можно привести непосредственное доказательство: медианы, проведенные к $AB$ из вершины $C$ треугольника $ACB$ и из вершины $D$ треугольника $ADB$ являются их высотами. Поэтому $CD \perp AB$. $CD$ делит $AB$ пополам, аналогично $AB$ делит $CD$ пополам.

**3.4.** Как называется правильный четырехугольник?

*Ответ.* Квадрат.

**3.5.**** Как построить правильный шестиугольник?

*Ответ.* Проведем окружность с центром в точке $O$ с радиусом $OA$. Тем же раствором циркуля проведем окружность с центром в точке $A$. Точки пересечения этих окружностей обозначим $B$ и $C$ (иногда говорят: «Поместив циркуль в точку $A$, тем же раствором сделаем засечки и получим на окружности точки $B$ и $C$»). Далее аналогично построим точки $D$ и $E$, а затем и точку $F$ (рис. 2). Заметим, что откладывать от точки $A$ отрезки, равные радиусу, следует только в одном направлении.

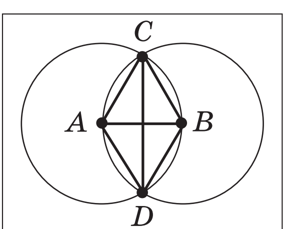

Рис. 1

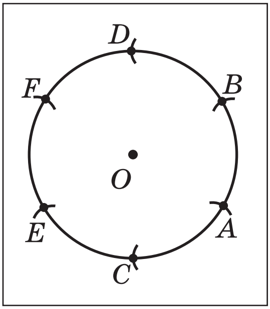


Рис. 2

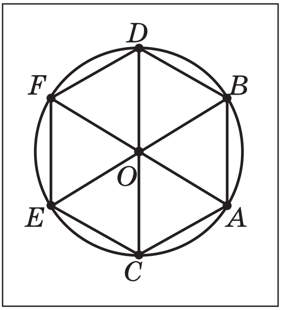


Рис. 3

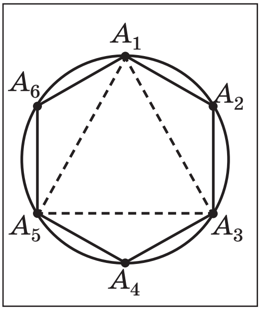


Рис. 4

То, что полученные точки являются вершинами правильного шестиугольника, легко получить с помощью рис. 3, показав, что треугольники с вершиной $O$ — равносторонние.

**3.6.** Почему вершины $A_1A_3A_5$ правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ образуют равносторонний треугольник?

*Ответ.* На рис. 4 имеем

$$\Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_3A_4A_5 = \Delta A_5A_6A_1,$$

следовательно,

$$A_1A_3 = A_3A_5 = A_5A_1.$$

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**10.** Начертите окружность и впишите в нее произвольный четырехугольник. С помощью транспортира измерьте его углы и найдите суммы противоположных углов. Какие выводы можно сделать в результате измерения?

*Указание.* Если четырехугольник обозначить через $ABCD$, то в результате экспериментов следует сделать предположение, что $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

**11.** Нарисуйте такой четырехугольник, в который нельзя вписать окружность.

*Указание.* Например, рассмотреть прямоугольник, не являющийся квадратом.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** В окружность с центром $O$ вписан правильный девятиугольник, у которого отрезок $AB$ является одной из сторон. Чему равна величина угла $AOB$?

1) 18°; 2) 20°; 3) 36°; 4) 40°.

*Указание.* Вычислить $\dfrac{360°}{9}$.

**2.4.**** При каких значениях $n$ из указанных каждый из углов правильного $n$-угольника измеряется целым числом градусов?

1) 9;  2) 12;  3) 14;  4) 18.

*Указание*. Значение $\dfrac{180° \cdot (n - 2)}{n}$ должно быть целым.

## § 4. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

**Цель параграфа** — познакомиться с понятием пространственной фигуры, с многогранником, его основными элементами, с некоторыми другими пространственными фигурами и их названиями.

**Особенности параграфа.** Параграф посвящен первоначальному знакомству с некоторыми пространственными фигурами и их элементами. Для этого выбраны правильные многогранники (или платоновы тела), сфера и шар. На примере этих фигур можно продемонстрировать многообразие окружающих нас предметов и красоту многих из них. Учащимся предлагается при помощи разверток или других заготовок из бумаги изготовить модели правильного тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра и научиться распознавать грани, ребра и вершины многогранника. Следует учесть, что работа по изготовлению моделей непростая, требует аккуратности и далеко не у всех учащихся модели могут получиться сразу. Поэтому желательно иметь хорошие демонстрационные модели в кабинете, а также полезна демонстрация этих фигур с помощью компьютерных средств.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: многоугольник; правильный многоугольник; окружность.

**Новые математические понятия:** пирамида; грань пирамиды; ребро пирамиды; вершина пирамиды; пространственная фигура; правильный тетраэдр; развертка; грань многогранника; куб (гексаэдр); октаэдр; додекаэдр; икосаэдр; правильный многогранник; платоновы тела; многогранник; сфера; шар.

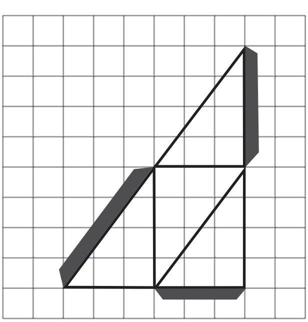

Рис. 1

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**4.1.** Какая фигура получится из заготовки, изображенной на рис. 1?

*Ответ*. Ответ на этот вопрос несколько неожиданный. Получится плоский четырехугольник. Пирамиду склеить не удается.

**4.2.** Какие свойства куба, его ребер и граней вам известны?

*Вариант ответа.* Все ребра куба равны, все грани — равные квадраты.

**4.3.*** Верно ли соотношение В + Г − Р = 2 для правильного тетраэдра?

*Ответ.* Да, В = 4, Г = 4, Р = 6 и В + Г − Р = 2.

**4.4.**** Сколько вершин, ребер и граней у додекаэдра?

*Ответ.* Сделав модель, можно непосредственно подсчитать, что граней 12, ребер 30, вершин 20.

Можно найти ответ с помощью несложного подсчета, зная, что граней 12. Каждое ребро — общее для двух граней, каждая грань — пятиугольник, поэтому число ребер $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Каждая вершина — общая для трех граней, каждая грань имеет пять вершин, поэтому число вершин $\frac{5 \cdot 12}{3} = 20$.

**4.5.**** Сколько граней икосаэдра имеют общую вершину?

*Ответ.* Наибольшее количество — это 5 граней.

**4.6.**** Почему не существует многогранника с тремя гранями?

*Вариант ответа.* В одной вершине должны сходиться по крайней мере 3 ребра и 3 грани. Каждая из этих граней имеет по крайней мере еще одно ребро, помимо указанных. Эти три оставшихся ребра должны лежать еще в какой-то грани (или гранях), не совпадающей с тремя указанными.

**4.7.** Чем отличается сфера от шара?

*Вариант ответа.* Все точки сферы удалены от ее центра на одно и то же расстояние. Точки шара могут быть на разном расстоянии от его центра.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**5.**** Как из шести спичек составить четыре одинаковых треугольника?

*Указание.* Построить правильный тетраэдр.

**10.**** Как из куба вырезать правильный тетраэдр, все вершины которого лежат на гранях куба?

*Указание.* В качестве вершин правильного тетраэдра в параллельных гранях куба взять концы непараллельных диагоналей.

**12.**** Как из трех проволочных квадратов сделать каркас октаэдра?

*Указание.* Соединить два квадрата по их диагоналям и поворачивать относительно этой диагонали один квадрат до тех пор, пока остальные вершины этих двух квадратов станут вершинами нового квадрата.

**13.**** Как называется многогранник, вершинами которого являются центры граней додекаэдра?

*Указание.* Представить число ребер, выходящих из центра одной грани к центрам соседних граней. После этого можно понять, что должен получиться икосаэдр.

**14.**** Как называется многогранник, вершинами которого являются центры граней икосаэдра?

*Указание.* Представить ребра, соединяющие центры граней икосаэдра с общей вершиной. После этого можно понять, что должен получиться додекаэдр.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.4.*** Сколько общих вершин могут иметь две различные грани октаэдра?

1) ни одной; 2) одну; 3) две; 4) три.

*Указание.* Невозможен только последний вариант.

**Исторические сведения.** Правильные многогранники названы платоновыми телами, по имени древнегреческого философа Платона (IV век до н.э.). Но еще в V веке до н.э. они были известны древнегреческому математику Гиппократу Хиосскому, а куб, правильный тетраэдр и октаэдр были известны даже древнегреческому математику VI века до н.э. Пифагору Самосскому. Соотношение В + Г − Р = 2 для всех выпуклых многогранников было впервые установлено великим математиком XVIII века Леонардом Эйлером, долгое время работавшим в России. С помощью этой формулы Эйлер доказал, что других правильных многогранников, кроме платоновых тел, нет.

# Глава 8
# УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель главы** — определить на множестве целых чисел операции умножения и деления, продолжить начатую в 5 классе работу по преобразованию буквенных выражений, продемонстрировать полезность целых чисел при решении некоторых практических задач.

**Особенности главы.** Определение произведения целых чисел опирается на аналогию с определением произведения натуральных чисел. Поэтому, начиная изучать эту главу, целесообразно сначала вспомнить произведение натуральных чисел и выполнить ряд упражнений. Определение деления «нацело» для целых чисел в точности повторяет соответствующее определение для натуральных чисел, однако для выработки навыков деления следует обратить внимание на «правило знаков» и на связь этого правила с определением умножения целых чисел.

Деление с остатком для целых чисел — понятие непростое, а поэтому рассматривается лишь частично и рекомендуется для изучения на третьем уровне.

## § 1. УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель параграфа** — определить операцию умножения для целых чисел, сформулировать «правило знаков», установить связи произведения целых чисел с произведением их модулей, напомнить для целых чисел основные законы умножения и проверить их выполнимость.

**Особенности параграфа.** На первом и втором уровнях изучение данного материала в основном опирается на конкретные примеры. На третьем уровне рассматривается обоснование «правила знаков» с учетом предположения, что на множестве целых чисел операции сложения и умножения подчиняются коммутативным и ассоциативным законам, а также дистрибутивному закону.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: целые числа; сложение и вычитание целых чисел; модуль целого числа; умножение натуральных чисел.

**Новые математические понятия:** произведение целых чисел; правило знаков при умножении.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Чему равно произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$?

*Ответ.* 120.

**1.2.** Какой знак имеет произведение $(2 \cdot (-3)) \cdot 4$?

*Ответ.* Отрицательный, так как $2 \cdot (-3) = -6$, а $(-6) \cdot 4 = -24$.

**1.3.** Какой знак имеет произведение $((-5) \cdot (-6)) \cdot (-7)$?

*Ответ.* Отрицательный, так как $(-5) \cdot (-6) = 30$, а произведение положительного числа 30 и отрицательного числа $-7$ отрицательно.

**1.4.** Чему равно произведение $(-1001) \cdot (-6) + (-1001) \cdot (-(-6))$?

*Ответ.* Нулю.

**1.5.** Как объяснить, что для любых целых чисел выполняется равенство $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$?

*Ответ.* Из правила знаков следует, что произведение двух ненулевых целых чисел равно произведению модулей сомножителей, взятое либо с плюсом, либо с минусом, а поэтому модуль произведения равен произведению модулей. В случае, когда хотя бы один из множителей равен нулю, обе части указанного равенства равны нулю.

**1.6.** Какой общий множитель вы можете вынести за скобки в выражении $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$?

*Варианты ответа.* Можно вынести за скобки число 2; число $(-2)$; число 3; число $(-3)$; и т.д. Наибольший целый положительный множитель, который можно вынести за скобки, равен 120. Можно отметить также, что за скобки всегда можно вынести число 1.

**1.7.**** Какое число получится при умножении числа $a$ на $(-1)$?

*Ответ.* Получится число $(-a)$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.*** При каких целых $x$ выполнено неравенство $x^2 + 1 < 100$?

*Указание.* Если $x^2 + 1 < 100$, то $x^2 < 100$, $|x|^2 < 10^2$, откуда $|x| < 10$.

**5.** Придумайте задачу, при решении которой необходимо умножить некоторое число на 0.

*Указание.* Одна из возможных задач: «Найти произведение всех целых чисел от $(-100)$ до 100».

**12.** На одну чашку весов поставлены гири весом по 5 кг, а на другую — по 3 кг. Весы находятся в равновесии. Сколько поставлено тех и других гирь, если всего их 24?

*Указание*. Если через $x$ обозначить число гирь весом по 5 кг, то $5x = 3 \cdot (24 - x)$.

**16.*** Найдите два целых числа, сумма которых равна 11, а произведение равняется числу (−60).

*Указание*. Пусть искомые числа равны $n$ и $-m$, тогда $n - m = 11$, $nm = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Комбинируя сомножители 2, 3, 4, 5, можно подобрать подходящее сочетание: $n = 3 \cdot 5$, $m = 2 \cdot 2$.

**20.*** При каких целых $n$ выполняется равенство $2 \cdot n = -3 \cdot n$?

*Указание*. При $n \neq 0$ знаки левой и правой частей равенства будут разными, поэтому равенства не будет. При $n = 0$ обе части равенства равны нулю.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** Для каких из указанных пар чисел $a$ и $b$ значение выражения $|a| \cdot |b| + a \cdot b$ неотрицательно?

1) $a = -41$, $b = 14$; 2) $a = -27$, $b = -28$;

3) $a = 16$, $b = 18$; 4) $a = 11$, $b = -29$.

*Указание*. Заданное выражение всегда неотрицательно.

**2.4.** Какие значения из указанных может принимать сумма $a + b + a \cdot b$, если известно, что $|a| = 3$, $|b| = 3$?

1) −25; 2) −15; 3) 15; 4) 35.

*Указание*. Если числа разных знаков, то можно получить только −9, а если одного знака, то 15 и −15.

## § 2. БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

**Цель параграфа** — продолжить работу по преобразованию буквенных выражений, ознакомить учащихся с понятием подобных слагаемых и изучить приведение подобных членов.

**Особенности параграфа.** Этот параграф перекликается с § 4, гл. 7 из учебника 5 класса и служит его продолжением. В дополнение к ранее изученному появляются новые понятия: подобные слагаемые, подобные члены, приведение подобных членов, раскрытие скобок, коэффициенты. Фактически речь идет об одночленах, простейших многочленах и некоторых формулах сокращенного умножения, хотя эти термины пока явно не упоминаются. В качестве примеров в основном рассматриваются полезные алгебраические тождества. Например, равенство $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$, которое великий математик Леонард Эйлер (1707—1783) использовал для вычисления произведений многозначных чисел, храня в своей памяти таблицу квадратов натуральных чисел в пределах до полумиллиона.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: примеры выражений со скобками; свойства сложения и вычитания целых чисел; свойства умножения целых чисел.

**Новые математические понятия:** произведения чисел и букв; коэффициент; подобные слагаемые; приведение подобных членов.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Можно ли опустить скобки в выражении $5 \cdot (4 + 2) \cdot 3$?

*Ответ.* Нельзя, так как $5 \cdot (4 + 2) \cdot 3 = 90$, а $5 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 26$.

**2.2.** Почему равны выражения $a \cdot (b + c)$ и $a \cdot b + a \cdot c$?

*Вариант ответа.* Равенство этих выражений соответствует записи распределительного закона.

**2.3.** Чему равняется коэффициент в выражении $7 \cdot x^2 \cdot 0 \cdot y^3$?

*Ответ.* Нулю.

**2.4.** Почему слагаемые $3ab$ и $5ba$ в сумме $3ab + c + 5ba$ можно считать подобными?

*Ответ.* На основании равенства $5ba = 5ab$.

**2.5.** Как показать, что $a^2 + 3a^2 + 5a^2 + 7a^2 + 9a^2 = (5a)^2$?

*Ответ.* $a^2 + 3a^2 + 5a^2 + 7a^2 + 9a^2 = (1 + 3 + 5 + 7 + 9)a^2 = 25a^2 = (5a)^2$.

**2.6.*** Какие вы можете составить различные по виду выражения, равные выражению $a^2b^2$?

*Ответ.* Например, $aabb$, $abab$, $ab^2a$, $(ab)^2$, $b^2a^2$, $(ba)^2$.

**2.7.**** Чему равняется выражение $(a - b)^2 - (a + b)^2$?

*Ответ.* $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$.

**2.8.**** Какому выражению равно произведение $(x - 1)(x^2 + x + 1)$?

*Ответ.* Выполним преобразования, аналогичные рассмотренным в пункте, и получим, что $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**6.**** Найдите (угадайте) хотя бы один корень уравнений:

а) $x^3 - 1 = x^2 + x + 1$; б) $x^3 + 1 = x^2 - x + 1$;

в) $x^3 - 8 = x^2 + 2x + 4$; г) $x^3 + 8 = x^2 + 4x + 4$.

*Указание.* а) Так как $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, то уравнение можно записать в виде $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 1 \cdot (x^2 + x + 1)$. Отсюда следует, что если $x - 1 = 1$, то обе части уравнения равны. б) Использовать равенство $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. в) Использовать равенство $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. г) Использовать равенство $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

**7.**** Покажите, что число $n^4 + 4$ является составным при любом натуральном $n$, большем 1.

*Указание.* Для решения можно использовать следующие преобразования:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot n^2 + 2 \cdot 2 - 4n^2 =$$
$$= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n).$$

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Какому из указанных выражений равно $(1 - a)^2$?

1) $a^2 - 2a - 1$; 2) $a^2 - 2a + 1$; 3) $a^2 + 2a - 1$; 4) $a^2 + 2a + 1$.

*Указание.* Если аналогичных заданий раньше не было, то нужно раскрыть скобки и выполнить приведение подобных.

**2.4.** Какие из указанных выражений равны $2a^2 - 1$?

1) $(a^2 - 2a - 2) + (a + 1)^2$; 2) $(a + 1)^2 - 2 \cdot (a + 1)$;

3) $(a^2 + 2a - 2) + (1 - a)^2$; 4) $(a - 1)^2 + (a + 1)^2$.

*Указание.* В каждом из вариантов раскрыть скобки и привести подобные.

## § 3. ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Цель параграфа** — определить для целых чисел операцию деления нацело. В порядке ознакомления на третьем уровне рассмотреть деление с остатком отрицательного целого числа на натуральное число.

**Особенности параграфа.** В параграфе по аналогии с натуральными числами определены частное, остаток, делимое, делитель при делении (без остатка) одного целого числа на другое ненулевое целое число. Сформулировано правило знаков при делении. Показано, почему на нуль делить нельзя.

При изучении данного параграфа следует обратить внимание учащихся на то, что для целых чисел деление нацело выполнимо не всегда.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: деление нацело для натуральных чисел; делимое; делитель; частное; кратное; деление с остатком для натуральных чисел.

**Новые математические понятия:** частное целых чисел; остаток при делении отрицательного целого числа на натуральное.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Какие свойства частного вам известны?

*Ответ.* Если делимое и делитель одновременно умножить или разделить на одно и то же ненулевое число, то частное от этого не изменится.

**3.2.** Чему равняется значение выражения $(-4) : ((-8) : (-2))$?

*Ответ.* Значение равно $(-1)$.

**3.3.** При каких целых $a$ выполняется равенство $a = \dfrac{1}{a}$?

*Ответ.* При $|a| = 1$, т.е. при $a = 1$ и $a = -1$.

**3.4.**** Какие целые числа являются корнями уравнения $x : x = 1$?

*Ответ.* Любое целое число, отличное от нуля.

**3.5.** Какой знак имеет число $\dfrac{(-8)\cdot(-6)\cdot 5}{4\cdot(-3)\cdot 2\cdot(-1)}$?

*Ответ.* Это число положительно, потому что четыре множителя отрицательны, а их попарные произведения положительны.

**3.6.**** Чему равно частное $(-2a) : (-a)$ при $a \neq 0$?

*Ответ.* Частное равно 2.

**3.7.** Как показать, что выражения $-(-|a|):(-|b|)$ и $-(|a|:|b|)$ равны?

*Ответ.* Модули этих выражений равны, а из правила знаков следует, что оба выражения отрицательны, если $a \neq 0$. При $a = 0$ оба выражения равны нулю. Можно также в очередной раз акцентировать внимание на том, что по смыслу данного вопроса значение $b = 0$ не рассматривается.

**3.8.**** Как связаны между собой остатки при делении двух противоположных чисел на одно и то же натуральное число?

*Ответ.* Если целое число $a$ делится на натуральное число $b$, то тогда и $(-a)$ делится на $b$, и в этом случае оба остатка равны нулю. Если же при делении числа $a$ на $b$ получается ненулевой остаток $r$, то при делении числа $(-a)$ на $b$ получится остаток $(b - r)$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**10.** Думали, что на елку придут 80 человек, и приготовили для них 480 яблок. Но гостей пришло больше, поэтому каждому досталось на 2 яблока меньше, чем предполагалось. Сколько человек было на празднике?

*Указание.* Если через $m$ обозначить число пришедших гостей, то по условию $\dfrac{480}{m} = \dfrac{480}{80} - 2 = 4$, значит, $m = 120$.

**12.*** Покажите, что произведение $n(n+1)$ делится на 2 без остатка при любом натуральном $n$.

*Указание.* При любом натуральном $n$ одно из чисел $n$ или $(n+1)$ обязательно четно.

**13.**** При делении числа $n$ на 3 получается остаток 2. Какой остаток получится при делении числа $n^2$ на 3?

*Указание.* Записать число $n$ в виде $(3m + 2)$, возвести в квадрат и раскрыть скобки.

**14.**** При делении числа $n$ на 3 получается остаток 2, а при делении числа $m$ на 3 — остаток 1. Покажите, что $mn$ не делится на 3 без остатка.

*Указание.* Если представить $n = 3p+2$, $m = 3q+1$, то $mn = (3q + 1)(3p + 2) = 3(3pq + p + 2q) + 2$.

**15.**** Покажите, что при любом натуральном $n$ число $n(n + 1)(n + 2)$ делится: а) на 2; б) на 3; в) на 6.

*Указание.* Можно по очереди рассмотреть случаи: а) $n = 3m$; б) $n = 3m + 1$; в) $n = 3m + 2$, где $m$ — целое.

**17.**** Найдите остаток от деления числа $-1010$ на 9.

*Указание.* $1010 = 992 \cdot 9 + 2$. Поэтому $-1010 = -992 \cdot 9 - 2 = -992 \cdot 9 - 9 + (9 - 2) = -993 \cdot 9 + 7$.

**21.**** Имеются чашечные весы и по две гири в 1 кг, 4 кг, 16 кг каждого веса. Почему с их помощью можно взвесить любое целое число килограммов от 1 кг до 42 кг, используя одно взвешивание для каждого числа?

*Указание.* Сначала нужно заметить, что гири можно ставить и на разные чашки весов. Затем рассмотреть запись чисел в системе счисления с основанием 4, и при этом заменять остаток 3 на отрицательный остаток (–1).

Можно также ограничиться подбором вариантов.

**23.** Как из трех одинаковых по форме монет найти фальшивую при помощи взвешиваний на чашечных весах без гирь, если известно, что фальшивая монета только одна и имеет вес, отличный от веса двух настоящих монет?

*Указание.* Сначала положить на каждую чашку по одной монете. Если наступит равновесие, то оставшаяся монета фальшивая, а если нет — оставшаяся монета настоящая, и в этом случае вес каждой монеты можно сравнить с весом найденной настоящей монеты.

**24.**** Из 27 одинаковых по внешнему виду монет одна фальшивая и она легче настоящей монеты. Как за три взвешивания на чашечных весах выявить фальшивую монету?

*Указание.* Первым взвешиванием сравнить вес двух наборов по 9 монет. Это позволит выявить набор из 9 монет, который содержит фальшивую монету. После этого сравнить вес двух наборов по 3 монеты.

**25.** Имеется по одной монете в 1 рубль и 5 рублей, по одной купюре в 50 и 100 рублей, две монеты по 2 рубля и четыре монеты по 10 рублей. Покажите, что этими деньгами можно уплатить без сдачи: а) 73, б) 136, в) 148, г) 174 руб.

*Указание.* Эту задачу можно решить путем подбора вариантов.

**26.**** Как, имея угольник с углом в 19 градусов, разделить угол в $19^\circ$ на 19 равных частей?

*Указание.* Использовать равенство $19 \cdot 19 = 361 = 360 + 1$.

**27.**** Представьте число 32 в виде $5n + 4m$, где $m$ и $n$ — целые числа.

*Указание.* Число $n$ должно делиться на 4.

**28.**** Имеются две линейки без делений, одна из которых имеет длину 17 см, а другая 22 см. Как при помощи этих линеек, отмерить ровно 1 метр?

*Указание.* Эту задачу можно решить путем подбора варианта $2 \cdot 17 + 3 \cdot 22 = 100$.

**29.** г)** Имеются брусок длины, большей 21 см, и линейка, на которой некоторые деления отсутствуют. Как отметить карандашом на бруске ровно 20 см, если на линейке отмечены деления 2 см, 5 см, 8 см и 16 см?

*Указание.* Отметки на линейке позволяют отмерять отрезки длиной 6 см, 8 см и некоторые другие. Для получения отрезка длиной 20 см достаточно использовать равенство $20 = 8 + 2 \cdot 6$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.3.** Известно, что число 100 при делении на 7 дает остаток 2. Чему равен остаток $r$ при делении числа $-100$ на 7?

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

*Указание.* Остаток от деления числа 100 на 7 равен 2, а поэтому остаток от деления числа $-100$ на 7 равен $7 - 2 = 5$.

**1.4.** Чему равен остаток $r$ при делении числа $-2737$ на 5?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

*Указание.* Остаток при делении 2737 на 5 равен 2, поэтому остаток при делении $-2737$ на 5 равен $5 - 2 = 3$.

# Глава 9

# ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

**Цель главы** — дать наглядные представления об осевой симметрии, о симметричных фигурах, рассмотреть некоторые особенности, связанные с отражениями в зеркале.

**Особенности параграфа.** В главе рассматривается симметрия относительно прямой, в связи с чем вводятся понятия оси симметрии, симметричности точек и фигур относительно оси симметрии и т.д. Главным в изучении данного материала является понятие перпендикулярности, потому что если две различные точки симметричны относительно оси, то ось симметрии является серединным перпендикуляром к отрезку с концами в этих точках. В конце главы рассматривается зеркальное отражение и выясняется как оно связано с симметрией относительно прямой.

## § 1. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

**Цель параграфа** — первоначальное знакомство с понятием осевой симметрии.

**Особенности параграфа.** В первом пункте приводятся примеры симметричных фигур. Знакомство с ними должно привести к уяснению того, что симметричные фигуры «одинаково расположены» относительно некоторой прямой, причем смысл «одинаковой расположенности» в дальнейшем уточняется. Для этого вводится временный термин «точки-близнецы» для точек, расположенных на одинаковом расстоянии от этой прямой, но по разные стороны от нее, причем условие, что «точки-близнецы» лежат на одном перпендикуляре к прямой, пока не упоминается.

Во втором пункте дается определение точки, симметричной данной точке относительно прямой. Отмечается, что если точка $A_1$ симметрична точке $A$ относительно прямой $s$, то, в свою очередь, и точка $A$ симметрична точке $A_1$. Это позволяет ввести термин «ось симметрии». Заметим, что сначала симметрия определяется только для точек, не принадлежащих прямой $s$, а уже потом понятие симметрии распространяется и на точки прямой $s$.

В пункте 1.3 отмечается, что при перегибании листа бумаги по оси симметрии симметричные точки совмещаются.

Наглядные представления об осевой симметрии приводят к появлению определения фигур, симметричных относительно оси. Поскольку целью параграфа является первоначальное знакомство с симметричностью относительно оси, само собой разумеющимся предполагается тот факт, что фигурой, симметричной отрезку, является отрезок.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: перпендикулярность прямых и отрезков; равнобедренный треугольник и его свойства; серединный перпендикуляр к отрезку.

**Новые математические понятия:** точка, симметричная данной точке относительно заданной прямой; ось симметрии; симметричные относительно оси фигуры.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Какой смысл вкладывается в слова «точки-близнецы»?

*Варианты ответа.* 1. Это точки, одинаково расположенные относительно прямой. Такой ответ подкрепляется правильным указанием таких точек на рисунке.

2. Это точки, расположенные по разные стороны от прямой на одинаковом расстоянии от нее (уточняется первоначально использованный оборот — «одинаково расположенные»).

3. Это такие пары точек, что отрезок, их соединяющий, перпендикулярен данной прямой и делится ею пополам.

**1.2.** Относительно какой оси симметричны точки числовой прямой, изображающие пару противоположных чисел?

*Ответ.* Нужно провести прямую, перпендикулярную числовой прямой и проходящую через точку, соответствующую числу 0. Эта прямая и будет осью симметрии указанных точек.

**1.3.** Что произойдет с узлами клетчатой бумаги при перегибании листа по одной из линий сетки?

*Ответ.* При перегибании листа клетчатой бумаги по одной из линий сетки все узлы сетки одной половины листа совмещаются с соответствующими (симметричными) узлами другой половины листа.

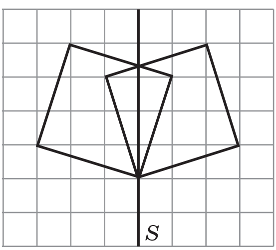


Рис. 1

**1.4.** Как проверить симметричность квадратов, изображенных на рис. 1?

*Ответ.* Достаточно убедиться в симметричности соответствующих вершин. Это можно сделать либо перегибанием копии чертежа, либо убедившись в том, что соответствующие вершины лежат на одном перпендикуляре к оси и на равных расстояниях от оси. Это нетрудно понять, так как горизонтальные линии сетки перпендикулярны вертикальной прямой $s$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**11.** Относительно каких прямых отрезок симметричен самому себе?

*Указание.* Относительно прямой, содержащей данный отрезок, а также относительно серединного перпендикуляра к этому отрезку.

**12.*** Относительно каких прямых данная прямая симметрична сама себе?

*Указание.* Относительно самой этой прямой, а также относительно любого перпендикуляра к данной прямой.

**13.** Могут ли треугольник и четырехугольник оказаться симметричными друг другу относительно некоторой оси?

*Указание.* Не могут. Если бы они были симметричны, то каждая вершина четырехугольника была бы симметрична некоторой вершине треугольника, а этого не может быть, так как число вершин у рассматриваемых фигур разное.

**15.**** Даны две перпендикулярные прямые $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $O$. Точка $M$ симметрична точке $M_1$ относительно прямой $a$, а точка $M_1$ симметрична точке $M_2$ относительно прямой $b$. Каково взаимное расположение точек $M$, $O$ и $M_2$?

*Указание.* Точка $O$ — середина отрезка $MM_2$.

**17.*** Даны прямая $a$ и две точки $A$ и $B$, расположенные по одну сторону от нее. Найдите на прямой $a$ такую точку $C$, чтобы сумма $|AC| + |BC|$ была наименьшей.

*Указание.* Выбрать, например, точку $B$, симметрично отразить относительно прямой и полученную точку соединить с точкой $A$. Дальнейшие рассуждения можно найти в следующем параграфе в п. 3.2.

**18.**** Даны угол с вершиной $A$ и точка $M$ внутри угла. Постройте треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина находилась в точке $M$, а две другие вершины — на сторонах угла.

*Указание.* Построить точки $M_1$ и $M_2$, симметричные точке $M$ относительно сторон угла, и найти точки пересечения отрезка $M_1M_2$ со сторонами угла (рис. 2).

**19.**** На рис. 3 даны два равных отрезка $AB$ и $CD$. Найдите две прямые $a$ и $b$ такие, что при осевой симметрии отрезка $AB$ относительно прямой $a$ и при симметрии отрезка $CD$ относительно прямой $b$ получится один и тот же отрезок.

*Указание.* В задаче можно найти много решений. Приведем только одно из них. Сначала найдем такую симметрию, при которой точка $B$ переходит в точку $D$. Для этого в качестве оси симметрии выбираем прямую $a$ — серединный перпендикуляр к отрезку $BD$ (рис. 4). После этого находим такую симметрию, при которой отрезок $CD$ переходит в отрезок $DA_1$. Для этого в качестве оси симметрии выбираем прямую $b$ — биссектрису угла $CDA_1$ (рис. 4).

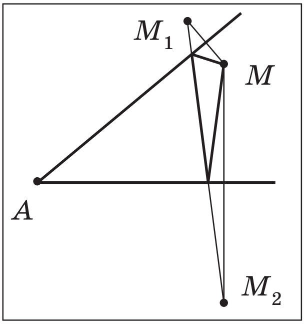


Рис. 2

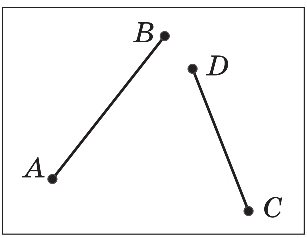


Рис. 3

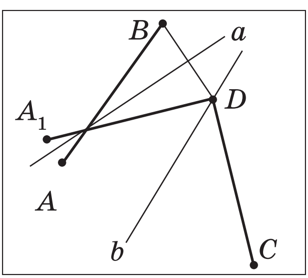


Рис. 4

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** На плоскости отметили три различные точки, лежащие на одной прямой, и построили симметричные им точки относительно некоторой прямой. Сколько всего точек может получиться (с учетом заданных)?

1) три; 2) четыре; 3) пять; 4) шесть.

*Указание.* При подборе различных осей симметрии можно понять, что если ось симметрии не проходит ни через одну из точек, то после симметрии добавится три точки; если ось симметрии проходит только через одну из точек, то после симметрии добавится две точки; если ось симметрии проходит через две из точек, то она проход и через третью точку, а поэтому после симметрии не добавится ни одной точки.

**2.4.** На плоскости отметили три вершины треугольника и построили симметричные им точки относительно некоторой прямой. Сколько всего точек может получиться с учетом выбранных?

1) три; 2) четыре; 3) пять; 4) шесть.

*Указание*: Подходят все варианты.

## § 2. ОСИ СИММЕТРИИ ФИГУР

**Цель параграфа** — познакомиться с фигурами, симметричными самим себе относительно некоторой прямой, рассмотреть примеры доказательств симметричности некоторых простейших фигур и отыскание их осей симметрии.

**Особенности параграфа.** Сначала приводится определение фигуры, симметричной относительно некоторой оси, называемой осью симметрии этой фигуры, и на наглядном уровне приводятся примеры симметричных фигур. В дальнейшем приводится строгое доказательство симметричности некоторых простейших фигур относительно соответствующих осей. В частности, показано, что любой угол симметричен относительно его биссектрисы, ромб симметричен относительно любой из диагоналей, окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через центр. Эти примеры показывают, что осей симметрии может быть несколько и даже бесконечно много.

Последний пункт предназначен для изучения на третьем уровне. Здесь устанавливается, что любая точка оси симметрии точек $A$ и $A_1$ равноудалена от этих точек. Отметим, что обратное утверждение неявно предполагается, но пока не рассматривается.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: симметрия точки относительно прямой; равнобедренный треугольник и его свойства; серединный перпендикуляр к отрезку.

**Новые математические понятия:** симметричная фигура; ось симметрии фигуры.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** На каких рисунках в первом параграфе изображены геометрические фигуры, симметричные относительно оси?

*Ответ.* На первых шести рисунках.

**2.2.** Какая прямая является осью симметрии плоского развернутого угла?

*Ответ.* Перпендикулярная к сторонам угла прямая, проходящая через вершину угла.

**2.3.** Сколько осей симметрии имеет квадрат?

*Ответ.* Четыре. Помимо диагоналей его осями симметрии являются прямые, проходящие через середины противоположных сторон.

**2.4.** Как убедиться, что если прямая $a$ не проходит через центр окружности, то эта прямая не является осью симметрии для окружности?

*Вариант ответа.* Предположим, что у окружности есть ось симметрии $a$, не проходящая через ее центр. Из центра проведем прямую, перпендикулярную оси симметрии. Эта прямая пересекает окружность в двух точках, например $A$ и $B$. По определению симметрии эти точки должны быть симметричными относительно прямой $a$. Но такого не может быть, так как точки $A$ и $B$ находятся на разных расстояниях от прямой $a$.

**2.5.*** Какие точки внутри равнобедренного треугольника равноудалены от вершин его основания?

*Ответ.* Точки высоты, опущенной на основание треугольника.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**1.** Сколько осей симметрии имеет фигура, состоящая из двух точек?

*Указание.* Одну из осей симметрии находят, как правило, все учащиеся — это серединный перпендикуляр к отрезку с концами в заданных точках. Но есть и еще одна ось симметрии — прямая, проходящая через данные точки.

**9.**** Почему ось симметрии равностороннего треугольника обязательно проходит через его вершину?

*Указание.* Если треугольник $ABC$ симметричен относительно прямой $a$, то вершина $A$ должна быть симметрична одной из вершин $A$, $B$ или $C$. Если она симметрична самой себе, то эта вершина лежит на оси симметрии и доказательство уже закончено. Пусть $A$ симметрична некоторой другой вершине, например точке $B$. Тогда $B$ будет симметрична вершине $A$, а точка $C$ может быть симметрична только самой себе. Значит, теперь эта точка окажется на оси симметрии.

**10.**** Сколько осей симметрии имеет правильный пятиугольник?

*Указание.* Как и в предыдущей задаче можно показать, что ось симметрии правильного пятиугольника должна проходить через одну из его вершин. При этом она, очевидно, будет осью симметрии угла при этой вершине, т.е. его биссектрисой. Верно и обратное: биссектриса любого угла правильного пятиугольника является его осью симметрии. Таким образом, у правильного пятиугольника ровно пять осей симметрии.

**12.** Изобразите оси симметрии двух пересекающихся прямых.

*Указание.* Провести биссектрисы четырех образующихся углов.

**13.**** Когда фигура, состоящая из двух пересекающихся отрезков: а) имеет одну ось симметрии; б) имеет две оси симметрии; в) имеет четыре оси симметрии; г) не имеет ни одной оси симметрии?

*Указание.* а) Когда концы отрезков являются вершинами равнобедренной трапеции или когда отрезки перпендикулярны и только один из отрезков точкой пересечения делится пополам; б) когда концы отрезков являются вершинами ромба или прямоугольника, но не квадрата; в) когда концы отрезков являются вершинами квадрата; г) когда не выполняется ни одно из условий, перечисленных в предыдущих пунктах.

**14.*** Когда фигура, состоящая из прямой и пересекающего ее отрезка, имеет ось симметрии?

*Указание.* Когда отрезок перпендикулярен прямой.

**17.**** Покажите, что если треугольник симметричен относительно некоторой прямой, то одна из вершин треугольника обязательно лежит на оси симметрии.

*Указание.* Если треугольник $ABC$ симметричен относительно прямой $a$, то вершина $A$ должна быть симметрична одной из вершин $A$, $B$ или $C$. Если она симметрична самой себе, то эта вершина лежит на оси симметрии и доказательство уже закончено. Пусть $A$ симметрична некоторой другой вершине, например точке $B$. Тогда $B$ будет симметрична вершине $A$, а точка $C$ может быть симметрична только самой себе. Значит, теперь эта точка окажется на оси симметрии.

**18.**** Сколько осей симметрии имеет бесконечная полоса (рис. 1)?

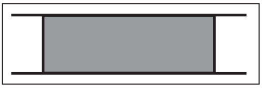

Рис. 1

*Указание.* Осью симметрии будет прямая, проходящая посередине между границами полосы, а также любая прямая, перпендикулярная границам полосы.

**20.**** Нарисуйте фигуру, имеющую ровно шесть осей симметрии.

*Указание.* Рассмотреть правильный шестиугольник.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.2.** Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из трех сторон квадрата и его диагоналей?

1) ни одной; 2) одну; 3) две; 4) четыре.

*Указание.* Если не выбрана какая-то сторона квадрата, то противолежащая ей сторона при симметрии должна перейти в себя. Таких симметрий может быть две, но из них только одна переведет рассматриваемую фигуру в себя.

## § 3. ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

**Цель параграфа** — познакомиться с некоторыми законами зеркального отражения.

**Особенности параграфа.** В параграфе отмечается связь осевой симметрии с зеркальным отражением, решается задача о наименьшей сумме расстояний от двух точек, лежащих по одну сторону от прямой, до точки этой прямой. На втором уровне объясняется, что отражение от зеркала происходит по закону «угол падения равен углу отражения». В принципе этот материал несложный и при возможности его можно рассмотреть и на первом уровне.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: симметрия относительно прямой; биссектриса угла.

**Новые математические понятия:** зеркальное отражение.

**Вспомогательные понятия:** угол падения; угол отражения; закон отражения.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Как при помощи зеркала «превратить» прямой угол в квадрат?

*Ответ.* Отметим на сторонах угла две точки, равноудаленные от вершины, и поставим зеркало вертикально на прямую, проходящую через эти точки. В зеркале мы увидим часть прямого угла, симметричного данному. Части этих угла вместе составляют квадрат.

**3.2.** Как при помощи длин отрезков записать условие, что точка $M$ принадлежит отрезку $AB_1$?

*Ответ.* Если точка $M$ принадлежит отрезку $AB_1$, то $|AB_1| = |AM| + |MB_1|$, и наоборот.

**3.3.*** На рис. 1 условно изображены лучи солнечного света в плоскости, содержащей точки $M$ и $F$. Как поставить зеркаль-

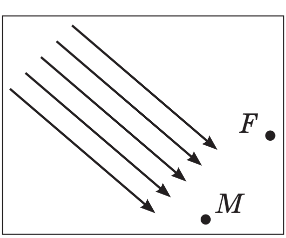


Рис. 1

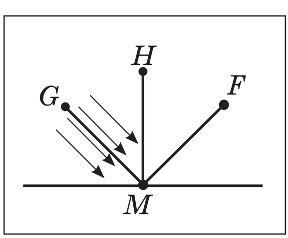


Рис. 2

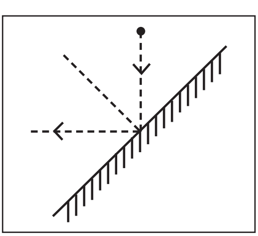

Рис. 3

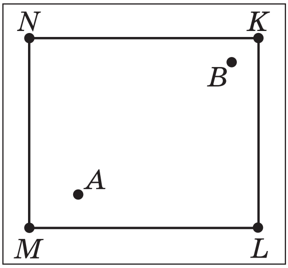


Рис. 4

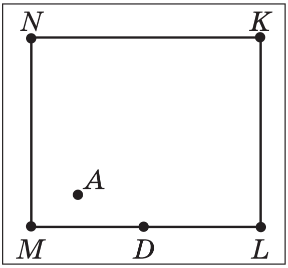


Рис. 5

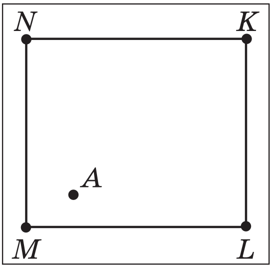


Рис. 6

це в точке $M$, чтобы отраженный «солнечный зайчик» попал в точку $F$?

*Ответ.* Выберем луч $GM$ света, попадающий в точку $M$, и соединим точки $M$ и $F$ (рис. 2). Зеркало должно быть расположено так, чтобы перпендикуляр $MH$ к нему оказался биссектрисой угла $GMF$. Тогда углы $GMH$ и $HMF$ равны, т.е. получим, что угол падения равен углу отражения.

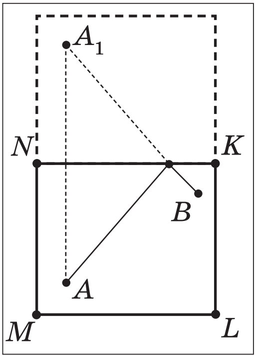


Рис. 7

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**5.**** Бильярдный шар при отражении от стенки изменяет свое движение так, что «угол падения равен углу отражения», как это условно изображено на рис. 3. Как нужно пустить бильярдный шар: а) из точки $A$ на рис. 4, чтобы он после отражения от стороны $NK$ попал в точку $B$; б) из точки $A$ на рис. 5, чтобы он после отражения от сторон $NK$ и $KL$ попал в точку $D$; в) из точки $A$ на рис. 6, чтобы он после отражения от сторон $NK$, $KL$ и $ML$ вернулся в точку $A$?

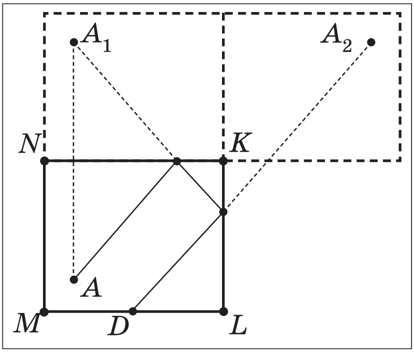


Рис. 8

*Указание.* а) Построить точку $A_1$, симметричную точке $A$ относительно стороны $NK$, и провести отрезок $A_1B$ (рис. 7). б) Построить точку $A_1$, симметричную точке $A$ относительно стороны $NK$, затем построить точку $A_2$, симмет-

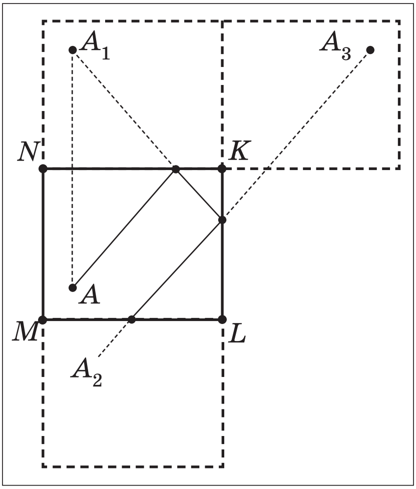


Рис. 9

ричную точке $A_1$ относительно прямой $KL$, и провести отрезок $A_2D$ (рис. 8). в) Построить точку $A_1$ (рис. 9), симметричную точке $A$ относительно стороны $NK$, точку $A_2$, симметричную точке $A$ относительно стороны $ML$, точку $A_3$, симметричную точке $A_1$ относительно прямой $KL$, и провести отрезок $A_2A_3$.

**6.**** в) На рис. 10 в точке $A$ расположен источник света, а квадрат $MNKL$ непроницаем для световых лучей. В каких узлах и как нужно расположить одно или несколько зеркал, чтобы луч света от источника попал в середину отрезка $MN$?

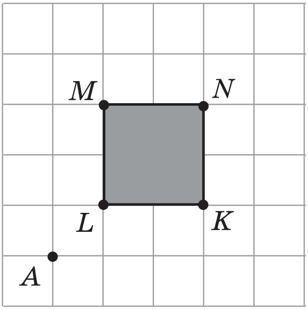


Рис. 10

*Указание*. Сделать это можно многими способами. Проще всего расположить два зеркальца так, как указано на рис. 11. Можно обойтись и одним зеркальцем. Для этого нужно выбрать узел так, чтобы отрезки, соединяющие этот узел с серединой отрезка $MN$ и с точкой $A$, не пересекли квадрат. Затем в этом узле расположить зеркальце перпендикулярно биссектрисе угла между отрезками.

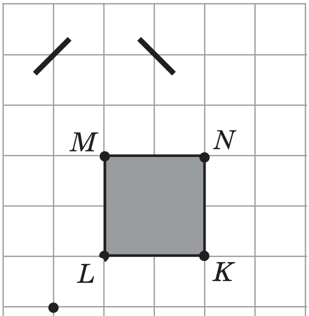


Рис. 11

## Указания по работе с наиболее трудными тестами.

**2.3.** Отрезок числовой прямой оси $Ox$ с концами $A(3)$ и $B(7)$ симметричен отрезку $CD$ относительно прямой, проходящей через точку $P(2)$ перпендикулярно оси $Ox$. Какие из указанных чисел являются координатами точек $C$, $D$?

1) −1; 2) 1; 3) −4; 4) −10.

*Указание*. Координаты этих точек $(2 - 3)$ и $(2 - 7)$.

# Глава 10
# ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

**Цель главы** — расширение представлений о дробных числах и завершение построения арифметики обыкновенных дробей; ввести отрицательные дроби, распространить на них операции сложения, вычитания, умножения и деления, уже известные для положительных дробей.

**Особенности главы**. В этой главе отражены два основных подхода к определению дробных чисел. Первый — дробное число означает длину отрезка. Для реализации этого подхода надо единичный отрезок разделить на $n$ равных частей и обозначить длину каждой из них через $\frac{1}{n}$. Если затем взять получившуюся часть в качестве новой «единицы длины» и повторить для нее всю теорию целых чисел, то получится теория дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m$ — произвольное целое число. При таком подходе становится более доступным правило сложения дробей: приведение к общему знаменателю выглядит как выбор общей меры для различных отрезков рациональной длины, а формула суммы двух дробей становится выражением длины для суммы соответствующих отрезков с помощью выбранной общей меры. Второй подход связан с приданием смысла решению уравнений вида $nx = m$, где $m$ и $n$ — целые числа. Оба упомянутых подхода тесно связаны. Однако не следует слишком углубляться в эти вопросы. Их нужно использовать лишь как иллюстрацию при объяснении правил действий с дробями.

На ознакомительном уровне упоминаются цепные дроби.

## § 1. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ДРОБИ

**Цель параграфа** — напомнить понятия, связанные с дробными числами.

**Особенности параграфа.** Этот параграф не содержит, по существу, нового материала. Здесь напоминаются известные из курса 5 класса определение положительных дробей, их изображение на числовой прямой, правила сложения и вычитания положительных дробей, приведение дробей к общему знаменателю, основные свойства дроби. Единственный момент, на который следует обратить особое внимание, состоит в том, что при сложении дробей можно приводить их к любому общему знаменателю, а не только к произведению знаменателей. В связи с этим подчеркнута особая роль наименьшего общего знаменателя.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: положительные дроби; равенство дробей; правила сложения и вычитания дробей; правила умножения и деления дробей.

**Новые математические понятия:** наименьший общий знаменатель.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Как изобразить дробь $\frac{9}{10}$ на числовой прямой?

*Ответ.* Отрезок от 0 до 1 разделить на 10 равных частей и десятую часть этого отрезка отложить от точки 0 девять раз в направлении к точке, изображающей число 1.

**1.2.** Чему равна сумма $\frac{31}{500} + \frac{63}{5000}$ ?

*Ответ.* $\frac{310}{5000} + \frac{63}{5000} = \frac{373}{5000}$.

**1.3.** Какими дробями можно обозначить середину отрезка между точками 4 и 5 на числовой прямой?

*Ответ.* Существует бесконечно много таких обозначений. Приводим некоторые из них: $4\frac{1}{2}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{18}{2}$; $\frac{27}{2}$; $\frac{45}{2}$.

**1.4.** Как показать, что для любых натуральных чисел $k, a, b, c, d$ выполняется равенство $\frac{a}{kb} + \frac{c}{kd} = \frac{ad + bc}{kbd}$?

*Ответ.* Приводя дроби к общему знаменателю $kbd$, получаем: $\frac{a}{kb} + \frac{c}{kd} = \frac{ad}{kbd} + \frac{cb}{kbd} = \frac{ad + bc}{kbd}$.

**1.5.** Чему равно значение НОК $(10^4, 2^6 \cdot 5^3)$?

*Ответ.* НОК $(10^4, 2^6 \cdot 5^3) =$ НОК $(10 \cdot 10^3, 8 \cdot 10^3) = 40 \cdot 10^3 =$ $= 40\,000$.

**1.6.*** Как найти наименьший общий знаменатель при сложении дробей $\frac{61}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^5} + \frac{5}{2 \cdot 3^9} + \frac{5}{2 \cdot 3^{12}}$?

*Ответ.* Наименьший общий знаменатель этих дробей равен наименьшему общему кратному чисел $2 \cdot 3^2$; $2 \cdot 3^5$; $2 \cdot 3^9$; $2 \cdot 3^{12}$, которое совпадает с $2 \cdot 3^{12}$.

**Указания к ответам на контрольные вопросы.**

**10.*** Как найти наименьший общий знаменатель нескольких дробей, знаменатели которых разложены на простые множители?

*Указание*. Следует обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что представление числа в виде произведения простых чисел удобно записывать в виде:

$$N = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k},$$

где $p_i$ простые числа и $p_i \neq p_j$, если $i \neq j$.

Такое представление считают *канонической формой* разложения на простые множители, которое соответствует следующей записи:

$$N = \underbrace{p_1 \cdots p_1}_{n_1 \text{ раз}} \cdot \underbrace{p_2 \cdots p_2}_{n_2 \text{ раз}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{p_k \cdots p_k}_{n_k \text{ раз}}.$$

Когда все знаменатели записаны в канонической форме, то наименьший общий знаменатель (наименьшее общее кратное всех знаменателей) можно получать записью разложения на простые множители по следующему правилу: для каждого простого числа, входящего в каноническое разложение какого-нибудь из знаменателей, выбирают показатель степени как наибольший из степеней этого простого числа по всем знаменателям. Конечно, это общее правило непростое, а поэтому рассматривать его рекомендуется только на третьем уровне.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.4.** Какие из указанных сумм равны некоторой дроби с нечетным знаменателем?

1) $\frac{23}{6} + \frac{17}{14}$; 2) $\frac{15}{28} + \frac{11}{8}$; 3) $\frac{9}{10} + \frac{37}{14}$; 4) $\frac{23}{17} + \frac{59}{68}$.

*Указание*. Те, в которых оба знаменателя делятся на 2, но ни один из них не делится на 4.

## § 2. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ДРОБИ

**Цель параграфа** — определить дроби любого знака и распространить на них операции сложения и вычитания.

**Особенности параграфа.** Дроби любого знака вводятся здесь не совсем традиционным способом: не как часть целого, а как решение уравнения $bx = a$ с любым целым $a$ и любым целым ненулевым $b$. Такой подход облегчает понимание правила знаков: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$, которое при традиционном способе изложения обычно не обосновывается с достаточной степенью строгости. С другой стороны, приводимое в учебнике определение дроби приводит к таким необычным терминам как «две минус пятых» или «минус семь минус девятых», вовсе отсутствующим при традиционном способе изложения.

Особое внимание следует уделить правилу знаков. На первом уровне желательно добиться четкого понимания правила знаков на конкретных примерах. На втором и третьем уровнях желательно рассмотреть обоснование этого правила в общем виде.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: положительные дроби; равенство дробей; правила сложения и вычитания дробей; правила умножения и деления дробей.

**Новые математические понятия:** дробь с числителем и знаменателем произвольных знаков; противоположные дроби; правило знаков для дробей; сумма и разность любых дробей; положительные и отрицательные дроби; модуль дробного числа.

**Вспомогательные понятия:** изображение любых дробей точками числовой прямой; расстояние между изображениями двух дробей на числовой прямой; изображение противоположных дробей симметричными точками числовой прямой.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Какому целому числу равняется дробь $\frac{0}{-8}$?

*Ответ.* Нулю, так как $(-8)\cdot 0=0$, а по определению дробь $\frac{0}{-8}$ равна решению уравнения $(-8)\cdot x=0$.

Есть и другие варианты ответа. Например: при делении нуля на любое ненулевое целое число снова получается нуль. Если деление $a:b$ без остатка возможно, то дробь $\frac{a}{b}$ равна целому частному $a:b$. В данном случае $\frac{0}{-8}=0:(-8)=0$.

**2.2.** Как записать число $-3$ в виде дроби, знаменатель которой равен $-1$?

*Ответ.* Пусть $-3=\frac{a}{-1}$. По определению дроби имеем $(-1)\cdot(-3)=a$, отсюда $a=3$, $-3=\frac{3}{-1}$.

**2.3.** Чему равняется сумма $(-6)+\frac{-2}{3}$?

*Ответ.* Запишем $-6$ в виде дроби $\frac{-6}{1}$. По определению суммы получим:

$$(-6) + \frac{-2}{3} = \frac{-6}{1} + \frac{-2}{3} = \frac{(-6)\cdot 3 + (-2)\cdot 1}{1\cdot 3} = \frac{-18-2}{3} = \frac{-20}{3}.$$

**2.4.** Как показать, что дроби $\frac{3}{-41}$ и $\frac{3}{41}$ противоположны?

*Ответ.* Надо сложить эти дроби и убедиться, что получится нуль. Имеем:

$$\frac{3}{-41} + \frac{3}{41} = \frac{3\cdot 41 + (-41)\cdot 3}{(-41)\cdot 41} = \frac{0}{(-41)\cdot 41} = 0.$$

**2.5.*** Какие дроби противоположны сами себе?

*Ответ.* Числитель этих дробей равен нулю. Проверить ответ можно по определению, складывая дробь вида $\frac{0}{b}$ с ней самой и убеждаясь, что получится нуль.

**2.6.** Какая дробь получится, если числитель и знаменатель дроби одновременно разделить на число $-1$?

*Ответ.* Дробь, равная рассматриваемой.

**2.7.** Какие дроби противоположны отрицательным дробям?

*Ответ.* Положительные. В самом деле, пусть дробь $\frac{a}{b}$ отрицательна. Значит, ее числитель и знаменатель имеют противоположные знаки. Изменим знак ее числителя. Получится дробь, противоположная исходной и имеющая в числителе и знаменателе числа одного знака, то есть положительная дробь.

**2.8.** Чему равно расстояние между точками, изображающими дроби $\frac{7}{4}$ и $\frac{-7}{4}$, если отрезок между изображениями чисел 0 и 1 имеет длину 2 см?

*Ответ.* Расстояние от каждой из этих точек до 0 равно $\frac{7}{4}\cdot 2 = \frac{7}{2}$ см, а расстояние между ними в два раза больше, то есть 7 см.

**2.9.** Какая дробь имеет модуль, равный нулю?

*Ответ.* Нулевая, то есть дробь с числителем, равным нулю.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**7.*** Для целого или дробного числа $a$ выразите через $a$ разность $a - |a|$ и сумму $a + |a|$.

*Указание.* Рассмотрим случаи $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$. Получим:

$$a - |a| = \begin{cases} 0, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ 2a, \text{ если } a < 0; \end{cases} \qquad a + |a| = \begin{cases} 2a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ 0, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.2.** Значения каких из указанных сумм противоположны сумме $\frac{-5}{6} + \frac{3}{-5}$?

1) $\frac{5}{-6} + \frac{-3}{5}$; 2) $\frac{-5}{-6} + \frac{-3}{-5}$; 3) $\frac{5}{6} + \frac{-3}{-5}$; 4) $\frac{5}{6} + \frac{-3}{5}$.

*Указание*. Должна получиться сумма чисел, противоположных слагаемым.

## § 3. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

**Цель параграфа** — ввести правило умножения любых дробей.

**Особенности параграфа.** При изучении умножения используются две аналогии: первая — с правилом умножения положительных дробей; вторая — с определением знаков при умножении целых чисел. Это позволяет осознанно воспринять как правило умножения любых дробей, так и правило знаков. За исключением понятия обратной дроби материал параграфа рассчитан для изучения на первом уровне, задачи и упражнения к параграфу достаточно стандартны.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагается известным: правило умножения положительных дробей.

**Новые математические понятия:** произведение произвольных дробей; правило знаков при умножении дробей; обратная дробь.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Какой знак имеет число $\left(-\frac{5}{7}\right)^{100}$?

*Ответ*. По правилу умножения произведение двух отрицательных чисел положительно. Данное число можно записать как произведение 50 пар отрицательных сомножителей. Каждая пара дает положительный результат, поэтому и все произведение положительно.

**3.2.*** Почему дробь $\frac{0}{b}$ не имеет обратной?

*Варианты ответа*. 1. Для дроби $\frac{0}{b}$ и любой дроби $\frac{m}{n}$ выполняется равенство $\frac{0}{b} \cdot \frac{m}{n} = 0$, что не равно 1. Поэтому никакая дробь не может быть обратной к дроби $\frac{0}{b}$.

2. Если поменять местами числитель и знаменатель данной дроби, то получится выражение $\frac{b}{0}$. Но по определению знаменатель всякой дроби должен быть отличен от нуля.

**3.3.** В пункте рассматривается задача: «Из наполненной до краев ванны объемом 200 литров вытекло $\frac{3}{5}$ воды. Сколько воды осталось?» *Вопрос*. Какую часть составляет оставшаяся вода от вытекшей воды?

*Ответ*. Это $\frac{80}{120}$ или $\frac{2}{3}$ от вытекшей воды.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.3.** Чему равно $\frac{7}{12}$ от 1 ч 36 мин?

1) 52 мин; 2) 56 мин; 3) 1 ч; 4) 1 ч 4 мин.

*Указание*. Можно сначала найти, что $\frac{1}{12}$ от указанного времени равна $\frac{60}{12} + \frac{36}{12} = 8$ (мин).

## § 4. ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

**Цель параграфа** — определить деление дробей как операцию, обратную к умножению; сформулировать и обосновать правило деления дроби на дробь; связать операцию деления с понятием обратной дроби; перечислить основные свойства частного; рассмотреть примеры конкретных задач, при решении которых применяется деление.

**Особенности параграфа.** До этого учащиеся знакомились с делением целых чисел и с делением положительной дроби на натуральное число. Поэтому в основном материал параграфа является достаточно новым. При его изучении важно обратить внимание на определение частного от деления дроби $\frac{c}{d}$ на дробь $\frac{a}{b}$, исходя из уравнения $\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d}$. Такое определение позволяет указать на аналогию с определением частного от деления одного целого числа на другое. Далее нужно пояснить, что, исходя из принятого определения частного, желательно получить достаточно простые и естественные правила вычисления частного, что и проделано в тексте параграфа.

После усвоения деления дробей следует продемонстрировать примеры задач, при решении которых необходимо использовать деление. В этой работе наиболее важно, чтобы учащиеся научились по части числа восстанавливать само число и аналогично по известному числу процентов от величины находить саму величину. В качестве вспомогательного материала в параграфе разбирается понятие «многоэтажной дроби». Делается это с той целью, чтобы учащиеся старались осмысленно подходить к записи арифметических и алгебраических выражений. На третьем уровне в порядке ознакомления приводится пример цепной дроби, которая также является «многоэтажным выражением».

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: деление нацело для целых чисел; деление положительных дробей.

**Новые математические понятия:** частное двух дробей; отношение двух дробей; правило деления дробей; свойство частного двух дробей.

**Понятия, упоминаемые в порядке ознакомления:** цепная дробь.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**4.1.** Как показать, что для любых натуральных чисел $n$ и $m$ выполняется равенство $1 : \frac{m}{n} = \frac{n}{m}$?

*Ответ.* Можно воспользоваться определением частного двух дробных чисел, записав предварительно единицу в виде дроби $\frac{1}{1}$. По правилу вычисления частного двух дробей получаем:

$1 : \frac{m}{n} = \frac{1}{1} : \frac{m}{n} = \frac{1 \cdot n}{1 \cdot m} = \frac{n}{m}$.

**4.2.*** Как можно решить уравнение $\frac{5}{x} = -\frac{7}{2}$?

*Ответ.* По определению операции деления произведение частного и делителя равно делимому, поэтому $5 = \left(-\frac{7}{2}\right)$. Корень этого уравнения находим по определению частного и получаем: $x = 5 : \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{10}{7} = -1\frac{3}{7}$.

**4.3.** Какую часть от числа $\frac{3}{7}$ составляет число $\frac{2}{5}$?

*Ответ.* Чтобы найти, какую часть составляет число $\frac{2}{5}$ от $\frac{3}{7}$, надо разделить $\frac{2}{5}$ на $\frac{3}{7}$. Получим: $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{14}{15}$.

**4.4.** Как определяется знак частного при делении одной дроби на другую?

*Ответ.* Правило знаков при делении дробей такое же, как и при делении целых чисел: частное двух дробей одного знака положительно, а частное двух дробей разного знака отрицательно.

**4.5.** Каким образом основные свойства частного позволяют свести операцию деления дроби на дробь к операции деления целого числа на целое число?

*Ответ.* Пусть надо разделить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{c}{d}$. Согласно основному свойству частного ответ не изменится, если делимое и делитель одновременно умножить на $bd$. В результате вместо деления дробей $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ придем к делению целых чисел: $\left(\frac{a}{b} \cdot bd\right) : \left(\frac{c}{d} \cdot bd\right) = (ad) : (bc)$.

**4.6.*** Сколько различных значений можно получить, по-разному расставляя скобки в записи $3^{3^3}$?

*Ответ.* Возможны значения: $(3^3)^3 = 27^3 = 3^9$; $3^{(3^3)} = 3^{27}$.

**4.7.**** Как представить дробь $\frac{19}{17}$ в виде цепной дроби?

*Ответ.* Запишем алгоритм Евклида для чисел 19 и 17:
$19 = 17 \cdot 1 + 2$, $17 = 2 \cdot 8 + 1$, $2 = 1 \cdot 2 + 0$.

Отсюда: $\frac{19}{17} = 1 + \frac{2}{17}$, $\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}$.

Поэтому: $\frac{19}{17} = 1 + \frac{2}{17} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{17}{2}} = 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2}}$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**7.** Скорость теплохода по течению реки $13\frac{1}{3}$ м/с, а против течения $12\frac{2}{9}$ м/с. Во сколько раз скорость теплохода больше скорости реки?

*Указание.* Пусть $u$ м/с — скорость теплохода, $v$ м/с — скорость течения реки. Тогда $u + v = 13\frac{1}{3}$, $u - v = 12\frac{2}{9}$. После этого нужно найти $u$, $v$ и вычислить отношение $\frac{u}{v}$.

**11.** Туристы прошли 60% маршрута, и им осталось пройти еще 10 км. Какова длина маршрута?

*Указание.* 10 км — это 40% от всего пути.

**15.**** Решите уравнение $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{53}{57}$.

*Указание*. Последовательное выполнение преобразований в левой части приводит к следующему выражению:

$$1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}=1+\frac{1}{2+\dfrac{x}{3x+1}}=\frac{3x+1}{7x+2}.$$

После этого остается решить уравнение $\dfrac{3x+1}{7x+2}=\dfrac{53}{57}-1$ и проверить, что при найденном значении $x$ выражения $3+\dfrac{1}{x}$ и $2+\dfrac{x}{3x+1}$ не равны нулю.

В том случае, когда корень аналогичного уравнения является натуральным числом, возможен другой способ решения, основанный на представлении правой части в виде цепной дроби. Однако в данной задаче такой способ не подходит.

## Указания по работе с наиболее трудными тестами.

**1.1.** Какую часть составляет $1\dfrac{8}{9}$ от $4\dfrac{1}{4}$?

1) $\dfrac{2}{9}$; 2) $\dfrac{4}{9}$; 3) $\dfrac{6}{9}$; 4) $\dfrac{8}{9}$.

*Указание*. Нужно привести к обыкновенным дробям и затем выполнить деление.

**2.4.** Какие из указанных отношений равны $\dfrac{2}{3}$?

1) $3\dfrac{2}{9}:5\dfrac{1}{2}$; 2) $1\dfrac{4}{15}:2\dfrac{3}{8}$; 3) $1\dfrac{4}{9}:2\dfrac{1}{6}$; 4) $2\dfrac{8}{15}:4\dfrac{4}{5}$.

*Указание*. Все смешанные дроби представить в виде обыкновенных и выполнить деление.

# Глава 11
# СВОЙСТВА ДРОБЕЙ

**Цель главы** — на основе целых чисел, положительных и отрицательных дробей завершить построение алгебраически замкнутой числовой системы, в которой выполнимы операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевые числа; на основе целых чисел и дробей ввести понятие координат точек на числовой прямой; сформулировать в общем виде основные свойства арифметических операций и отношения порядка.

**Особенности главы.** Глава начинается с рассмотрения нового материала о координатах точек на числовой прямой. Учитывая важность этого понятия для всего последующего изучения курса математики, следует выработать у учащихся устойчивые навыки изображения точек с заданной координатой и приближенного нахождения координат заданных точек. Также очень важно, чтобы учащиеся поняли универсальность формулы для вычисления расстояния между точками по их координатам. Универсальность этой формулы состоит в том, что она заменяет много разных возможных случаев при наглядном подходе к вычислению расстояния. Второй и третий параграфы главы можно считать завершающими в систематическом изучении арифметических операций и отношения порядка для целых и дробных чисел. В этих параграфах формулируются основные свойства, на которые в дальнейшем опираются эквивалентные преобразования числовых и буквенных выражений, решение линейных и квадратных уравнений и неравенств. Поэтому при изучении данного материала целесообразно обратить внимание именно на тот факт, что применение каждого арифметического правила изменяет внешнюю запись выражения, но сохраняет его значение, а применение правил, связанных неравенствами, позволяет от верного неравенства перейти также к верному неравенству.

## § 1. КООРДИНАТЫ ТОЧЕК НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

**Цель параграфа** — для точек, изображающих дроби, ввести понятие координат на числовой прямой, начать работу по применению координатного метода к решению задач на вычисление расстояния между точками и нахождение координаты середины отрезка.

**Особенности параграфа.** В параграфе определяется понятие координаты точки на числовой прямой и вводится соответствующее обозначение. На первом уровне без доказательства приводится формула, выражающая расстояние между точками через их координаты. На втором уровне эта формула доказывается. При этом демонстрируется один из важных методов доказательства, состоящий в переборе всех логически возможных случаев. Также на втором уровне вычислениями проверяется известная формула для координат середины отрезка. На третьем уровне приводится полноценный вывод формулы для координаты середины отрезка, в связи с чем разбирается решение уравнения вида $|a - x| = |x - b|$.

Весь материал параграфа новый для учащихся, а поэтому на всех уровнях следует обратить внимание на решение соответствующих задач и упражнений, а в случае ошибочности решений проанализировать причины, по которым получен неверный результат.

На первом уровне основное внимание следует сосредоточить на применении формул расстояния между точками и координат середины отрезка, что тоже требует определенных усилий ввиду возможности разных комбинаций знаков координат точек. На третьем уровне обращается внимание на способы вывода основных формул.

**Предварительные знания, умения и навыки:** дробные числа; модуль числа; числовая прямая; сложение и вычитание дробей.

**Новые математические понятия:** координата точки; обозначение $A(a)$ для точки с координатой $a$.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Какие дроби вы можете изобразить на числовой прямой между точками $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{5}$?

*Варианты ответа.* 1. Середина отрезка $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{20+21}{35}\right)=$ $=\frac{41}{70}$. 2. Середина отрезка с концами $\frac{4}{7}$ и $\frac{41}{70}$ : $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}+\frac{41}{70}\right)=\frac{81}{140}$. 3. Так как $\frac{4}{7}\approx 0{,}571$ с недостатком, а $\frac{3}{5}=0{,}6$, то можно указать также, например, точки 0,58 и 0,59.

**1.2.** Как показать, что точка $A\left(\frac{41}{70}\right)$ является серединой отрезка с концами $B\left(\frac{4}{7}\right)$ и $C\left(\frac{3}{5}\right)$?

*Ответ.* Вычислим: $|BA| = \left|\frac{41}{70} - \frac{4}{7}\right| = \frac{1}{70}$; $|AC| = \left|\frac{41}{70} - \frac{3}{5}\right| = \left|-\frac{1}{70}\right| = \frac{1}{70}$. Так как $|AB| = |AC|$, то точка $A$ — середина отрезка $BC$.

**1.3.** Как показать, что формула $|AB| = |a - b|$ верна, когда числа $a$ и $b$ оба отрицательны?

*Вариант ответа.* Точки $C(-a)$ и $D(-b)$ симметричны точкам $A(a)$ и $B(b)$ относительно начала координат, поэтому $|AB| = |CD|$. Так как $-a > 0$, $-b > 0$, то $|AB| = |CD| = |(-a) - (-b)| = |b - a| = |a - b|$.

**1.4.** Какие точки числовой прямой находятся на расстоянии 2,9 от точки $A(1)$?

*Ответ.* Таких точек две: $B(-1{,}9)$ и $C$ $(3{,}9)$.

**1.5.**** Как показать, что на числовой прямой между любыми двумя разными дробными числами можно найти отличное от них дробное число?

*Ответ.* Координата середины отрезка с концами в данных точках получается из координат концов с помощью операций сложения и деления на 2, а поэтому является дробным числом, изображение которого и лежит между данными дробными числами.

**1.6.**** При каких значениях $x$ выполняется равенство $|x| = -x$?

*Ответ.* Так как $|x| = \begin{cases} x \text{ при } x > 0 \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$ то уравнению удовлетворяют $x < 0$ и $x = 0$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**5.**** Вдоль числовой прямой с единичным отрезком в 1 см из точки $A(5)$ со скоростью 3 см/с ползет муравей. В какие точки может попасть муравей через: а) 2 с; б) 15 с; в) 1 ч?

*Указание.* а) За 2 с муравей может отползти от заданной точки не более чем на 6 см, причем на 6 см только в том случае, если он будет ползти в одном направлении. Откладывая от точки $A(5)$ в двух направлениях расстояния по 6 см, получим точки $M(-1)$ и $N(11)$. Эти точки служат границами отрезка, в точки которого может попасть муравей через 2 с.

В остальных пунктах задачи рассуждения аналогичны.

**7.**** Вдоль числовой прямой с единичным отрезком в 1 см из точки $A(6)$ в направлении к точке $B(-5)$ начинает ползти муравей. Одновременно из точки $B$ в направлении к точке $A$ начинает ползти другой муравей, но в два раза медленнее первого. В какой точке встретятся муравьи?

*Указание*. Обозначим через $t$ неизвестную координату точки $C$ встречи. Тогда $-5 < t < 6$ и $|AC| = 2|BC|$, откуда $|t - 6| = 2|t + 5|$. Так как $t - 6 < 0$, $t + 5 > 0$, то полученное уравнение можно записать в виде $6 - t = 2(t + 5)$, откуда $t = -\frac{4}{3}$.

**10.**** На числовой прямой выбраны точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ так, что $|AB| = |CD|$. Докажите, что если $|AC|$ не равно $|BD|$, то $|AD| = |BC|$.

*Указание*. По условию для чисел $a$, $b$, $c$, $d$ выполняется равенство $|a - b| = |c - d|$. Это возможно в двух случаях: $a - b = c - d$ или $a - b = d - c$. Если $a - b = c - d$, то $a - c = b - d$, $|a - c| = |b - d|$, откуда $|AC| = |BD|$, что противоречит условию. Остается случай $a - b = d - c$. Но тогда $a - d = b - c$ и $|AD| = |BC|$.

**11.**** На числовой прямой выбраны точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ так, что середины отрезков $AC$ и $BD$ совпадают. Докажите, что тогда $|AB| = |CD|$ и $|AD| = |BC|$.

*Указание*. По условию для чисел $a$, $b$, $c$, $d$ выполняется равенство $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$, откуда $a - b = d - c$, $a - d = b - c$. Но тогда $|AB| = |a - b| = |d - c| = |CD|$, $|AD| = |a - d| + |b - c| = |BC|$.

**Указание по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.1.** Какие из указанных точек находятся на расстоянии 1 от точки $A\left(\frac{4}{9}\right)$?

1) $M\left(-\frac{5}{9}\right)$; 2) $N\left(\frac{5}{9}\right)$; 3) $K\left(\frac{13}{9}\right)$; 4) $L\left(\frac{17}{9}\right)$.

*Указание*. Координаты искомых точек равны $\frac{5}{9} + 1$ и $\frac{4}{9} - 1$.

**2.3.** Какие из указанных точек находятся на расстоянии $\frac{2}{3}$ от точки $A\left(1\frac{1}{5}\right)$?

1) $M\left(\frac{8}{15}\right)$; 2) $N\left(\frac{14}{15}\right)$; 3) $K\left(\frac{28}{15}\right)$; 4) $L\left(\frac{32}{15}\right)$.

*Указание*. Координаты искомых точек равны $1\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$ и $1\frac{1}{5} - \frac{2}{3}$.

## § 2. СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

**Цель параграфа** — повторить и закрепить материал о сравнении положительных дробей, научиться сравнивать дроби любого знака.

**Особенности параграфа.** В начале параграфа формулируется занимательная задача, к решению которой приближает изучение нескольких последующих пунктов. Сначала напоминается сравнение дробей с натуральными числителями и знаменателями. Затем рассматривается общее правило сравнения дробей, включая и условие равенства. Далее доказывается критерий сравнения дробей через знак их разности, с использованием которого выводится свойство транзитивности. Изучение свойства неравенств иллюстрируются на числовой прямой.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: обыкновенные и десятичные дроби; сравнение положительных дробей; приведение дробей к общему знаменателю; сложение и вычитание дробей.

**Новые математические понятия:** правило сравнения дробей любого знака; транзитивность.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** По чьему совету — Муравья или Стрекозы — Ворона получит больше сыра?

*Ответ.* Нужно делить, как предложил Муравей. Важно выслушать не только сами ответы учеников, но и аргументацию. Полный ответ на этот вопрос приведен в пункте 2.5.

**2.2.** Как вы понимаете смысл выражения «положительная дробь $\frac{p}{q}$ меньше положительной дроби $\frac{r}{q}$»?

*Вариант ответа.* В первой дроби $p$ раз берется $\frac{1}{q}$ часть от 1, во второй дроби берется $r$ таких же частей. Дробь $\frac{p}{q}$ меньше дроби $\frac{r}{q}$, если $p$ меньше $r$.

**2.3.** Как объяснить, что если $\frac{p}{n} > \frac{q}{n}$ и $\frac{q}{n} > \frac{r}{n}$, то $\frac{p}{n} > \frac{r}{n}$?

*Ответ.* Так как $\frac{p}{n} > \frac{q}{n}$ и $\frac{q}{n} > \frac{r}{n}$, то $p > q$, $q > r$. Поэтому $p > r$, а значит, $\frac{q}{n} > \frac{r}{n}$.

**2.4.** Как сравнить дробь с нулем?

*Вариант ответа.* Если дробь положительна, то она больше нуля; если же дробь отрицательна, то она меньше нуля.

**2.5.** Нужно ли для сравнения двух дробей разного знака приводить их к общему знаменателю?

*Ответ.* Необязательно. Действительно, положительная дробь больше нуля, а отрицательная дробь меньше нуля. Поэтому положительная дробь всегда больше отрицательной.

Этот ответ подразумевает в неявном виде использование транзитивности отношения порядка для дробей.

**2.6.** Пусть дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равны. Равны ли дроби $\frac{q}{n}$ и $\frac{m}{p}$?

*Ответ.* Вообще говоря, не равны, в чем можно убедиться на примерах. Иногда могут быть и равными, например, если все рассматриваемые целые числа равны между собой.

Заметим, что по формулировке вопроса предполагается, что $n$, $q$ ненулевые числа.

**2.7.**** В пункте рассматривается правило сравнения двух дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ через сравнение произведений $pn$ и $qm$. *Вопрос.* Можно ли пользоваться правилом сравнения из этого пункта для дробей с отрицательными знаменателями?

*Ответ.* В этом случае также можно использовать приведенное правило. Действительно, пусть нужно сравнить дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$, причем известно, что $q$ и $n$ отрицательны. Но тогда произведение $qn$ положительно, а поэтому в результате приведения дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ к общему знаменателю $qn$ получаются дроби $\frac{pn}{qn}$ и $\frac{mq}{qn}$ с положительным знаменателем.

Важно обратить внимание учащихся на то, что приведенное правило сравнения становится неверным, когда дроби имеют знаменатели разных знаков.

**2.8.** Какое из чисел, $100\frac{100}{101}$ и $100\frac{101}{102}$, больше, если известно, что $\frac{100}{101} < \frac{101}{102}$?

*Ответ.* Из неравенства $\frac{100}{101} < \frac{101}{102}$ следует неравенство $100 + \frac{100}{101} < 100 + \frac{101}{102}$. Поэтому больше второе число.

**2.9.**** Какое из чисел, $a$ и $b$, больше, если $a - b < 0$?

*Ответ.* Если $a - b < 0$, то $(a - b) + b < 0 + b$, откуда $a < b$.

**2.10.** Как показать, что найдется число, которое больше 0,3333, но меньше $\frac{1}{3}$?

*Ответ.* Вычислим разность $\frac{1}{3} - 0{,}3333 = \frac{1}{3} - \frac{3333}{10\,000} = \frac{10\,000 - 9999}{30\,000} = \frac{1}{30\,000}$. Так как разность положительна, то, прибавляя к числу 0,3333 любое число, которое меньше $\frac{1}{30\,000}$, мы получим число, большее 0,3333 и меньшее $\frac{1}{3}$.

**2.11.** Сколько целых чисел $x$ удовлетворяет неравенству $-\frac{1}{2} < x < 4\frac{1}{2}$?

*Ответ.* 5. Эти числа нетрудно перечислить: 0; 1; 2; 3; 4.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**7.** Поставьте вместо звездочки какую-либо цифру, чтобы получилось верное неравенство:

а) $3\frac{*5}{100} < 3\frac{16}{100}$; б) $-*2\frac{4}{10} > -22\frac{4}{10}$; в) $1\frac{*7}{35} < \frac{27}{35}$ ;

г) $-\frac{5}{21} < -\frac{5}{2*}$; д) $-\frac{6}{21} > -\frac{6}{2*}$; е) $-\frac{51}{100} < -\frac{5}{1*}$.

*Указание.* а) Задачу можно решить частичным перебором цифр: цифра 0 не подходит по смыслу примера, цифра 1 подходит, цифра 2 и больше ее цифры уже не подходят.

Остальные примеры из этой задачи решаются аналогично.

**12.** Пусть $x > 3$. Можно ли утверждать, что

а) $x - 3 > 0$; б) $x - 4 > 0$; в) $2 - x < 0$; г) $5 - x < 0$?

*Указание.* а) Неравенство $x > 3$ равносильно неравенству $x - 3 > 0$; б) важно понять, что из неравенства $x > 3$ не обязательно следует неравенство $x > 4$; например, при $x = 4$ неравенство $x > 4$ неверно, а поэтому неверно и неравенство $x - 4 > 0$; в) из неравенства $x > 3$ следует неравенство $x > 2$, поэтому $2 - x < 0$; г) из неравенства $x > 3$ не следует неравенство $x > 5$, а поэтому $5 - x$ может быть и положительным, например при $x = 4$.

**17.**** Пусть $a > b$. Сравните числа:

а) $a - b$ и 0; б) $b - a$ и 0; в) $-a$ и $-b$;

г) $a + 1$ и $b + 1$; д) $a - 2$ и $b - 2$; е) $3 - a$ и $3 - b$.

*Указание.* в) Если $a > b$, то $(-1) \cdot a < (-1) \cdot b$; е) если $a > b$, то $-a < -b$, откуда $3 - a < 3 - b$.

**18.**** Пусть $a > b$ и $b > c$. Сравните числа:

а) $-a$ и $-c$; б) $a - b$ и $a - c$;

в) $b - c$ и $b - a$; г) $c - b$ и $c - a$.

*Указание.* а) Из неравенств $a > b$, $b > c$ следует неравенство $a > c$, а поэтому $-a < -c$; б) из неравенства $b > c$ следует неравенство $-b < -c$, а поэтому $a - b < a - c$; в) $b - c > 0$, $b - a < 0$, поэтому $b - c > b - a$; г) из неравенства $a > b$ следует неравенство $-a < -b$, а поэтому $c - a < c - b$.

**19.** Какой знак имеют числа $x$ и $y$, если

а) $x > y$ и $y > 2$; б) $x < y$ и $y < -2$;

в)* $x + 1 > y$ и $y > 1$; г)* $x - 1 < y$ и $y < -1$?

*Указание*. а) Оба положительны; б) оба отрицательны; в)* так как $x > y - 1$ и $y - 1 > 0$, то $x > 0$; г) * так как $x < y + 1$ и $y + 1 < 0$, то $x < 0$.

**26.** Как показать, что если:

а) $a < 2\frac{3}{10}$ и $b > 2\frac{2}{5}$, то $a$ лежит левее $b$;

б) $a > -7\frac{1}{5}$ и $b < -7\frac{11}{50}$, то $a$ лежит правее $b$?

*Указание*. а) Заметить, что $2\frac{3}{10} < 2\frac{2}{5}$; б) заметить, что $-7\frac{1}{5} > -7\frac{11}{50}$.

**Указание по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.1.** Какое из чисел $\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}$ является наибольшим?

1) $\frac{6}{5}$; 2) $\frac{7}{6}$; 3) $\frac{8}{7}$; 4) $\frac{9}{8}$.

*Указание*. $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$; $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$; $\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7}$; $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$.

**1.2.** Какое из чисел $-\frac{13}{7}, -\frac{15}{8}, -\frac{17}{9}, -\frac{19}{10}$ является наименьшим?

1) $-\frac{13}{7}$; 2) $-\frac{15}{8}$; 3) $-\frac{17}{9}$; 4) $-\frac{19}{10}$.

*Указание*. $-\frac{13}{7} = -2 + \frac{1}{7}$; $-\frac{15}{8} = -2 + \frac{1}{8}$; $-\frac{17}{9} = -2 + \frac{1}{9}$; $-\frac{19}{10} = -2 + \frac{1}{10}$.

**1.3.** Модуль какого из чисел $1\frac{5}{9}, -1\frac{4}{7}, 1\frac{4}{11}, -1\frac{8}{17}$ является наибольшим?

1) $1\frac{5}{9}$; 2) $-1\frac{4}{7}$; 3) $1\frac{4}{11}$; 4) $-1\frac{8}{17}$.

*Указание*. Для выбора ответа достаточно сравнить $1\frac{5}{9}$ и $1\frac{4}{7}$, так как модули остальных чисел точно меньше.

**1.4.** Модуль какого из чисел $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, -\frac{7}{43}$ является наименьшим?

1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{7}{43}$.

*Указание*. Для выбора ответа достаточно сравнить $\frac{1}{6}$ и $\frac{7}{43}$, так как модули остальных чисел точно больше.

**2.3.** Какие из указанных дробей больше $\frac{5}{7}$?

1) $\frac{15}{22}$;   2) $\frac{25}{34}$ ;   3) $\frac{30}{41}$;   4) $\frac{40}{57}$.

*Указание.* Сравнивать дроби через разности и при вычислениях выносить множитель 5 за скобки.

## § 3. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД ДРОБЯМИ

**Цель параграфа** — распространить на множество дробных чисел свойства арифметических операций, которые рассматривались для целых чисел.

**Особенности параграфа.** На первом и втором уровнях необходимо напомнить и повторить изучавшиеся ранее основные свойства сложения и умножения. В дополнение к этому в параграфе устанавливаются важные свойства прибавления к обеим частям равенства одного и того же числа и умножения обеих частей равенства на одно и то же число. В конце параграфа в самом общем виде формулируется основное свойство частного. При изучении этого материала учащиеся должны осознать, что при преобразовании числовых и буквенных выражений каждый очередной знак равенства появляется только на основании какого-то правила. Если на это систематически обращать внимание, то в последующем можно значительно сократить количество ошибок, связанных с искажением правил. Известно, что иногда можно встретить такого рода искажения (особенно в старших классах): корень из суммы дробей заменяется на сумму корней из этих чисел; логарифм суммы чисел заменяется на произведение логарифмов этих чисел; и т.д. На третьем уровне в систематизированном виде перечисляются основные свойства операций сложения и умножения на множестве дробных чисел с использованием современных математических терминов.

Параграф имеет теоретическую направленность, а поэтому предлагаемые задачи и упражнения в основном несложные.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Свойства арифметических операций над целыми числами.

**Новые математические понятия:** коммутативность; ассоциативность; дистрибутивность.

**Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления:** нейтральный элемент.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Как объяснить, что $\left(\frac{2}{5}+\frac{-3}{7}\right)+\frac{-2}{5}=\frac{-3}{7}$?

*Ответ.* По переместительному и сочетательному законам и свойству нуля имеем: $\left(\frac{2}{5} + \frac{-3}{7}\right) + \frac{-2}{5} = \left(\frac{2}{5} + \frac{-2}{5}\right) + \frac{-3}{7} = 0 + \frac{-3}{7} = \frac{-3}{7}$.

**3.2.** Как показать, что $0 + a = a$?

*Ответ.* $0 + a = a + 0 = a$.

**3.3.**** Как показать, что если $a + x = 0$, то и $x + a = 0$?

*Ответ.* Используя переместительный закон и основные свойства равенства, имеем:

$$x + a = a + x = 0, \text{ откуда } x + a = 0.$$

**3.4.** Как объяснить, что для любой ненулевой дроби $\frac{a}{b}$ выполняется равенство $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$?

*Ответ.* $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a^2 \cdot b}{b^2 \cdot a} = \frac{(ab) \cdot a}{(ab) \cdot b} = \frac{a}{b}$.

**3.5.** Почему для числа 0 не существует обратного?

*Ответ.* Если предположить, что число $x$ обратно к нулю, то должно выполняться равенство $0 \cdot x = 1$. Но $0 \cdot x = 0$ для любого дробного числа $x$. Так как $0 - 1$, то приходим к противоречию. Следовательно, предположение о существовании числа, обратного к нулю, было неверным, то есть для числа 0 не существует обратного.

**3.6.**** Как находить число, обратное к произведению нескольких ненулевых чисел?

*Ответ.* Перемножить числа, обратные каждому из сомножителей данного произведения.

**3.7.** Какие свойства дробей позволяют записать равенство $\left(-1\frac{2}{3}\right) - \left(-5\frac{1}{3}\right) = (5 - 1) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$?

*Ответ.* Распределительное свойство умножения на (–1) при раскрытии скобок, переместительное и сочетательное свойства сложения.

**3.8.** Как решить уравнение $\frac{2}{3} - x = \frac{1}{10}$ ?

*Ответ.* Прибавим переменную $x$ к обеим частям уравнения: $\frac{2}{3} - x + x = \frac{1}{10} + x$. Приведем подобные: $\frac{1}{10} + x = \frac{2}{3}$. Вычтем $\frac{1}{10}$ из обеих частей уравнения: $x + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{3} - \frac{1}{10}$; $\frac{2}{3} - \frac{1}{10} = \frac{20 - 3}{30} = \frac{17}{30}$, $x = \frac{17}{30}$. В итоге найдено значение корня.

**3.9.** Как решить уравнение $-\frac{5}{2}x = \frac{7}{16}$?

*Ответ.* Домножив обе части уравнения на $\left(-\frac{2}{5}\right)$, получаем $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}x\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{7}{16}$, откуда $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}\right) \cdot x = -\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 16}$, $x = -\frac{7}{40}$.

**3.10.** Сколько решений имеет уравнение $x + 2 = x + 3$?

*Ответ.* Это уравнение решений не имеет.

**3.11.** Почему сокращение дроби можно считать применением обобщенного свойства частного?

*Ответ.* Сокращение числителя и знаменателя дроби на $m$ соответствует умножению числителя и знаменателя на число $x = \frac{1}{m}$.

**3.12.**** Как записать основные законы сложения и умножения дробных чисел в буквенной форме?

*Ответ.*

$$a + b = b + a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)\ ,$$
$$a + 0 = a,$$
$$a + (-a) = 0,$$
$$ab = ba,$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$a \cdot 1 = a,$$
$$a \cdot a^{-1} = 1,$$
$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.*** Представьте число 100 в виде суммы двух слагаемых, отношение которых равно: а) 4 : 1; б) 8 : 32; в) 37 : 13; г) 29 : 71.

*Указание.* Все примеры можно решить одним способом, который разберем на примере из пункта в). Запишем первое число в виде $37x$, где $x$ — неизвестное. Тогда второе число равно $13x$ и по условию $37x + 13x = 100$. Решая уравнение, находим $x = 2$. Поэтому первое число 74, а второе 26.

**7. й)**** Решите уравнение: $\frac{3}{22} : \left(\frac{5}{x}\right) = \frac{8}{21}$.

*Указание.* Так как $\frac{3}{22} : \left(\frac{5}{x}\right) = \frac{3 \cdot x}{22 \cdot 5}$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3}{22 \cdot 5} \cdot x = \frac{8}{21}$.

**9.** Одного человека спросили: «Сколько вам лет?» Он ответил: «Когда я проживу еще половину, да треть, да четверть моих теперешних лет, тогда мне будет сто лет». Сколько лет этому человеку?

*Указание*. Пусть $x$ лет — возраст человека. Тогда по условию $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 100$, откуда $x = 48$.

**15.** Шнурок длиной в 110 см разрезан на 5 частей таким образом, что вторая часть на 2 см больше, третья часть — на 2 см меньше, четвертая — в 2 раза больше, пятая — в 2 раза меньше, чем первая. Какова длина первой части?

*Указание*. Если длину первой части обозначить через $x$ (см), то из условия можно составить уравнение: $x + (x + 2) + (x - 2) + 2x + \frac{1}{2}x = 110$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.2.** Значение каких из указанных выражений равны произведению $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$?

1) $\left(-\frac{7}{12} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{9} - \frac{31}{39}\right) \cdot \frac{3}{7}$;

3) $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{20}\right) \cdot \frac{3}{7}$; 4) $-\left(\frac{2}{7} - \frac{29}{28}\right) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)$.

*Указание*. Варианты 1), 3) сразу отпадают из-за несоответствия знаков.

**2.4.** Какие из указанных значений $x$ являются решением уравнения $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$?

1) $\frac{4}{30}$; 2) $-\frac{12}{90}$; 3) $\frac{18}{135}$; 4) $-\frac{8}{60}$.

*Указание*. Не решая уравнение, можно установить, что $x < 0$.

# Глава 12
# КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ

**Цель главы** — начать изучение прямоугольной системы координат на плоскости.

**Особенности главы.** В главе осуществляется переход от предшествующих наглядных представлений о системах координат к описанию декартовой прямоугольной системы на плоскости. Помимо определения осей координат, абсциссы, ординаты и координатных четвертей в главе приводятся и некоторые простейшие применения метода координат: вычисление расстояния между точками; нахождение точек, симметричных относительно координатных осей; вывод уравнения окружности. Тем самым устанавливается связь между алгеброй и геометрией, демонстрируется единство математических дисциплин.

## § 1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

**Цель параграфа** — ввести декартову прямоугольную систему координат и соответствующую терминологию.

**Особенности параграфа.** Благодаря наличию дробных чисел и их представлению на числовой прямой появляется возможность перейти от сложившихся ранее наглядных представлений к более строгим определениям. Учитывая важность вводимых понятий для всего школьного курса математики, следует от всех учащихся добиваться хорошего усвоения данного материала. Не случайно в этом параграфе довольно много упражнений.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: числовая прямая; координата точки на прямой; свойства перпендикуляра.

**Новые математические понятия:** оси координат; начало координат; координаты точки на плоскости; абсцисса, ордината; координатная плоскость.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Всегда ли четырехугольник с двумя прямыми углами является прямоугольником?

*Ответ.* Не всегда. Нетрудно изобразить, например, четырехугольник с углами 45°, 135°, 90° и 90°.

**1.2.** Как обозначить координатную плоскость, если $Nt$ — ось абсцисс, $Ns$ — ось ординат, а $N$ — начало системы координат?

*Ответ.* Нужно обозначить через $tNs$.

**1.3.** Где расположены точки, у которых абсцисса отрицательна, а ордината равна нулю?

*Ответ.* Пусть система координат выбрана так, как указано в пунктах 1.2 и 1.3. Тогда эти точки составляют часть оси абсцисс, расположенную слева от оси ординат.

**1.4.** Как показать, что существует только одна точка $N$ $(5; -6)$?

*Ответ.* Для получения координат точки проводятся перпендикуляры к осям координат. Как следует из построения, точка $N$ лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к оси абсцисс через точку $A$ с координатой 5 и оси ординат через точку $B$ с координатой $-6$. Через заданную точку можно провести к прямой всего один перпендикуляр, и эти прямые, перпендикулярные к осям координат, могут пересечься в единственной точке. Следовательно, точка $N$ определяется своими координатами однозначно.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**18.*** Через точки $A(2;0)$ и $B(2;4)$ проведена прямая. Укажите координаты точек $C$ и $D$ этой прямой, если известно, что ордината точки $C$ равна 1, а ордината точки $D$ равна 2.

*Указание.* Все точки прямой $AB$ имеют абсциссы, равные 2.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** В каких случаях отрезок с концами $A$ и $B$ пересекает ось абсцисс?

1) $A(4; 2)$, $B(3; -7)$; 2) $A(9; -5)$, $B(-8; 3)$;

3) $A(-5; -1)$, $B(3; -9)$; 4) $A(-1; 6)$, $B(4; 2)$.

*Указание.* Ординаты концов отрезка должны быть разного знака.

**2.4.** В каких случаях отрезок с концами $A$ и $B$ пересекает ось абсцисс?

1) $A(-6; 1)$, $B(-2; -5)$; 2) $A(8; 3)$, $B(4; -2)$;

3) $A(2; 3)$, $B(-5; -1)$; 4) $A(-2; 3)$, $B(1; 5)$.

*Указание.* Ординаты концов отрезка должны быть разного знака.

## § 2. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

**Цель параграфа** — ввести понятие координатных четвертей, установить связи между координатами точек, симметричных относительно оси абсцисс или относительно оси ординат.

**Особенности параграфа.** В параграфе обращается внимание на связь между знаками координат точек и расположением точек на плоскости, в связи с чем определяются координатные четверти. Нетрудно понять, что при симметрии относительно осей каждая координатная четверть переходит в какую-то другую координатную четверть и при этом изменяется знак соответствующей координаты. Такое наблюдение позволяет сделать естественным переход к изучению связи между координатами точек, симметричных относительно оси $Ox$ или оси $Oy$. Эти связи устанавливаются на конкретных примерах, а затем формулируются в виде правил. Основной материал параграфа предназначен для изучения на первом и втором уровнях. На третьем уровне дополнительно предлагаются несколько задач, в которых осуществляется предварительное знакомство с симметриями относительно биссектрис координатных углов и с центральной симметрией относительно начала координат.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: система координат; осевая симметрия.

**Новые математические понятия:** координатные четверти; преобразования координат точки при симметрии относительно координатных осей.

**Вспомогательные понятия:** центральная симметрия.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** Каким свойством обладают координаты точек, расположенных на осях системы координат?

*Ответ.* Их координаты имеют вид $A(a;0)$ на оси $Ox$ и $B(0;\ b)$ — на оси $Oy$.

**2.2.** Какая точка симметрична точке $M(-1;\ -2)$ относительно оси ординат?

*Ответ.* Точка $M_1(1;\ -2)$.

**2.3.** Обладают ли точки, расположенные на биссектрисах углов второй и четвертой четвертей, тем свойством, что абсцисса каждой такой точки противоположна ее ординате?

*Ответ.* Да, обладают, потому что абсциссы и ординаты таких точек равны по модулю и противоположны по знаку.

**2.4.**** Какому уравнению удовлетворяют точки, принадлежащие прямой, образованной биссектрисами углов второй и четвертой четвертей координатной плоскости?

*Ответ.* Эти точки составляют прямую, которая имеет уравнение $y = -x$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.** Пусть точка $A$ лежит в первой четверти, а точка $B$ — во второй четверти. Покажите, что отрезок $AB$ пересекает ось $Oy$.

*Указание.* Ось $Oy$ делит плоскость на две полуплоскости, причем в одной полуплоскости абсциссы точек положительны, а в другой — отрицательны. Поэтому точки $A$ и $B$ лежат в разных полуплоскостях относительно оси $Oy$, откуда следует, что отрезок $AB$ пересекается с осью $Oy$.

**5.*** Через точки $A(2; 0)$, $B(2; 4)$ проведена прямая. Через какие четверти координатной плоскости проходит эта прямая?

*Указание.* Сделать чертеж. Прямая перпендикулярна оси абсцисс. Поэтому абсциссы точек этой прямой равны 2 и прямая проходит через первую и четвертую четверти.

**6.*** Через точки $A(0; 1)$, $B(2; 1)$ проведена прямая. Через какие четверти координатной плоскости пройдет эта прямая?

*Указание.* Сделать чертеж. Прямая перпендикулярна оси ординат. Поэтому ординаты точек этой прямой равны 1 и прямая проходит через первую и вторую четверти.

**7.*** Через точки $A(0; 1)$, $B(1; 2)$ проведена прямая. Через какие четверти координатной плоскости пройдет эта прямая?

*Указание.* Сделать чертеж. Прямая проходит через первую, вторую и третью четверти.

**10.*** Через точки $A(0; 0)$, $B(1; 1)$ проведена прямая. Найдите координаты точек, симметричных точкам $A$ и $B$ относительно оси $Ox$. Проведите через полученные точки прямую и покажите, что эта прямая симметрична прямой $AB$ относительно оси $Ox$.

*Указание.* Для доказательства можно воспользоваться известным свойством осевой симметрии: при симметрии относительно прямой прямая переходит в прямую.

**13.** Что можно сказать о координатах точки $A$, симметричной самой себе относительно: а) оси $Ox$; б) оси $Oy$?

*Указание.* а) В этом случае точка $A$ лежит на оси $Ox$, а поэтому ее ордината равна нулю; б) в этом случае точка $A$ лежит на оси $Oy$, а поэтому ее абсцисса равна нулю.

**14.** Найдите координаты вершин $B$, $C$, $D$ прямоугольника $ABCD$, симметричного относительно осей координат, если известно, что точка $A$ имеет координаты $A(1; 2)$.

*Указание.* Сначала нужно найти координаты двух точек, симметричных точке $A$ относительно координатных осей. Это будут две вершины прямоугольника. Четвертую вершину прямоугольника можно получить симметричным отражением относительно координатных осей любой из полученных двух вершин.

**15.**** Для точки $M(a; b)$ построили точку $N(b; a)$. Где расположена точка $N(b; a)$, если точка $M(a; b)$ расположена: а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти; д) на оси $Ox$; е) на оси $Oy$?

*Указание.* При решении этой задачи следует заметить, что точки $M(a;b)$ и $N(b;a)$ симметричны относительно биссектрис первого и третьего координатных углов.

**17.**** Для точки $M(a; b)$ построили точку $R(-b; -a)$. Где расположена точка $R(-b; -a)$, если точка $M(a; b)$ расположена: а) в первой четверти; б) во второй четверти; в) в третьей четверти; г) в четвертой четверти; д) на оси $Ox$; е) на оси $Oy$?

*Указание.* При решении этой задачи следует заметить, что точки $M(a;b)$ и $R(-b;-a)$ симметричны относительно биссектрис второго и четвертого координатных углов.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.3.** Какая из точек симметрична точке $B$ относительно оси абсцисс, если точка $B$ симметрична точке $A(1; 2)$ относительно оси ординат?

1) $M(-2; -1)$; 2) $N(-2; 1)$; 3) $K(-1; -2)$; 4) $L(1; -2)$.

*Указание.* В этом случае точка $A$ симметрична точке $B$ относительно оси ординат, а поэтому координаты точки $B$ есть $(-1; 2)$.

**1.4.** Какая из точек симметрична точке $B$ относительно оси ординат, если точка $B$ симметрична точке $A(-5; 3)$ относительно оси абсцисс?

1) $M(3; -5)$; 2) $N(5; -3)$; 3) $K(-5; -3)$; 4) $L(3; 5)$.

*Указание.* В этом случае точка $A$ симметрична точке $B$ относительно оси абсцисс, а поэтому координаты точки $B$ есть $(-5; -3)$.

## § 3. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

**Цель параграфа** — познакомить учащихся с важной формулой для вычисления расстояния между точками в прямоугольной системе координат и применить эту формулу для вывода уравнения окружности.

**Особенности параграфа.** Формула для вычисления расстояния между точками на координатной плоскости имеет важное значение для изучения применений метода координат к решению задач, поэтому от учащихся требуется, чтобы они умели применять эту формулу в разных ситуациях. На первом уровне формула рассматривается без доказательства, на третьем уровне рекомендуется рассмотреть полное доказательство с перебором всех возможных случаев. Одним из применений формулы расстояния является вывод уравнения окружности.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: система координат; теорема Пифагора; свойства прямоугольника; свойства модуля.

**Новые математические понятия:** формула расстояния между точками на плоскости; уравнение окружности.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Почему $|2-4|^2=(2-4)^2$?

*Ответ.* По свойству модуля $|2-4|=|-2|=2$, поэтому $|2-4|^2=4$. С другой стороны, $(2-4)^2=(-2)\cdot(-2)=4$.

Возможны и другие ответы, но все они должны содержать ссылки на определение модуля и правило знаков при умножении.

**3.2.** Как показать, что формула для расстояния между точками справедлива в случае, когда точки $A$ и $B$ имеют одинаковые абсциссы?

*Ответ.* Пусть координаты точки $A$ равны $(x;\ a)$, а координаты точки $B$ равны $(x;\ b)$. Легко видеть, что расстояние между этими точками равно $|a-b|$, а тогда квадрат расстояния равен $(a-b)^2$. Но этот же результат получается и на основании общей формулы: $|AB|^2=(x-x)^2+(a-b)^2=(a-b)^2$.

**3.3.*** Как записать уравнение окружности с центром $(0;\ 0)$ и радиусом 8?

*Ответ.* $x^2+y^2=64$.

**3.4.*** Как записать уравнение окружности с центром $(-3;\ 4)$ и радиусом $r=5$?

*Ответ.* По определению этой окружности расстояние от всех ее точек до центра $(-3;\ 4)$ равно 5. Если точка $(x;\ y)$ лежит на окружности, то должно выполняться равенство $(x+3)^2+$ $+(y-4)^2=25$. И наоборот, если равенство выполнено, то расстояние от точки $(x;\ y)$ до центра $(-3;\ 4)$ равно 5.

**3.5.** Как показать, что для любого числа $a$ выполняется равенство: $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}$?

*Ответ.* При любом значении $a$ числа $a^2$ и $(-a)^2$ равны и неотрицательны. Поэтому в данном случае в левой и в правой части равенства стоит квадратный корень из одного и того же неотрицательного числа.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.*** Какие из указанных уравнений задают на координатной плоскости окружность?

1) $x^2 + y^2 = 5$; 2) $2x^2 + y^2 = 1$;

3) $x^2 + 2y^2 = 3$; 4) $2x^2 + 2y^2 = 9$.

*Указание*. В уравнении окружности коэффициенты при квадратах переменных должны быть равными, поэтому остается понять, почему в вариантах 1) и 4) уравнения на самом деле определяют окружности.

# Глава 13
# ПРОПОРЦИИ

**Цель главы** — изучить пропорции и рассмотреть их применения в таких практически важных вопросах, как прямая пропорциональная зависимость между величинами, расчеты концентраций компонент в смеси, масштаб.

**Особенности главы.** Первые два параграфа главы имеют важное значение в теоретическом плане, так как содержат изложение теории пропорций с доказательствами их основных свойств. При изучении этого материала, в особенности на третьем уровне, следует обратить внимание на понятие равносильности некоторых утверждений и продемонстрировать это на примере пропорций. Третий параграф главы можно считать очередной ступенью в развитии интуитивных представлений о функциональной зависимости, так как здесь рассматривается широко распространенный тип зависимости — прямая пропорциональность. В последних параграфах главы рассматриваются важные для практики приложения прямой пропорциональности.

## § 1. ЧИСЛОВЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ОТНОШЕНИЯ ВЕЛИЧИН

**Цель параграфа** — на основе операции деления ввести понятие отношения величин и установить основные свойства отношений.

**Особенности параграфа.** Основная часть текста посвящена понятию отношения таких величин, как длины, площади, массы, промежутки времени и т.д. Отличительная особенность этих величин состоит в том, что они имеют размерность. Их численное значение зависит от выбранной единицы измерения, поэтому вопрос об отношении величин вовсе не простой. В параграфе выясняется, что такое отношение однородных величин, устанавливается независимость отношения от выбранной единицы измерения, показывается, как вычислять отношения в том случае, когда соотносимые величины выражены в разных единицах. В конце параграфа на примерах обсуждается непростое понятие отношения неоднородных величин. Отдельные вопросы, относящиеся к отношению неоднородных величин, рассматриваются на примерах скорости и производительности труда, известных учащимся. Доказательства основных свойств отношений разбираются на третьем уровне.

**Предварительные знания, умения и навыки:** деление дробных чисел; измерение длин, площадей, времени и т.д.

**Новые математические понятия:** отношение числа $a$ к числу $b$; отношение однородных величин; независимость отношения величин от выбора единицы измерения; отношение неоднородных величин.

**Вспомогательные понятия:** во сколько раз одно число больше другого числа; какую часть одно число составляет от другого числа; длина, площадь, масса, скорость, промежутки времени; однородные величины.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Какие признаки делимости натуральных чисел на число 2 эквивалентны между собой?

*Ответ.* Можно сформулировать следующие признаки. 1) Если число оканчивается на четную цифру, то оно делится на 2. 2) Если в разложении числа на простые множители имеется простой множитель 2, то оно делится на 2. 3) Если при делении числа на 2 с остатком получается остаток, равный 0, то оно делится на 2.

**1.2.** Каково отношение длины вашего шага к длине стометровой дорожки стадиона?

*Вариант ответа.* Будем предполагать, что отношение вычисляется при измерении величин в метрах. Тогда если измерить длину шага в метрах и длина шага окажется равной $b$ метров, то отношение равно $\frac{b}{100}$.

**1.3.*** Как распилить доску в полевых условиях на две части, длины которых относятся как 1 : 10?

*Варианты ответа.* Заготовить мерку, длина которой немного меньше десятой части длины доски (это не так трудно сделать, глядя на доску). Затем приложить мерку один раз с одной стороны доски, сделав отметку, и десять раз с другой стороны, также сделав отметку. Промежуток между этими отметками будет не очень большим, и разделить его на 11 примерно равных частей уже несложно. После этого будет ясно, где проводить распил с удовлетворительной точностью.

**1.4.*** Изменится ли отношение площадей двух квадратов при изменении единицы измерения длин их сторон?

*Ответ.* Пусть длины сторон равны $a$ и $b$. Тогда площади квадратов равны $a^2$ и $b^2$, а отношение их площадей $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Так как при изменении единицы измерения длин сторон отношение $a : b$ не меняется, то отношение площадей квадратов также не изменится.

**1.5.**** В пункте в общем виде рассматривается обоснование утверждения, что отношение однородных величин не зависит от выбора единицы измерения. *Вопрос.* Каким будет приведенное рассуждение для следующих значений величин: $a = \frac{11}{8}$*м*, $b = \frac{3}{16}$*м*, $e = \frac{5}{8}$*м*?

$$\text{\textit{Ответ.} } k = \frac{a}{b} = \frac{11}{8} : \frac{3}{16} = \frac{22}{3},\ b = n \cdot e, \text{ откуда } n = \frac{b}{e} = \frac{3}{16} : \frac{5}{8} = \frac{3}{10},$$

$$\text{откуда } m = k \cdot n = \frac{22}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{11}{5},\ a = k \cdot b = (k \cdot n) \cdot e = me,$$

$$\text{тогда } \frac{m}{n} = \frac{11}{5} : \frac{3}{10} = \frac{22}{3},\ \frac{a}{b} = k = \frac{22}{3},\ \frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

**1.6.** Какие еще примеры отношений неоднородных величин вам известны?

*Ответ.* Например, отношение стоимости пакета сахара в рублях к его массе в килограммах — цена за килограмм.

**1.7.** В пункте рассматривается задача: «Одна бригада из шести трактористов вспахала 600 га за 5 дней, а другая бригада из пяти трактористов вспахала 630 га за 6 дней. В какой бригаде выше производительность труда?». *Вопрос.* Каков будет ответ на вопрос данной задачи, если считать, что лучше работает та бригада, которая за день выполняет больший объем работы?

*Ответ.* Так как $600 : 5 = 120$, $630 : 6 = 105$ и $120 > 105$, то первая бригада за день выполняет больший объем работы.

**1.8.** Как выразить скорость 30 км/ч в м/с?

*Ответ.* 30 км равно 30 000 м, 1 час равен 3600 с. Поэтому скорость 30 км/ч равна значению $\frac{30\,000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{25 \text{ м}}{3 \text{ с}} = 8\frac{1}{3}\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

## Указания к решению наиболее трудных задач.

**3.*** в) Найдите неизвестное $x$, если $\left(-2\frac{1}{3}\right) : x = 1\frac{1}{6}$.

*Указание.* Записать смешанные дроби в виде обыкновенных и перейти к уравнению $\frac{7}{6}x = -\frac{7}{3}$, откуда $x = -2$.

**4.**** г) Решите уравнение $11 : (0{,}4 - 2x) = 2\frac{1}{2}$.

*Указание*. Сначала перейти к уравнению $11 = \frac{5}{2} \cdot (0{,}4 - 2x)$, а затем к уравнению $0{,}4 - 2x = 11 : \frac{5}{2}$.

**15.** Площадь прямоугольника $ABCD$ на рис. 1 принята за единицу. Начертите прямоугольник, площадь которого равна: а) 5 таких единиц; б)* 3,5 таких единиц; в)** $4\frac{1}{2}$ таких единиц.

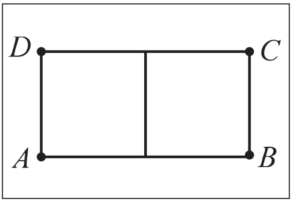

Рис. 1

*Указание*. Обозначим $AD = a$, $AB = 2a$. Тогда: а) построить прямоугольник со сторонами $a$ и $10a$; б)* построить прямоугольник со сторонами $a$ и $7a$; в)** построить прямоугольник со сторонами $\frac{1}{2}a$ и $17a$.

**17.*** Сторона первого квадрата в 1,5 раза больше стороны второго квадрата, а площадь первого квадрата в 4 раза меньше площади прямоугольника. Во сколько раз площадь прямоугольника больше площади второго квадрата?

*Указание*. Площадь первого квадрата в $(1{,}5)^2$ раз больше площади второго квадрата.

**20.** Найдите отношение площади прямоугольника к его периметру, если его стороны имеют длины: а) 6 см и 4 см; б) 60 мм и 40 мм.

*Указание*. Обратить внимание на то, что в этом случае величина отношений имеет размерность. Поэтому ответы выглядят так: а) 1,2 см; б) 12 мм.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Чему равно отношение 4 дм$^2$ : 8 см$^2$?

1) $\frac{1}{2}$; 2) 5; 3) 50; 4) 500.

*Указание*. 4 дм$^2$ = 400 см$^2$.

**2.1.** Какие из указанных скоростей равны скорости 36 км/ч?

1) 0,6 км/мин; 2) 0,1 км/с;
3) 10 м/с; 4) 600 м/мин.

*Указание*. 0,6 км/мин = 60 · 0,6 км/ч; 0,1 км/с = 3600 · 0,1 км/ч; 10 м/с = $\frac{3600}{1000}$ · 10 км/ч; 600 м/мин = $\frac{60}{1000}$ · 600 км/ч.

**2.4.** Какие из указанных отношений равны 6 г/мин?

1) 30 г/5 мин; 2) 1 г/10 с;
3) 4 кг/600 мин; 4) 1,8 кг/5 ч.

*Указание.* 1 г : 10 с = 1 г : $\left(\frac{1}{6}\right)$ мин; 4 кг : 600 мин = 4000 г : : 600 мин; 1,8 кг : 5 ч = 1800 г : 300 мин.

## § 2. ПРОПОРЦИЯ И ЕЕ ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО

**Цель параграфа** — ввести понятие пропорции, установить основные свойства пропорций, выработать навыки по нахождению неизвестного члена пропорции.

**Особенности параграфа.** Параграф посвящен пропорциям, имеющим большую практическую значимость, что можно будет видеть в последующих параграфах этой главы. На первом уровне следует хорошо разобраться с соответствующими названиями и смыслом основных свойств пропорций, добиваться того, чтобы все учащиеся умели по трем известным членам верной пропорции находить ее четвертый член. На третьем уровне предлагается рассмотреть доказательства свойств пропорции. В связи с этим целесообразно особо разобраться с пропорциями, которые содержат член, равный нулю. Такими могут быть только пропорции вида $\frac{0}{m}=\frac{0}{n}$, где $m$, $n$ — любые ненулевые числа.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагается известным: отношение чисел; отношение величин.

**Новые математические понятия:** пропорция; средние члены пропорции; крайние члены пропорции; основное свойство пропорции.

**Вспомогательные понятия:** критерий пропорции.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

| |
|---|
| $a \cdot d = b \cdot c$ |
| $a \cdot d = c \cdot b$ |
| $d \cdot a = b \cdot c$ |
| $d \cdot a = c \cdot b$ |
| $b \cdot c = a \cdot d$ |
| $b \cdot c = d \cdot a$ |
| $c \cdot b = a \cdot d$ |
| $c \cdot b = d \cdot a$ |

**2.1.** Какое число надо подставить вместо звездочки в выражение $\frac{2}{5}=\frac{6}{*}$, чтобы получилась пропорция?

*Ответ.* 15.

**2.2.** Почему в каждой строке таблицы записано верное равенство?

*Ответ.* Такой вывод можно сделать на основании переместительного закона умножения и основных свойств равенства: 1) $a = a$; 2) если $a = b$, то $b = a$; 3) если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

**2.3.** В пункте рассматривается задача: «Длины отрезков $|AB| = 14$ см, $|BC| = 6$ см, $|AD| = 21$ см и $DE$ связаны пропорцией $|AB| : |AD| = |BC| : |DE|$.

Найти длину отрезка $DE$». *Вопрос.* Во сколько раз длина отрезка $DE$ больше длины отрезка $BC$?

*Ответ.* В пункте найдено, что $|DE| = 9$ см. Поэтому $\frac{DE}{BC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, т.е. в полтора раза.

**2.4.*** Могут ли числа 1, 2, 3, 4, взятые в каком-то порядке, образовывать пропорцию?

*Вариант ответа.* Если взять любые два числа $a$ и $b$ из чисел 1, 2, 3, 4, то их произведение $a \cdot b$ не равно произведению двух оставшихся чисел $c$ и $d$, что видно из таблицы, в которой представлен перебор всех возможностей.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a \cdot b$ | $1 \cdot 2$ | $1 \cdot 3$ | $1 \cdot 4$ | $2 \cdot 3$ | $2 \cdot 4$ | $3 \cdot 4$ |
| $c \cdot d$ | $3 \cdot 4$ | $2 \cdot 4$ | $2 \cdot 3$ | $1 \cdot 4$ | $1 \cdot 3$ | $1 \cdot 2$ |

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**7.*** Решите уравнение: а) $\frac{x-2}{4} = \frac{3}{5}$; б) $x : 3 = (x+6) : 9$; в) $\frac{x-12}{5} = \frac{5-x}{2}$; г) $(2x + 5) : 3 = (3x - 15) : 2$.

*Указание.* а) Перейти к уравнению $x - 2 = \frac{3 \cdot 4}{2}$; б) используя основное свойство пропорции, перейти к уравнению $9 \cdot x = 3 \cdot (x + 6)$; в), г) решаются аналогично б).

**10.**** Можно ли составить пропорцию из чисел, взятых в каком-то порядке: а) 2; 5; 11; 17; б) 1,5; 2; 9; 12; в) 9; 3; 21; 7; г) 15; 14; 8; 75; д) 100; 80; 4; 5; е) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$ ; 1,75; 1,3125?

*Указание.* Первый способ. Перебрать все возможные способы записи пропорций.

Второй способ. Если верную пропорцию составить можно, то по основному свойству пропорции произведение двух из заданных чисел должно равняться произведению двух оставшихся. Если при этом члены пропорции являются целыми числами, то оба произведения должны одинаковым способом раскладываться в произведение простых множителей.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Чему равно значение $m$ в пропорции $m : a = b : c$ , в которой $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$?

1) $m = \frac{ac}{b}$ ; 2) $m = \frac{ab}{c}$ ; 3) $m = \frac{bc}{c}$ ; 4) $m = \frac{a}{bc}$.

*Указание.* Использовать равенство $mc = ab$.

**2.4.** Пусть известно, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ является верной пропорцией, в которой $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Какие из записанных ниже выражений также являются пропорциями?

1) $\frac{2a}{2b} = \frac{c}{d}$; 2) $\frac{2a}{b} = \frac{c}{2d}$; 3) $\frac{a}{2b} = \frac{c}{2d}$; 4) $\frac{a}{2b} = \frac{2c}{d}$.

*Указание*. Из условия $ad = bc \neq 0$. С учетом этого сравнить произведения крайних и средних членов в каждом из вариантов.

## § 3. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

**Цель параграфа** — определить один из простейших видов функциональной зависимости — прямую пропорциональность.

**Особенности параграфа.** В параграфе на основе знакомых примеров с помощью таблиц выделяется один из важных типов зависимости величин — прямая пропорциональность. Определяется коэффициент пропорциональности и выводится формула линейной зависимости между прямо пропорциональными величинами. Если понятие пропорции усвоено хорошо, то на первом и втором уровне понятие прямой пропорциональности с положительным коэффициентом не должно вызывать особых затруднений на уровне применений к решению задач. Сложные вопросы, относящиеся к взаимной пропорциональности переменных, и пропорциональность с отрицательным коэффициентом рассчитаны преимущественно на третий уровень.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: пропорция; свойство членов пропорции; критерий пропорции.

**Новые математические понятия:** прямая пропорциональная зависимость; прямо пропорциональные величины; пропорциональные величины; коэффициент пропорциональности.

**Вспомогательные понятия:** величина; зависимость величин; переменная величина.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** Какова зависимость между стороной квадрата и его периметром?

*Ответ*. Если $p$ — периметр, $a$ — сторона квадрата, то $p = 4a$.

**3.2.** Как зависит площадь квадрата от длины его стороны?

*Ответ*. Если $S$ — площадь, $a$ — сторона квадрата, то $S = a^2$.

**3.3.** Какие примеры прямой пропорциональной зависимости вы знаете?

*Варианты ответа.* 1. Периметр квадрата прямо пропорционален стороне квадрата. 2. При постоянной скорости движения автомобиля пройденное расстояние прямо пропорционально времени движения. 3. Высота $h$ правильного треугольника прямо пропорциональна его стороне $a$, так как $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$.

**3.4.** Какой формулой выражается зависимость площади развертки куба от площади одной его грани?

*Ответ.* Если $K$ — площадь развертки, $M$ — площадь одной грани, то $K = 6M$.

**3.5.** В пункте рассматривается задача: «Известно, что масса сахара прямо пропорциональна его объему, а в литровую банку входит 0,8 кг сахара. По какой формуле можно вычислять массу сахара в зависимости от объема?» *Вопрос.* С каким коэффициентом масса сахара пропорциональна его объему?

*Ответ.* С коэффициентом $k = 0{,}8 = \frac{4}{5}$.

**3.6.**** Вопрос к пункту имеет отношение к задаче из пункта 3.5: «Известно, что масса сахара прямо пропорциональна его объему, а в литровую банку входит 0,8 кг сахара. По какой формуле можно вычислять массу сахара в зависимости от объема?» *Вопрос.* С каким коэффициентом объем сахара пропорционален его массе?

*Ответ.* С коэффициентом $m = \frac{1}{0{,}8} = \frac{4}{5}$.

**3.7.*** В пункте рассматривается задача: «С наступлением сумерек температура воздуха понижается на 1,5° каждый час. Что покажет термометр в 3 часа 20 минут утра, если в полночь он показывал 0°?» *Вопрос.* Какую температуру показывал термометр до наступления полуночи в 23 ч 45 мин?

*Варианты ответа.* Первый способ. За 1 час температура понижается на 1,5°, за $\frac{1}{4}$ часа — на $x^{\circ}$. Так как $1 : 1{,}5 = \frac{1}{4} : x$, то $x = \frac{1{,}5}{4} = \frac{15}{40} = \frac{3}{0} = (0{,}375)^{\circ}$. Поэтому в 23 часа 45 минут термометр показывал примерно $(0{,}4)^{\circ}$.

Второй способ. Если за начало отсчета времени принята полночь, то за 15 мин до полуночи было $-\frac{1}{4}$ часа. Подставив это значение в формулу $T = -1{,}5t$, находим $T = (1{,}5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = (0{,}375)^{\circ}$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**3.**** Пропорциональна ли площадь круга: а) его радиусу; б) квадрату его радиуса?

*Указание.* а) Нет, для объяснения этого ответа при двух значениях радиуса сравнить отношения площади круга к радиусу; б) обозначив радиус переменной, составить отношение площади круга к квадрату радиуса и выполнить сокращение в этом отношении; получится, что отношение не зависит от радиуса.

**6.** Покажите, что объем параллелепипеда с фиксированной высотой пропорционален площади его основания, и найдите коэффициент пропорциональности.

*Указание.* Обозначим высоту параллелепипеда буквой $H$, стороны основания — буквами $a$ и $b$. Тогда площадь основания $S = ab$, объем $V = ab \cdot H$ и $V : S = H$.

**12.** Чтобы наполнить бочку, надо налить в нее 8 больших ведер или 12 маленьких. Во сколько раз емкость большого ведра превосходит емкость маленького?

*Указание.* Емкость большого ведра равна $\frac{1}{8}$ емкости бочки; емкость маленького ведра равна $\frac{1}{12}$ емкости бочки. Отношение $\frac{1}{8} : \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$.

**14.** Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 5, а его периметр равен 60 см. Найдите длины сторон.

*Указание.* Если обозначить меньшую сторону треугольника $3x$, то оставшиеся стороны $4x$ и $5x$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Чему равно значение переменной $x$, которому соответствует значение $y = -1$ , если $y = -2\frac{1}{3} \cdot x$?

1) $-\frac{3}{7}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $-\frac{7}{12}$; 4) $\frac{7}{12}$.

*Указание.* Составить и решить уравнение: $-1 = -2\frac{1}{3} \cdot x$ .

**2.3.** При каких значениях коэффициента $k$ прямо пропорциональной зависимости величины $y$ от величины $x$ большему значению $x$ соответствует большее значение $y$?

1) $-\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{5}$.

*Указание.* В прямо пропорциональной зависимости большему значению $x$ соответствует большее значение $y$ только в тех случаях, когда коэффициент $k$ пропорциональности больше 0.

## § 4. СМЕСИ И ПРОЦЕНТЫ

**Цель параграфа** — продемонстрировать одно из важных применений теории пропорций к расчету состава смесей.

**Особенности параграфа.** Известно, что если в стакан чая насыпать сахар и сразу, не размешивая, начать пить, то чай не будет казаться сладким. Но после размешивания каждый глоток будет восприниматься одинаково сладким. Поэтому при решении задач на смеси принимается одно важное условие: количество каждой компоненты смеси прямо пропорционально общему количеству смеси. Поэтому задачи дают наглядный материал для изучения пропорциональной зависимости и способствуют усвоению этого важного понятия. Этот материал важен еще и потому, что он находится на стыке математики с физикой и химией, где подобного типа задачи составляют существенную часть курса.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: прямая пропорциональность; проценты.

**Новые математические понятия:** часть, составляющая содержание компоненты в смеси веществ.

**Вспомогательные понятия:** смесь; компоненты смеси; сведения из физики и химии о составе воздуха и других смесей, необходимые для решения задач.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**4.1.** Какую часть занимают примеси в воздухе, если 0,78 всей массы воздуха составляет азот, а 0,21 всей массы воздуха — это кислород?

*Ответ.* Воздух по отношению к себе составляет одну часть. Поэтому примеси составляют $1-(0{,}78+0{,}21)=0{,}01$.

**4.2.** Каково процентное содержание азота, кислорода и примесей, если 0,78 всей массы воздуха составляет азот, а 0,21 — кислород?

*Ответ.* Азот составляет $0{,}78=\frac{78}{100}$, или $78\%$; кислород составляет $0{,}21=\frac{21}{100}$, или $21\%$; примеси составляют $0{,}01=\frac{1}{100}$, или $1\%$ от общей массы воздуха.

**4.3.** В пункте рассматривается задача: «Из одной тонны молока можно изготовить 33 кг масла. Сколько масла получится из 40 кг молока?» *Вопрос.* Сколько потребуется молока, чтобы при тех же условиях приготовить 16,5 кг масла?

*Ответ.* Первый способ. Составим пропорцию: $1000 : 33 = x : 16{,}5$ или $\frac{33}{1000} = \frac{16{,}5}{x}$. По основному свойству пропорции $33 \cdot x = 16{,}5 \cdot 1000$, откуда $x = 500$ кг.

Второй способ. Количество молока, которое требуется для изготовления заданного количества масла, прямо пропорционально количеству масла. Так как 33 кг получится из 1 т, то $16{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 33$ (кг) получается из $\frac{1}{2} \cdot 1$ (т).

**4.4.** Сколько воды нужно добавить к 10 г соли, чтобы получить 10%-ный раствор?

*Ответ.* Пусть $x$ г — количество воды в растворе. Тогда масса раствора $x + 10$ (г), и процентное содержание соли в растворе $\frac{10}{x + 1000}$. Отсюда $x = 90$ г.

**4.5.** Сколько процентов сахара будет содержать раствор, полученный выпариванием 100 г воды из 200 г раствора, содержащего 10% сахара?

*Ответ.* В 200 г раствора 10% сахара, то есть 10% от 200 г — это $\frac{10}{1000} \cdot 200 = 20$ г. Поэтому количество воды в растворе $200 - 20 = 180$ (г). Когда 100 г воды испарилось, то в 100 г оставшегося раствора всего 80 г воды. Число процентов сахара после выпаривания $\frac{20}{100} \cdot 100\% = 20\%$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.*** К 200 г 30%-го раствора поваренной соли добавили еще 40 г 35%-го раствора поваренной соли. Каково процентное содержание соли в получившемся растворе?

*Указание.* Сначала нужно найти массу соли в заданном растворе, а затем полученное число разделить на (200 + 40) и умножить на 100.

**13.*** Смешали 100 г 20%-го раствора соли и 200 г 10%-го. Сколько процентов соли содержится в получившейся смеси?

*Указание.* В 100 г 20%-ного раствора содержится 20 г соли, в 200 г 10%-ного раствора содержится тоже 20 г соли. Для получения ответа нужно сумму (20 + 20) разделить на (100 + 200) и умножить на 100.

**14.*** Свежие грибы содержат 94% воды. После сушки грибы стали в 2 раза легче. Каким стало содержание воды в них?

*Указание*. Пусть $x$ кг — масса свежих грибов. Тогда в них $\frac{6x}{100}$ кг сухой составляющей и $\frac{94x}{100}$ кг воды. После сушки осталось $\frac{x}{2}$ кг грибов, в которых $\frac{6x}{100}$ кг сухой составляющей.

**15.*** В одном стакане 100 г воды, а в другом — 100 г молока. Из первого стакана перелили во второй одну ложку воды, а потом одну ложку получившейся смеси из второго стакана перелили в первый. Чего больше: молока в воде в первом стакане или воды в молоке во втором стакане?

*Указание*. После двух переливаний в каждом стакане осталось столько же жидкости, сколько было первоначально. Это означает, что если в первом стакане появилось какое-то количество молока, то оно из второго стакана, а вместо этого молока во втором стакане появилось такое же количество воды.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Величина $N$ составляет $30\%$ от величины $M$, а величина $K$ — $40\%$ от $N$. Сколько процентов составляет $K$ от величины $M$?

1) $10\%$; 2) $12\%$; 3) $20\%$; 4) $40\%$.

*Указание*. $K = \frac{40}{100} \cdot \left(\frac{30}{100} \cdot M\right)$.

**2.3.** К раствору, содержащему $8\%$ соли, добавляют некоторое количество раствора, содержащего $3\%$ соли. Каким может быть процентное содержание соли в получающемся растворе?

1) $2\%$; 2) $3\%$; 3) $7\%$; 4) $9\%$.

*Указание*. К тесту лучше всего подходить, опираясь на интуитивные житейские соображения. А именно, раз добавляем раствор с меньшим процентным содержанием соли, то в новом растворе соли меньше $8\%$. Далее, раз добавляем в раствор, в котором больше $3\%$ соли, то и в новом растворе всегда больше $3\%$ соли. Наконец, если очень мало добавим, то получим раствор, в котором почти $8\%$ соли, а если много добавим, то получим раствор, в котором почти $3\%$ соли.

Точное обоснование перечисленного требует введение переменной и исследования функции, что трудно реализовать даже на третьем уровне. Однако тестовая форма допускает принимать ответы и без обоснований.

## § 5. МАСШТАБ

**Цель параграфа** — дать точное определение масштаба и ввести соответствующее обозначение.

**Особенности параграфа.** Размеры на планах, чертежах деталей, картах должны быть прямо пропорциональны реальным размерам. Коэффициент пропорциональности называют масштабом. Параграф важен не только для иллюстрации пропорциональной зависимости, но и для профессиональной подготовки школьника.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагается известным: масштаб как отношение длины изображения отрезка к его реальной длине.

**Новые математические понятия:** масштаб как коэффициент прямой пропорциональности.

**Вспомогательные понятия:** планы, карты, схемы; длина, ширина, площадь; метрическая система мер.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**5.1.** Как изобразить в тетради тетрадный лист в масштабе 1 : 10?

*Ответ.* На изображении уменьшить размеры листа в 10 раз.

**5.2.** Является ли внутренний прямоугольник на рис. 1 планом внешнего прямоугольника в некотором масштабе?

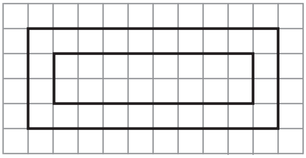

Рис. 1

*Ответ.* Не является, потому что отношение меньших сторон прямоугольников равно $2 : 4 = \frac{1}{2}$, а отношение больших сторон равно $8 : 10 = \frac{4}{5}$, что не равно $\frac{1}{2}$.

**5.3.** Какой масштаб должна иметь карта, чтобы изображение отрезка в 12 тыс. км уместить на обыкновенном тетрадном листе?

*Ответ.* Будем считать, что отрезок длиной 18 см можно нарисовать на тетрадном листе. Так как 12 000 км равно 1 200 000 000 см, то при масштабе 18 : 1 200 000 000 или 3 : 200 000 000 изображение заданного отрезка свободно уместится на тетрадном листе.

**5.4.** В каком масштабе нужно изображать текст этой книги, чтобы на тетрадном листе помещалась только одна буква?

*Ответ.* Примем размер буквы 2 мм $\times$ 3 мм, а размер тетрадного листа 16 см $\times$ 20 см. Увеличив текст в $\frac{200}{3} \approx 66{,}6$ раза, получим изображение буквы шириной приблизительно 13,3 см и высотой 20 см. Следовательно, можно выбрать масштаб 200 : 3 или близкий к нему.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**15.** Карта с масштабом 1:25 000 перечерчена в карту с масштабом 1:10 000. Какова длина изображения железной дороги на новой карте, если на старой было 12,5 см?

*Указание.* Проще всего по масштабу первой карты вычислить реальную длину железной дороги, а затем по масштабу второй карты вычислить длину нового изображения железной дороги.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.2.** Окружности какого радиуса $R$ можно целиком изобразить на квадратном листе бумаги со стороной 20 см в масштабе 1:15?

1) 1,2 м; 2) 1,4 м; 3) 1,6 м; 4) 1,8 м.

*Указание.* На изображении радиус окружности должен быть меньше 10 см.

**2.4.** Какие из указанных масштабов можно выбрать, чтобы окружность радиуса 30 см удалось изобразить на квадратном листе бумаги со стороной 10 см?

1) 10:1; 2) 8:1; 3) 5:1; 4) 3:1.

*Указание.* На изображении радиус окружности должен быть меньше 5 см.

## Глава 14
# ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

**Цель главы** — напомнить о положительных десятичных дробях, ввести отрицательные десятичные дроби, сформулировать условия, при которых обыкновенная дробь может быть представлена в виде конечной десятичной дроби, привести примеры представления некоторых дробей в виде бесконечной десятичной дроби.

**Особенности главы.** В начале главы рассматривается представление дробного числа в виде конечной десятичной дроби путем домножения числителя и знаменателя на одно и то же число. Этот способ сопоставляется с алгоритмом деления «уголком». В результате, естественно, приводятся примеры, в которых алгоритм деления «уголком» не заканчивается ни через какое конечное число шагов. На основе этого происходит знакомство с некоторыми последовательностями, содержащими бесконечное число членов, и на интуитивном уровне обсуждается сходимость последовательностей десятичных приближений дробного числа к этому числу. На втором уровне рассматривается одна из задач Зенона об Ахиллесе и черепахе.

## § 1. ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ

**Цель параграфа** — рассмотреть положительные и отрицательные десятичные дроби, выработать навыки выполнения арифметических действий с десятичными дробями произвольного знака, перечислить условия, при которых дробное число представимо в виде конечной десятичной дроби.

**Особенности параграфа.** В начале параграфа напоминается, что всякая конечная десятичная дробь является обыкновенной дробью. Затем без доказательства формулируется условие, при котором несократимая дробь может быть представлена в виде конечной десятичной дроби, и напоминается алгоритм деления «уголком». Весь материал параграфа рассчитан на первый уровень, задачи и упражнения в основном предназначены для повторения техники вычислений.

На третьем уровне можно попытаться выяснить, почему несократимая дробь, в разложении знаменателя которой на простые множители имеются числа, отличные от 2 и от 5, не может равняться никакой конечной десятичной дроби. Для этого следует напомнить учащимся доказательства некоторых утверждений методом «от противного» и основные свойства делимости.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: определение положительной десятичной дроби; основное свойство дроби; алгоритм деления «уголком».

**Новые математические понятия:** отрицательная десятичная дробь.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Примеры каких десятичных дробей, которые переводятся в обыкновенную дробь со знаменателем 125, вы можете привести?

*Ответ.* Такими, например, являются числа: 0,008; 0,016; 0,024.

**1.2.** Как показать, что для десятичной дроби –1,234 выполняется равенство –(–1,234) = 1,234?

*Ответ.* Число –(–1,234) является противоположным к числу $-1{,}234 = -\frac{1234}{1000}$ и поэтому равно числу $\frac{1234}{1000} = 1{,}234$.

**1.3.** Как показать, что для дробей выполняется равенство $-(a - b) = b - a$?

*Ответ.* Используя законы сложения, убедиться, что $(a - b) + (b - a) = 0$, откуда по определению $-(a - b) = b - a$.

**1.4.** Какое из чисел больше (–0,321) : (0,0321) или 10?

*Ответ.* Положительное число 10 больше отрицательного числа (–0,321) : (0,0321), равного –10.

**1.5.**** Как показать, что для любого числа $a$ число $a - [a]$ является неотрицательным числом?

*Ответ.* По определению целой части $[a]$ числа $a$ имеем, что если $a$ целое число, то разность $a - [a]$ равна нулю; если $a$ не целое число, то $a - [a] > 0$.

**1.6.** Как перевести обыкновенную дробь $\frac{23}{25}$ в десятичную?

*Ответ.* Умножить числитель и знаменатель дроби на 4.

**1.7.*** Как показать, что дробь $\frac{13}{70}$ не переводится в десятичную?

*Ответ.* Если бы выполнялось равенство $\frac{13}{70} = \frac{k}{10^n}$, то произведение $13 \cdot 10^n$, равное произведению $k \cdot 70$, делилось бы на простое число 7, что невозможно, так как ни 13, ни $10^n$ не делятся на 7.

**1.8.** При переводе обыкновенной дроби в десятичную получилось 0,17. Какая десятичная дробь получится, если знаменатель обыкновенной дроби увеличить в 5 раз?

*Ответ.* Если $\frac{m}{n} = 0{,}17$, то $\frac{m}{5n} = \frac{0{,}17}{5} = \frac{0{,}34}{10} = 0{,}034$.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**3.** Переведите обыкновенные дроби в десятичные делением «уголком»: д) $\frac{7}{56}$; е) $4\frac{3}{2000}$.

*Указание.* д) Удобно сначала сократить дробь, получить $\frac{1}{8}$, а после этого выполнить деление; е) удобно свести к делению числа 8,003 на 2.

**5.** е) Переведите обыкновенную дробь в десятичную $\frac{24}{15}$.

*Указание.* Сначала разложите числитель и знаменатель дроби на простые множители и выполните сокращение.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.*** Чему равна дробная часть числа $-4{,}65$?

1) $-0{,}65$; 2) $-0{,}35$; 3) $0{,}35$; 4) $0{,}65$.

*Указание.* Прежде всего нужно понять, что целая часть заданного числа равна $-5$. После этого либо сразу определить, что подходит вариант 3), либо в соответствии с определением выполнить вычитание: $-4{,}65 - (-5)$.

**2.3.** В каких случаях сумма дробных частей чисел $a$ и $b$ не равна дробной части их суммы?

1) $a = 1{,}518$; $b = 0{,}539$; 2) $a = 3{,}149$; $b = 1{,}851$;
3) $a = 2{,}387$; $b = 4{,}181$; 4) $a = 4{,}541$; $b = 0{,}372$.

*Указание.* Достаточно проверять суммы дробных частей слагаемых: если эта сумма меньше 1, то равенство верно, а в остальных случаях равенство неверно.

**2.4.** Какие из указанных десятичных дробей равны обыкновенной дроби с нечетным знаменателем?

1) 3,215; 2) 1,24; 3) 7,864; 4) 5,128.

*Указание.* Сначала числитель дробной части разложите на простые множители и определите степень числа 2, которая входит в это разложение.

## § 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕСЯТИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

**Цель параграфа** — привести примеры последовательностей десятичных приближений дробного числа, сходящихся к этому числу.

**Особенности параграфа.** В параграфе разъясняется, что часто процедура деления «уголком» не заканчивается через конечное число шагов, а может продолжаться бесконечно. При этом получается последовательность десятичных приближений исходного дробного числа, а само это число оказывается лежащим на каждом из отрезков бесконечной последовательности вложенных друг в друга отрезков числовой прямой; левые концы этих отрезков и правые концы этих отрезков образуют последовательности десятичных приближений, соответственно по недостатку и по избытку, сходящихся к данному числу.

Несмотря на то что основной материал параграфа предназначен для второго уровня, его вполне можно изучать и на первом. При этом можно в значительной степени наработать навыки деления «уголком» одного натурального числа на другое.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: приближение с недостатком; приближение с избытком; десятичное приближение с недостатком; десятичное приближение с избытком; точность десятичного приближения.

**Вспомогательные понятия:** бесконечная последовательность вложенных друг в друга отрезков числовой прямой; бесконечная последовательность; последовательность сходится к заданному числу.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.*** Какая цифра получится на 101-м месте после запятой при делении числа 1 на 6?

*Ответ.* Запишем процесс деления «уголком» числа 1 на 6. Видим, что на каждом месте появляется остаток 4, а в частном — на каждом месте после запятой, начиная со второго — цифра 6. Поэтому и на 101-м месте будет цифра 6.

**2.2.*** Какие приближенные значения для числа $\frac{1}{3}$ получатся после десяти этапов деления «уголком»?

*Ответ.* После десяти этапов получатся приближенные значения 0,3333333333 с недостатком и 0,3333333334 с избытком.

**2.3.*** С какой точностью получатся приближенные значения для числа $\frac{1}{3}$ после девяти этапов деления «уголком»?

*Ответ.* На девятом шаге получатся приближенные значения по недостатку 0,333333333 и по избытку 0,333333334, являющиеся левым и правым концами отрезка длиной $\frac{1}{10^9}$. Поэтому после девяти этапов деления «уголком» приближенные значения числа $\frac{1}{3}$ получаются с точностью до 0,000000001.

**2.4.*** Через сколько шагов десятичное приближение с недостатком будет отличаться от числа $\frac{1}{3}$ меньше, чем на 0,0002?

*Ответ.* На четвертом шаге это приближение будет отличаться от $\frac{1}{3}$ меньше, чем на 0,0001, что, в свою очередь, меньше 0,0002.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**2.*** Найдите десятичные приближения с избытком и недостатком с точностью 0,0001 для чисел в заданиях а)—ж).

*Указание.* В принципе решение сводится к технической работе деления «уголком» числителя на знаменатель дроби, при этом нужно понять, что после четырех этапов деления в неполном частном получается десятичное приближение с недостатком и с нужной точностью.

**3.**** Найдите десятичные приближения для дробей в заданиях а)—д).

*Указание.* В каждом из вариантов нужно определить, сколько этапов деления «уголком» нужно выполнить, чтобы получить требуемую точность.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.3.** Чему для числа 1,3579 равна разность между десятичным приближением с избытком с точностью до 0,01 и десятичным приближением с избытком с точностью до 0,001?

1) 0; 2) 0,001; 3) 0,002; 4) 0,003.

*Указание.* Вопрос требует внимательности, потому что ответом к данному тесту должна быть разность $1{,}36 - 1{,}358$.

**1.4.** Чему для числа 5,3997 равна разность между десятичным приближением с избытком с точностью до 0,01 и десятичным приближением с избытком с точностью до 0,001?

1) 0; 2) 0,001; 3) 0,009; 4) 0,01.

*Указание.* Вопрос требует внимательности, потому что ответом к данному тесту должна быть разность $5{,}4 - 5{,}4$.

## § 3. БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

**Цель параграфа** — продемонстрировать учащимся объекты нового вида — бесконечные десятичные дроби.

**Особенности параграфа.** От последовательностей десятичных приближений дробного числа осуществляется переход к бесконечной десятичной дроби. Важно, чтобы на этом этапе учащиеся поняли, что бесконечная десятичная дробь — это объект, созданный мышлением человека, так как никакую бесконечную десятичную дробь невозможно записать полностью ни за какое конечное время.

Пункт 3.2** играет вспомогательную роль и демонстрирует, что в качестве приближений дробного числа вовсе не обязательно выбирать десятичные приближения. В качестве примера приводится процедура нахождения приближений числа $\frac{1}{3}$ с использованием дробей, знаменатели которых являются степенями числа 4. В конце параграфа рассматривается известная задача Зенона об Ахиллесе и черепахе, позволяющая в занимательной форме познакомиться с бесконечным процессом построения десятичных приближений данного числа.

Материал параграфа непростой и предназначен для изучения на уровне не ниже второго.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: приближения числа; десятичные приближения.

**Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления:** бесконечная десятичная дробь; двоичные и четверичные приближения числа.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.*** Какой вид имеет бесконечное десятичное разложение числа $\frac{1}{7}$?

*Ответ.* При делении «уголком» числа 1 на 7 на первом шаге получается остаток 3. После этого только на седьмом шаге во второй раз появится остаток 3. Поэтому

$$\frac{1}{7} = 0{,}1428571428571\ldots .$$

**3.2.**** Почему координата любой из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$ меньше координаты любой из точек $B_1, B_2, B_3, \ldots$?

*Ответ.* Возьмем две точки $A_n$ и $B_m$. Пусть, например, $n > m$. Тогда отрезок $A_nB_n$ содержится целиком в отрезке $A_mB_m$. Это означает, что любая точка отрезка $A_nB_n$ (в том числе точка $A_n$) лежит между $A_m$ и $B_m$. Иными словами, $A_m < A_n < B_m$.

Случай $m > n$ рассматривается аналогично.

**3.3.*** На каком расстоянии от точки $A$ догонит черепаху Ахиллес, если $|AB| = 27$ м?

*Ответ*. Пусть, как в тексте учебника, Ахиллесу потребуется три секунды, чтобы пробежать расстояние $|AB| = 27$ м. Тогда за $3\frac{1}{3}$ секунды он пробежит расстояние $3\frac{1}{3} \cdot (27 : 3) = 30$ м. На таком расстоянии от точки $A$ он и догонит черепаху.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**1.** д)** Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число $\frac{1}{17}$.

*Указание.* Должен получиться ответ 0,0588235294117647058..., где группа из первых 16 цифр после запятой повторяется неограниченное число раз. Для получения этого ответа важно следить за повторением получающихся при делении остатков.

**4.**** В банку емкостью 2 л сначала налили 1 л воды, затем $\frac{1}{2}$ л воды, затем $\frac{1}{4}$ л воды, затем $\frac{1}{8}$ л воды и т.д. Сколько воды окажется в банке: а) после 10 добавлений; б) после 15 добавлений; в) если считать, что добавления воды происходили неограниченное число раз?

*Указание.* а) Нужно понять, что после 10 добавлений окажется $\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$ л воды; б) нужно понять, что после 15 добавлений окажется $\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}\right)$ л воды; в) с каждым добавлением количество воды все меньше и меньше отличается от 2 л. Отмеченные закономерности проще понять, если использовать числовую прямую с довольно крупным масштабом.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.2.** Известно, что $\frac{1}{11} = 0{,}09090909\ldots$. Какой бесконечной десятичной дробью можно представить число $\frac{3}{11}$?

1) 0,39090909...; 2) 0,27090909...;

3) 0,27272727...; 4) 0,12121212....

*Указание.* Один из способов ответа заключается в том, что записанную в условии часть бесконечной десятичной дроби умножить на 3 и получить 0,2727272727. Это позволит выбрать правильный вариант 3).

**1.3.** Автомобиль половину пути из пункта $A$ в пункт $B$ едет со скоростью 90 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 110 км/ч. С какой постоянной скоростью должен ехать автомобиль из $A$ в $B$, чтобы затратить на весь путь такое же время, как и в первом случае?

1) 99 км/ч; 2) 100 км/ч;

3) 101 км/ч; 4) 105 км/ч.

*Указание.* Для ответа сформулированную задачу нужно решить и получить ответ, например, в виде $\frac{2 \cdot 90 \cdot 110}{90 + 110}$.

**1.4.** Известно, что $\frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$ . Какой бесконечной десятичной дробью можно представить число $\frac{5}{6}$?

1) 0,94444...; 2) 0,84444...;

3) 0,93333...; 4) 0,83333....

*Указание.* Один из способов ответа заключается в том, что записанную в условии часть бесконечной десятичной дроби умножить на 5 и получить 0,93330. Это позволит выбрать правильный вариант 3).

**2.2.** Какие из указанных сумм можно перевести в десятичную дробь (с конечным числом знаков)?

1) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$; 2) $\frac{2}{3} + \frac{11}{15}$; 3) $\frac{1}{7} + \frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{7} + \frac{2}{35}$.

*Указание.* Вопрос требует внимательности, потому что в каждом из вариантов есть слагаемое, которое точно не представляется в виде конечной десятичной дроби. Поэтому сначала нужно найти каждую из сумм, выполнить сокращение и только после этого принимать решение о выборе ответа.

# Глава 15

# ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКОВ НА ПРАКТИКЕ

**Цель главы** — познакомить учащихся с примерами зависимостей между величинами и применением графиков в решении некоторых практических задач.

**Особенности главы.** На протяжении первых четырех параграфов приводится схема построения графиков зависимостей величин, а именно:

1) масштабные отрезки на осях выбираются различными в зависимости от конкретных условий каждой задачи;

1) по формулам или по условиям задач составляется таблица зависимости величин;

2) на координатной плоскости изображаются точки, координаты которых взяты из таблицы;

3) плавной кривой соединяются точки, и полученная кривая считается графиком данной зависимости величин;

4) с помощью изображенного графика определяются искомые величины.

В качестве основных задач, которые можно решать с помощью графиков, выделяются следующие:

1) находить координаты выбранной точки графика;

2) находить точки графика, имеющие заданную ординату;

3) на заданном промежутке значений независимой величины находить самое большое или самое маленькое значение зависимой величины.

При работе с главой важно обращать внимание учащихся на то, что величины, найденные графически, являются, как правило, приближенными. Степень точности приближения может быть повышена, если построить более подробную таблицу или выбрать более крупный масштаб для построения графика.

## § 1. ВСТРЕЧА ПОЕЗДОВ

**Цель параграфа** — продемонстрировать с помощью графиков решение задачи о встрече двух поездов, которые движутся навстречу друг другу, но один из них с остановками, а второй без остановок.

**Особенности параграфа.** При знакомстве с условием задачи учащиеся сначала должны узнать, как находить пройденное электропоездом расстояние в зависимости от времени, как составить таблицу этой зависимости с последовательным увеличением значения времени на 5 мин и как по таблице построить график движения. Почему при равномерном движении график изменения пути изображается прямолинейным отрезком, не объясняется, поскольку объяснение этого обстоятельства будет проведено только в следующем классе. На данном этапе обучения следует опираться на интуитивное восприятие, исходя из особенностей расположения точек графика.

График движения второго электропоезда строится по аналогичной схеме, причем работа облегчается тем, что находится явная формула зависимости от времени расстояния до нужной станции. В конце параграфа объясняется, как при помощи построенных графиков определить время встречи поездов.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: построение таблицы зависимости одной величины от другой; изображение на координатной плоскости точек с заданными координатами.

**Вспомогательные понятия:** зависимость между величинами; график зависимости.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**1.1.** Как сравнить масштабы на осях с помощью циркуля?

*Вариант ответа.* Можно поступить так: провести окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единичному отрезку на одной из осей. Если эта окружность пройдет через конец единичного отрезка на другой оси, то масштабы одинаковы, а если не пройдет — масштабы разные.

**1.2.** На каком расстоянии от станции $A$ будет электропоезд через 23 мин после начала движения?

*Варианты ответа.* 1. Так как $t = 23 = 15 + 8$, то $S = 10 + 1 \cdot 8 = 18$.

2. За 3 минуты после момента времени $t = 20$ поезд пройдет еще 3 км, поэтому $S = 15 + 3 = 18$.

**1.3.** Какие координаты имеет точка $P$, отмеченная на графике движения электропоезда на рис. 1?

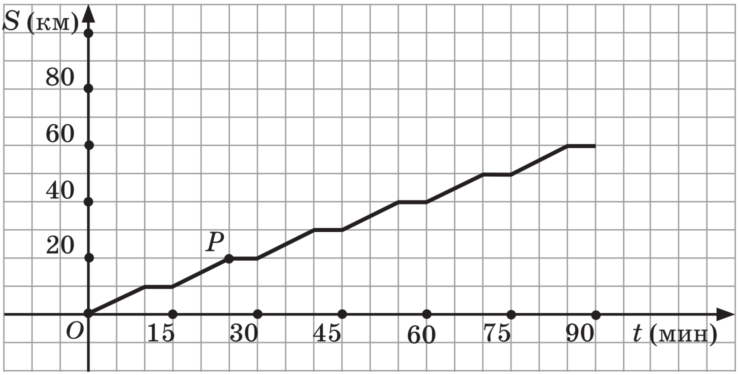


Рис. 1

*Ответ.* $P$ (25; 20).

**1.4.** В предыдущих пунктах этого параграфа построен график движения электропоезда от станции $A$ (рис. 1) *Вопрос.* Через какое время электропоезд будет в 38 км от станции $A$?

*Ответ.* По имеющемуся рисунку графика вполне определенно можно утверждать, что 50 мин — приближенное значение снизу, 55 мин — приближенное значение сверху. В том, что искомое время равно в точности 53 мин, можно убедиться, если провести следующие рассуждения. При $t = 45$ поезд начинает двигаться, находясь на удалении в 30 км от пункта $A$. Расстояние 8 км он пройдет за 8 мин, поэтому искомое время равно $45 + 8 = 53$ (мин).

**1.5.**** Вопрос к пункту имеет отношение к графику, изображенному на рис. 1. Почему значение $S = 57$ при $t = 82$ является точным?

*Ответ.* При $t = 75$ пройденный путь $S = 50$. За $82 - 75 = 7$ (мин) поезд пройдет еще 7 км. Поэтому всего за 82 мин поезд пройдет $50 + 7 = 57$ (км).

**1.6.** В пункте рассматривается задача о движении товарного поезда из пункта $B$, находящегося на расстоянии 100 км от начальной станции $A$, в направлении станции $A$ с постоянной скоростью 60 км/ч без остановок. *Вопрос.* На каком расстоянии от станции $A$ окажется товарный поезд через 27 мин после начала движения?

*Ответ.* По формуле $G = 60 - t$ при $t = 27$ получаем, что $G = 60 - 27 = 33$ (км).

**1.7.** Чему было равно расстояние между поездами за 5 мин до встречи?

*Ответ.* Грузовой поезд за 5 мин до встречи находился на расстоянии в $25 + 5 = 30$ км от пункта $A$. Первый же поезд в момент времени $t = 30$ еще находился на промежуточной станции, удаленной от пункта $A$ на расстояние 20 км, и только после этого начал движение. Поэтому расстояние между поездами за 5 мин до встречи было равно 10 км.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.**** Каждый понедельник в 6 ч утра в пекарню завозят 7 т муки. В течение каждого дня с 6 ч утра до 6 ч вечера на выпечку хлеба тратится 1 т муки, причем засыпается она в тесто постоянно и равномерно. Составьте график наличия муки в пекарне за две недели, считая, что с 6 ч вечера до 6 ч утра пекарня не работает.

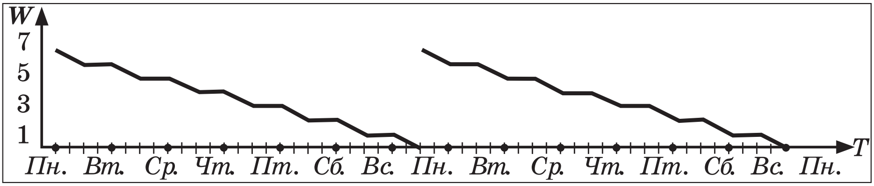


Рис. 2

*Указание.* На рис. 2 приведен схематический график, причем на горизонтальной оси $T$ отмечены дни недели, разделенные на четыре промежутка по 6 ч, а на вертикальной оси $W$ — вес в тоннах.

**6.**** Начиная с 22 ч в воскресенье выполняются полеты из Москвы во Владивосток, при этом через каждый час по этому маршруту вылетает по одному самолету, каждый из которых через 10 ч без посадки прилетает во Владивосток. В понедельник в 3 ч ночи по московскому времени из Владивостока в Москву с такой же скоростью относительно поверхности Земли навстречу этим самолетам вылетает самолет и через 10 ч без посадки прилетает в Москву.

а) Нарисуйте графики зависимости от времени расстояния до Москвы для вылетающих из Москвы самолетов;

б) нарисуйте график зависимости от времени расстояния от Москвы до самолета, летящего из Владивостока;

в) определите, сколько самолетов из Москвы встретит на своем пути летящий из Владивостока самолет.

*Указание.* График изменения расстояния до Москвы для самолета, вылетевшего в 3 ч ночи из Владивостока, имеет вид отрезка $AB$ (рис. 3). Графики изменения расстояний до Москвы для вылетевших из Москвы самолетов на рис. 3 изображены остальными отрезками. Подсчитав число точек пересечения отрезка $AB$ с другими отрезками, получим ответ. Важно подчеркнуть, что для ответа на вопрос пункта в) расстояние от Москвы до Владивостока знать не обязательно, а масштаб по осям координат можно выбрать произвольно.

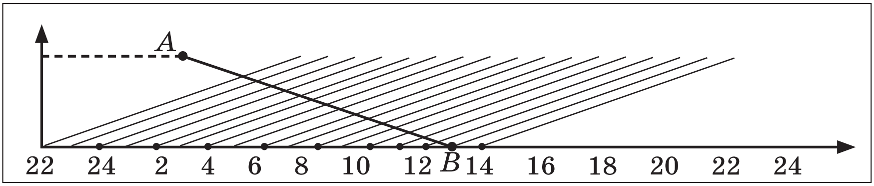


Рис. 3

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

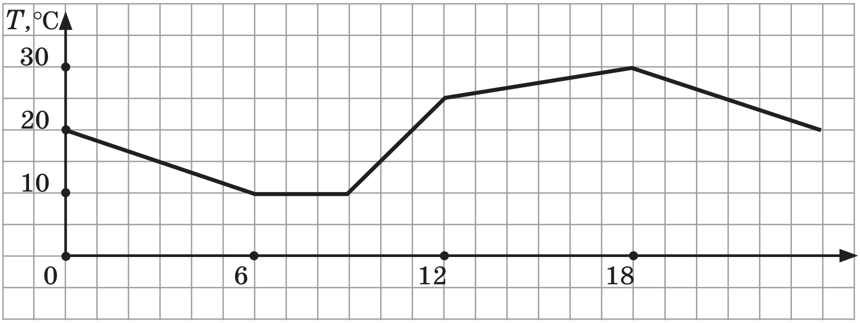


Рис. 4

**2.4.** Определите по графику на рис. 4, в какие моменты времени $t$ температура была выше 15 °C.

1) 2 ч; 2) 4 ч; 3) 9 ч; 4) 11 ч.

*Указание*. Нужно значения зависимости в указанных точках сопоставить с положением числа 15 на оси ординат.

## § 2. КОЛОДЕЦ

**Цель параграфа** — познакомиться с примером нелинейной зависимости времени свободного падения камня от высоты падения.

**Особенности параграфа.** Сначала строится график зависимости времени падения от высоты по таблице, полученной на основе экспериментов. Отметим, что в словах «соединим поставленные точки плавной линией» в неявном виде содержится идея непрерывности. График, построенный по таблице с весьма ограниченным набором данных, позволяет приближенно определить значение времени падения для других значений высоты с небольшой точностью. В качестве примера приблизительно определяется время падения на глубину 6,5 м.

В следующем пункте, предназначенном для учеников, обучающихся на третьем уровне, рассматривается закон $t = \sqrt{\dfrac{H}{4{,}9}}$ зависимости времени падения от глубины колодца и приводится график зависимости, соответствующий приведенной формуле. Этот график совпадает с графиком, рассмотренным в предыдущем пункте, и который считается полученным на основе эксперимента. В итоге делается вывод, что время падения тела довольно точно определяется формулой $t = \sqrt{\dfrac{H}{4{,}9}}$, а построенный на основе экспериментальных данных график вполне пригоден для определения времени падения камня на дно колодца данной глубины.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: примеры построения графиков по таблице значений зависимых величин; примеры формул; изображение на координатной плоскости точек с заданными координатами.

**Вспомогательные понятия:** формула; зависимость между величинами; график зависимости.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**2.1.** В пункте был построен график для определения времени падения камня в зависимости от высоты (рис. 1). *Вопрос.* Сколько секунд будет падать камень с высоты 4 м?

*Ответ.* Взяв на горизонтальной оси точку с координатой 4, проведем через нее вертикальную прямую до пересечения с графиком. Ордината этой точки приблизительно равна 0,9.

**2.2.**** На какую высоту необходимо подбросить вертикально вверх камень, чтобы он упал на землю через две секунды?

*Ответ.* Камень будет лететь вверх и падать вниз одинаковое время равное 1 с. Падение камня с некоторой высоты можно считать падением в колодец соответствующей глубины. По графику на рис. 1 абсцисса точки, ордината которой равна 1,

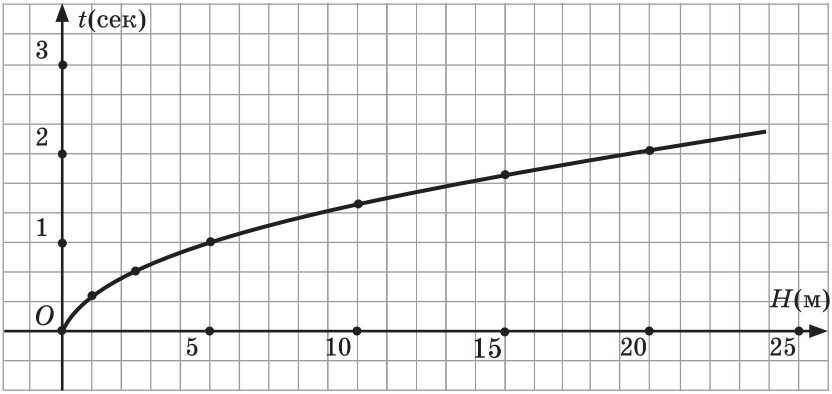


Рис. 1

равна с большой точностью 5 («чуть-чуть» меньше 5). Из формулы $t = \sqrt{\dfrac{H}{4,9}}$ можно получить, что при $t = 1$ с значение $H$ равно 4,9 м.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**2.*** В питательной среде находятся бактерии, и каждую минуту каждая бактерия делится на 2 бактерии. Начертите поминутный график наличия бактерий в питательной среде и определите, через какое время число бактерий превысит 1000 штук, если в начале было: а) 1 бактерия; б) 3 бактерии; в) 5 бактерий.

*Указание.* Для построения графиков нужно заполнить таблицы. В пункте а) заполнить таблицу поминутного значения численности бактерий до того момента, когда численность превысит 1000 штук; в остальных пунктах заполнить аналогичные таблицы.

**3.*** В течение года банк увеличивает сумму сбережений вкладчика на 10%. Начертите график размера сбережений по годам за 20 лет, приняв начальный вклад за единицу.

*Указание.* Если на начало года сумма вклада равна $M$, то через год она станет $1,1 \cdot M$. Для облегчения последующих вычислений удобно применять калькулятор.

**4.**** Скорость небольшого катера 10 км/ч, скорость течения реки 1 км/ч. Катер плывет от пристани вниз по течению некоторое время t, а затем возвращается обратно, затратив на весь путь время $T$. Заполните таблицу зависимости $T$ от $t$ и начертите график этой зависимости.

*Указание.* Сначала можно вывести формулу $T = t + \frac{11t}{9} = \frac{20t}{9}$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.4.**** Зависимость величины $y$ от величины $x$ определяется формулой $y = (x + 1)^2 - 1$. Какие из указанных значений $b$ не могут быть ординатой никакой из точек графика этой зависимости?

1) 3; 2) −0,5; 3) −2; 4) −5.

*Указание.* Нужно понять, что значения заданной зависимости всегда больше или равны (−1).

## § 3. КАК ПОЛУЧИТЬ НАИБОЛЬШИЙ ОБЪЕМ?

**Цель параграфа** — продемонстрировать графический подход к решению одной экстремальной задачи: найти размеры коробки наибольшего объема, которую можно сделать из квадратного листа картона.

**Особенности параграфа.** Схема решения задачи похожа на действия, приведенные в предыдущих параграфах главы: сначала находится формула, задающая величину объема $V$ коробки в зависимости от стороны $x$ вырезаемых квадратов, затем составляется таблица зависимости $V$ от $x$, после чего табличная зависимость изображается точками координатной плоскости, которые соединяются плавной кривой. Новым по отношению к предыдущим параграфам является определение абсциссы точки, ордината которой наибольшая.

Заметим, что величина шага таблицы определяется из соображений практического удобства — шаг не должен быть слишком мелким, так как иначе придется заметно увеличить количество вычислений, но и не должен быть слишком большим, чтобы график не был слишком грубым и обеспечивал достаточно точный ответ.

В тексте параграфа не указывается, что найденный из графических соображений ответ следует считать лишь приближенным. При наличии времени учащимся можно объяснить, что в старших классах изучаются другие способы решения задач на экстремумы, которые по отношению к рассматриваемому примеру позволяют сделать вывод, что значение $V = 2$ л является точным наибольшим значением.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: примеры построения графиков по формулам.

**Вспомогательные понятия:** наибольшее значение.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**3.1.** В пункте рассматривается задача о построении коробки в форме прямоугольного параллелепипеда из квадратной заготовки вырезанием в ее углах одинаковых квадратиков и последующем сгибании. *Вопрос.* Какой объем будет иметь коробка, когда в углах квадратной заготовки со стороной 30 см вырезаются квадраты со стороной 3 см?

*Ответ.* По формуле $V = 0{,}3 \cdot (3 - 0{,}6)^2 = 1{,}728$ л; с точностью до 0,01 л ответом можно считать $V = 1{,}73$.

**3.2.** В пункте с помощью графика на рис. 1 найдено значение $x = 0{,}5$ дм, при котором объем коробки, сделанной из квадратной заготовки со стороной 3 дм, принимает наибольшее значение. *Вопрос.* Какую часть стороны начального квадрата составляет сторона вырезаемых квадратов для коробки наибольшего объема?

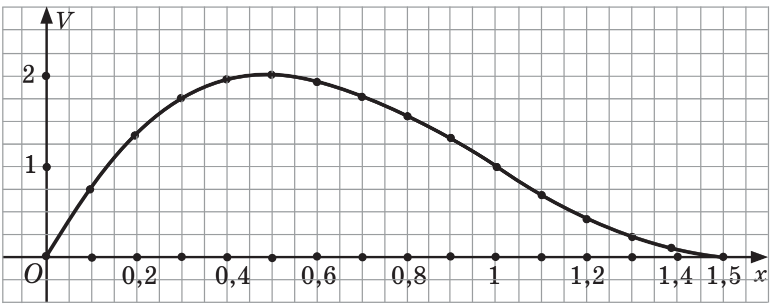


Рис. 1

*Ответ.* Значение $x = 0{,}5$ дм в 6 раз меньше 3 дм. Поэтому сторона вырезаемых квадратов составляет одну шестую от стороны данного квадрата.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**3.**** Как у реки с прямыми берегами забором длиной 60 м огородить с трех сторон участок прямоугольной формы наибольшей площади?

*Указание.* Если через $x$ м обозначить стороны участка, примыкающие к реке, то его площадь $S$ (м$^2$) находится по формуле $S = x \cdot (60 - 2x)$. Далее с шагом в 3 м для $x$ можно составить таблицу значений $S$, изобразить график и по графику найти приближенное значение ответа.

**4.*** Юра бросил мячик под углом 45° к поверхности земли. Известно, что в этом случае мячик летит по траектории, задаваемой формулой $\frac{S-H}{S} = \frac{S}{S_{макс}}$, где $H$ — высота мячика над поверхностью земли, $S$ — расстояние от Юры до точки, над которой находится мячик, $S_{макс}$ — наибольшее расстояние, на которое улетит мячик (все длины измеряются в метрах). Какой наибольшей высоты достигнет мячик, если $S_{макс} = 20$ м?

*Указание*. Построить часть графика зависимости $H$ от $S$ для $S$, изменяющегося в пределах от 0 до 20. По графику можно будет определить, что ответ приблизительно 5 м. На самом деле этот результат является точным, но обосновать это возможно только в старших классах.

**5.**** Из круга радиусом 15 см нужно вырезать прямоугольник наибольшей площади. Какую площадь имеет такой прямоугольник?

*Указание*. Первый способ. Пусть $AB = 2x$ (см). Тогда (рис. 2)

$$BC = 2\sqrt{225 - x^2} \text{ (см) и } S_{ABCD} = 4x\sqrt{225 - x^2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Имея эту формулу, можно действовать по схеме, рассмотренной в параграфе.

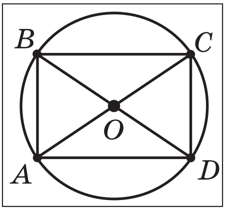


Рис. 2

Второй способ. Максимум площади $S$ прямоугольника достигается в том случае, когда $F = S^2$ максимально. Если обозначить $AB^2 = y$, то $BC^2 = 900 - y$, $F = AB \cdot BC = y(900 - y)$. Исследовать эту зависимость и построить график проще, чем для зависимости, полученной при первом способе решения.

Третий способ. Этот способ решения возможен, однако уходит в сторону от идеологии данной главы. Рассуждать можно так. У каждого из прямоугольников $ABCD$ диагональ $AC$ является диаметром и не зависит от выбора точки $B$, поэтому площадь прямоугольника $ABC$ тем больше, чем больше высота $\Delta ABC$. Ясно, что максимум будет тогда, когда отрезок $OB$ перпендикулярен $AC$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.4.** Определите по графику на рис. 3, чему равно наибольшее значение величины $y$, если $2 < x < 5$.

1) $y = 1$; 2) $y = 2$; 3) $y = 3$; 4) $y = 4$.

*Указание*. Сначала можно выделить нужную часть графика, а потом установить, что наибольшее значение на рассматриваемом промежутке равно 3.

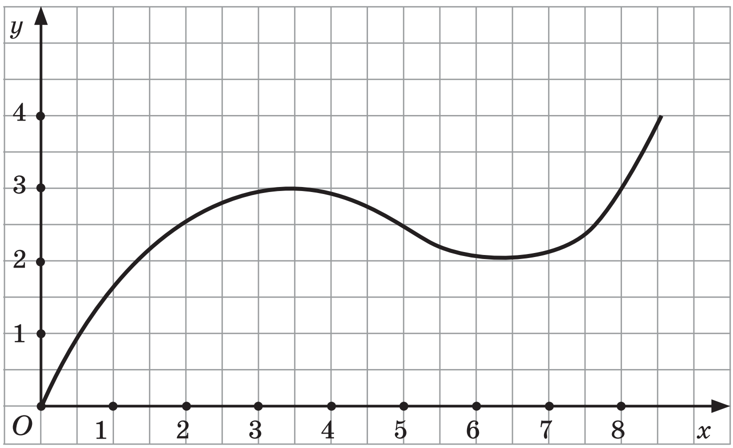


Рис. 3

## § 4. О ВРЕМЕНИ И СКОРОСТЯХ

**Цель параграфа** — познакомиться с понятием обратной пропорциональной зависимости и графическим представлением такой зависимости.

**Особенности параграфа.** В начале параграфа по уже известной схеме строится график зависимости $t = \frac{100}{V}$, где $t$ — время в часах, $V$ — скорость в км/ч. Отмечается, что чем больше скорость движения, тем меньше требуется времени на преодоление пути. Далее последнее замечание приобретает количественное выражение: во сколько раз увеличивается скорость — во столько раз уменьшается время движения. В конце параграфа этот вывод формулируется в общем виде и вводится понятие обратной пропорциональности.

**Предварительные знания, умения и навыки.** Предполагаются известными: примеры построения графиков по формулам.

**Вспомогательные понятия:** обратная пропорциональность.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**4.1.** За какое время можно проехать 100 км на велосипеде со скоростью 12,5 км/ч?

*Ответ.* По формуле $t = \frac{100}{12,5} = 8$ (ч).

**4.2.** Как нужно изменить скорость движения на некотором пути, чтобы затратить на его преодоление в $1\frac{1}{2}$ раза меньше времени, чем при движении со скоростью 40 км/ч?

*Ответ.* Скорость нужно увеличить в $1\frac{1}{2}$ раза, и она должна равняться $40 \cdot 1\frac{1}{2} = 40 \cdot \frac{3}{2} = 60$ (км/ч).

**4.3.** В пункте рассматривается зависимость между временем $t$ и скоростью $V$, при которых пройденный путь $S$ равен 100 км. *Вопрос.* Как показать, что в рассмотренном примере скорость V обратно пропорциональна времени t?

*Ответ.* Из формулы $S = V \cdot t$ выразим скорость и получим $V = \frac{100}{t}$; отсюда видно, что если время $t$ увеличить в $a$ раз, то скорость $V$ уменьшится в $a$ раз; если время $t$ уменьшить в $b$ раз, то скорость $V$ увеличится в $b$ раз.

**Указания к решению наиболее трудных задач.**

**4.*** Моторная лодка пересекает озеро со скоростью 24 км/ч на 10 мин быстрее, чем пересекает его со скоростью 20 км/ч. Нарисуйте графики зависимостей: а) времени, за которое лодка пересекает озеро, от скорости движения; б) скорости движения от времени, за которое нужно пересечь озеро.

*Указание.* а) Из условий задачи можно найти, что ширина озера $S = 20$ км. Поэтому $t = \frac{20}{V}$ (ч), после чего аналогично рассмотренному в параграфе 4 учебника строится график (рис. 1). б) Для построения второго графика достаточно изобразить рисунок, симметричный рис. 1 относительно биссектрисы первого координатного угла, поменять ролями оси координат.

**5.*** Колесо автомобиля на некотором пути делает 10 010 оборотов. Сколько оборотов на том же пути сделает другое колесо, радиус которого: а) в 1,1 раза больше; б) в $1\frac{3}{7}$ раза меньше; в) в 13 раз больше, чем радиус колеса автомобиля?

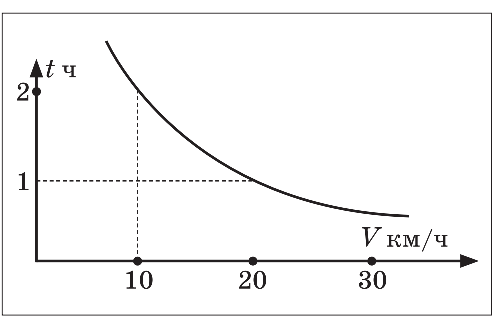


Рис. 1

*Указание.* Если $R$ — радиус колеса в метрах, $N$ — число оборотов, $S$ — пройденный колесом путь в метрах, то $S = 2\pi RN$. Отсюда $N = \frac{S}{2\pi R}$, а значит, $N$ обратно пропорционально $R$. Свойства обратной пропорциональности и равенство $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ позволяют без труда ответить на поставленные вопросы:

а) $\frac{10\,010}{1{,}1} - \frac{7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 100}{11} = 9100$ оборотов;

б) $10\,010 \cdot \frac{10}{7} = 14\,300$ оборотов;

в) 770 оборотов.

**7.**** Круглую лепешку из теста толщиной в 5 мм раскатали в круглую лепешку, радиус которой увеличился в 2 раза. Какую толщину имеет новая лепешка?

*Указание.* Круглую лепешку радиуса $R$ и толщиной $H$ можно считать цилиндром с малой высотой. Поэтому для решения нужно знать формулу $V = \pi R^2 H$ объема цилиндра. Если $R_2$ и $H_2$ — радиус и толщина новой лепешки, то $\pi R_2^2 \cdot H_2 = \pi R^2 H$ . Так как $R_2 = 2R$, то из последнего равенства следует, что $H_2 = \frac{1}{4}H$.

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**1.3.** Ученик из дома до школы с постоянной скоростью добирается за 10 мин. Во сколько раз он должен увеличить скорость ходьбы, чтобы добираться до школы за 8 мин?

1) в $1\frac{1}{6}$ раза; 2) в $1\frac{1}{4}$ раза; 3) в $1\frac{1}{3}$ раза; 4) в $1\frac{1}{2}$ раза.

*Указание.* Чтобы время уменьшить в $\frac{8}{10}$ раза, нужно скорость движения увеличить в $\frac{10}{8}$ раза.

## § 5. ФАНТАСТИЧЕСКИЙ ПРОЕКТ

**Цель параграфа** — на примере занимательной задачи рассмотреть применение графических методов в геометрии.

**Особенности параграфа.** В отличие от предыдущих параграфов график зависимости одной величины от другой не строится по точкам, а в определенном масштабе на координатной плоскости изображается геометрический рисунок. Наличие системы координат облегчает измерение расстояния, которое требуется найти по условию задачи.

На первом уровне предполагается ознакомление учащихся с текстом параграфа и разбором ответов на открытые вопросы к пунктам. На третьем уровне рекомендуется решить еще две задачи, которые для этого уровня нельзя считать трудными.

**Ответы на открытые вопросы к пунктам.**

**5.1.** Какой наименьший объем грунта нужно вынуть при строительстве такого туннеля?

*Ответ.* Объем туннеля не меньше, чем объем прямоугольного параллелепипеда размерами 2 м × 2 м × 3 250 000 м. По формуле его объем равен $2 \cdot 2 \cdot 3\,250\,000 м^3 = 0{,}013\ км^3$ 2 м × × 2 м × 3 250 000 м. Итак, при строительстве туннеля нужно вынуть, как минимум, 13 миллионов кубометров грунта, или 0,013 кубических километров.

**5.2.** В каком масштабе выполнен чертеж на рис. 1?

*Ответ.* Пусть 1 шаг сетки равен 5 мм или 0,000005 км. Тогда масштаб равен 0,000005 : 500 = 1 : 100 000 000.

**5.3.** Как с помощью теоремы Пифагора вычислить наибольшую глубину, на которой проходил бы туннель?

*Ответ.* Рассмотрим прямоугольный треугольник $PCM$, где $P$ — центр Земли. По теореме Пифагора $PM^2 = PC^2 + MC^2$ или $PC^2 = PM^2 - MC^2$. По условию $PM = 6500$ км, $MC = 1625$ км, а поэтому $PC^2 = (6500)^2 - (1625)^2 = 39\,609\,375$. Извлекая из последнего числа квадратный корень, получим $PC \approx 6293{,}6$ км. Наибольшая глубина прохождения туннеля равна разности радиуса Земли и длины отрезка $PC$: 6500 − 6293,6 = 206,4 км. Полученная величина близка к числу, найденному графическими средствами.

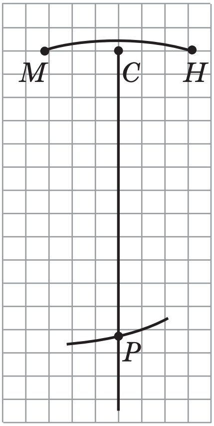

Рис. 1

**Указания по работе с наиболее трудными тестами.**

**2.3.** Радиус некоторой окружности увеличили на $d$ см. При каких значениях $d$ длина окружности увеличится больше, чем на 10 см?

1) 1;  2) 2;  3) 3;  4) 4.

*Указание.* Увеличение длины окружности равно $2\pi d$ и не зависит от того, каким был радиус заданной окружности.

# САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

### Вариант I

**1.** Найдите разложение на простые множители числа 1008.

**2.** Найдите количество составных чисел, которые больше 70 и меньше 90.

**3.*** Найдите все трехзначные числа, которые одновременно кратны 2, 3, 7, 8, 15.

**4.*** Покажите, что число 1147 является составным.

**5.** Сократите дроби: а) $\frac{77}{143}$; б) $\frac{154}{392}$.

### Вариант II

**1.** Найдите разложение на простые множители числа 1584.

**2.** Найдите количество составных чисел, которые больше 60 и меньше 80.

**3.*** Найдите все трехзначные числа, которые одновременно кратны 2, 3, 7, 10, 18.

**4.*** Покажите, что число 1073 является составным.

**5.** Сократите дроби: а) $\frac{91}{156}$; б) $\frac{273}{504}$.

### Вариант III

**1.** Найдите разложение на простые множители числа 936.

**2.** Найдите количество составных чисел, которые больше 40 и меньше 70.

**3.*** Найдите все трехзначные числа, которые одновременно кратны 2, 3, 5, 12, 14.

**4.*** Покажите, что число 1763 является составным.

**5.** Сократите дроби: а) $\frac{119}{182}$; б) $\frac{462}{714}$.

### Вариант IV

**1.** Найдите разложение на простые множители числа 1224.

**2.** Найдите количество составных чисел, которые больше 80 и меньше 100.

**3.*** Найдите все трехзначные числа, которые одновременно кратны 2, 3, 5, 14, 18.

**4.*** Покажите, что число 1273 является составным.

**5.** Сократите дроби: а) $\frac{132}{143}$; б) $\frac{364}{504}$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

### Вариант I

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с катетами $AB$ и $AC$ и углом $ABC$ в $42°$ проведена биссектриса $CM$. Найдите величину угла $BCM$.

**2.** Треугольник $ABC$ равен треугольнику $EFG$ со сторонами $|EF| = 7$ см, $|FG| = 9$ см, $|EG| = 12$ см. Найдите $\frac{2}{7}$ от периметра треугольника $ABC$.

**3.** Внутри плоского угла $ABC$, величина которого равна $144°$, провели луч $BM$ так, что величина угла $ABM$ в пять раз больше величины угла $MBC$. Найдите величину угла $ABM$.

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD = AE = AF$ и $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF$. Покажите, что $BD = CE$.

**5.** Четырехугольник $ABCD$ составлен из двух равных треугольников $ABC$ и $ACD$, у которых $AB = CD$ и $AD = BC$. Покажите, что тогда точки $B$, $D$ и середина отрезка $AC$ лежат на одной прямой.

### Вариант II

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с катетами $AB$ и $AC$ и углом $ACB$ в $38°$ проведена биссектриса $BM$. Найдите величину угла $BCM$.

**2.** Треугольник $ABC$ равен треугольнику $EFG$ со сторонами $|EF| = 5$ см, $|FG| = 8$ см, $|EG| = 17$ см. Найдите $\frac{3}{5}$ от периметра треугольника $ABC$.

**3.** Внутри плоского угла $ABC$, величина которого равна $112°$, провели луч $BM$ так, что величина угла $ABM$ в семь раз больше величины угла $MBC$. Найдите величину угла $ABM$.

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD = AE = AF$ и $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF$. Покажите, что $CE = DF$.

**5.** Четырехугольник $ABCD$ составлен из двух равных треугольников $ABC$ и $ACD$, у которых $AB = AD$ и $CD = BC$. Покажите, что тогда точки $A$, $C$ и середина отрезка $BD$ лежат на одной прямой.

**Вариант III**

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с катетами $AB$ и $AC$ и углом $ABC$ в $64°$ проведена биссектриса $CM$. Найдите величину угла $BCM$.

**2.** Треугольник $ABC$ равен треугольнику $EFG$ со сторонами $|EF| = 8$ см, $|FG| = 9$ см, $|EG| = 11$ см. Найдите $\frac{3}{7}$ от периметра треугольника $ABC$.

**3.** Внутри плоского угла $ABC$, величина которого равна $135°$, провели луч $BM$ так, что величина угла $ABM$ в восемь раз больше величины угла $MBC$. Найдите величину угла $ABM$.

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD = AE = AF$ и $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF$. Покажите, что $BE = CF$.

**5.** Четырехугольник $ABCD$ составлен из двух равных треугольников $ABC$ и $ACD$, у которых $AB = CD$ и $AD = BC$. Покажите, что тогда точки $A$, $C$ и середина отрезка $BD$ лежат на одной прямой.

**Вариант IV**

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с катетами $AB$ и $AC$ и углом $ACB$ в $58°$ проведена биссектриса $BM$. Найдите величину угла $CBM$.

**2.** Треугольник $ABC$ равен треугольнику $EFG$ со сторонами $|EF| = 6$ см, $|FG| = 11$ см, $|EG| = 15$ см. Найдите $\frac{5}{8}$ от периметра треугольника $ABC$.

**3.** Внутри плоского угла $ABC$, величина которого равна $119°$, провели луч $BM$ так, что величина угла $ABM$ в шесть раз больше величины угла $MBC$. Найдите величину угла $ABM$.

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD = AE = AF$ и $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \angle EAF$. Покажите, что $BD = DF$.

**5.** Четырехугольник $ABCD$ составлен из двух равных треугольников $ABC$ и $ACD$, у которых $AB = AD$ и $CD = BC$. Покажите, что тогда отрезки $AC$ и $BD$ перпендикулярны.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

**Вариант I**

**1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ точка $M$ на стороне $AB$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны соответственно так, что $AM = CN$. Докажите, что $AN = CM$.

**2.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AC$ и $BC$ угол $ABC$ имеет величину $72°$. Найдите величину угла $ACB$.

**3.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Докажите, что $\angle CBD = \angle CDB$.

**4.** В прямоугольнике $ABCD$ точки $M$, $N$, $K$, $L$ середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ соответственно. Известно, что $|MN| = 2{,}5$ см. Найдите периметр четырехугольника $MNKL$.

**5.*** В ромбе $ABCD$ точка $M$ на стороне $AD$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны так, что $AM = CN$. Найдите площадь ромба с диагоналями 12 см и 18 см.

### Вариант II

**1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с боковыми сторонами $AB$ и $BC$ точка $M$ на стороне $AB$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны соответственно так, что $BM = BN$. Докажите, что $AN = CM$.

**2.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AC$ и $BC$ угол $ACB$ имеет величину $72°$. Найдите величину угла $ABC$.

**3.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Докажите, что отрезки $AC$ и $BD$ перпендикулярны.

**4.** В прямоугольнике $ABCD$ точки $M$, $N$, $K$, $L$ середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ соответственно. Известно, что $|NK| = 7{,}5$ см. Найдите периметр четырехугольника $MNKL$.

**5.*** В ромбе $ABCD$ точка $M$ на стороне $AD$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны так, что $AM = CN$. Найдите площадь ромба с диагоналями 14 см и 16 см.

### Вариант III

**1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ точка $M$ на стороне $AB$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны соответственно так, что $BM = BN$. Докажите, что $AN = CM$.

**2.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AC$ и $BC$ угол $ABC$ имеет величину $36°$. Найдите величину угла $ACB$.

**3.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Докажите, что $\angle CBD = \angle CDB$.

**4.** В прямоугольнике $ABCD$ точки $M$, $N$, $K$, $L$ середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ соответственно. Известно, что $|KL| = 0{,}5$ см. Найдите периметр четырехугольника $MNKL$.

**5.*** В ромбе $ABCD$ точка $M$ на стороне $AD$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны так, что $AM = CN$. Найдите площадь ромба с диагоналями 8 см и 18 см.

### Вариант IV

**1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с боковыми сторонами $AB$ и $BC$ точка $M$ на стороне $AB$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны соответственно так, что $AM = CN$. Докажите, что $AN = CM$.

**2.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AC$ и $BC$ угол $ACB$ имеет величину $112°$. Найдите величину угла $ABC$.

**3.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены на плоскости так, что $AB = AC = AD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Докажите, что середина отрезка $BD$ лежит на отрезке $AC$.

**4.** В прямоугольнике $ABCD$ точки $M$, $N$, $K$, $L$ середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ соответственно. Известно, что $|ML| = 1{,}5$ см. Найдите периметр четырехугольника $MNKL$.

**5.*** В ромбе $ABCD$ точка $M$ на стороне $AD$ и точка $N$ на стороне $BC$ выбраны так, что $AM = CN$. Найдите площадь ромба с диагоналями 12 см и 16 см.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

### Вариант I

**1.** На числовой прямой точка $A(3)$ находится на расстоянии 2 см от начала отсчета. На каком расстоянии от начала отсчета находится точка $B(-5)$.

**2.** На числовой прямой за единицу измерения длин выбран отрезок от начала отсчета до точки $E(1)$. Чему равно расстояние между точками $A(7)$ и $B(11)$?

**3.** На числовой прямой точка $M(-3)$ находится на расстоянии 6 см от начала отсчета. Чему равно расстояние между точками $A(-17)$ и $B(17)$.

**4.** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(-9)$ и $B(-17)$.

**5.*** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(-18)$ и $B(14)$.

**6.** Найдите самое большое целое число, которое меньше числа $(-2387)$.

**Вариант II**

**1.** На числовой прямой точка $A(-5)$ находится на расстоянии 4 см от начала отсчета. На каком расстоянии от начала отсчета находится точка $B(3)$.

**2.** На числовой прямой за единицу измерения длин выбран отрезок от начала отсчета до точки $E(1)$. Чему равно расстояние между точками $A(-3)$ и $B(18)$?

**3.** На числовой прямой точка $M(4)$ находится на расстоянии 12 см от начала отсчета. Чему равно расстояние между точками $A(-9)$ и $B(9)$.

**4.** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(5)$ и $B(11)$.

**5.*** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(12)$ и $B(-18)$.

**6.** Найдите самое малое целое число, которое больше числа $(-3096)$.

**Вариант III**

**1.** На числовой прямой точка $A(7)$ находится на расстоянии 3 см от начала отсчета. На каком расстоянии от начала отсчета находится точка $B(-4)$.

**2.** На числовой прямой за единицу измерения длин выбран отрезок от начала отсчета до точки $E(1)$. Чему равно расстояние между точками $A(4)$ и $B(-15)$?

**3.** На числовой прямой точка $M(-5)$ находится на расстоянии 15 см от начала отсчета. Чему равно расстояние между точками $A(-11)$ и $B(11)$.

**4.** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(-5)$ и $B(-17)$.

**5.*** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(-14)$ и $B(16)$.

**6.** Найдите самое большое целое число, которое меньше числа $(-3929)$.

**Вариант IV**

**1.** На числовой прямой точка $A(-4)$ находится на расстоянии 5 см от начала отсчета. На каком расстоянии от начала отсчета находится точка $B(9)$.

**2.** На числовой прямой за единицу измерения длин выбран отрезок от начала отсчета до точки $E(1)$. Чему равно расстояние между точками $A(-7)$ и $B(-12)$?

**3.** На числовой прямой точка $M(6)$ находится на расстоянии 18 см от начала отсчета. Чему равно расстояние между точками $A(-15)$ и $B(15)$.

**4.** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(7)$ и $B(15)$.

**5.*** Найдите, какая точка на числовой прямой симметрична середине отрезка с концами $A(14)$ и $B(-10)$.

**6.** Найдите самое малое целое число, которое больше числа $(-2041)$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

### Вариант I

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ длины катетов $AB$ и $BC$ равны 5 см и 7 см. Чему равна площадь квадрата со стороной, равной $AC$?

**2.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13 см и один из катетов равен 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

**3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ со сторонами $|AB| = |BC| = 10$ см и $|AC| = 16$ см. Найдите длину высоты, проведенной из вершины $A$.

**4.** В ромбе со стороной 3 см длина одной из диагоналей равна 3,6 см. Найдите длину другой диагонали этого ромба.

**5.*** Докажите, что треугольник со сторонами 95 мм, 168 мм и 193 мм является прямоугольным.

### Вариант II

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ длины катетов $AB$ и $BC$ равны 3 см и 9 см. Чему равна площадь квадрата со стороной, равной $AC$?

**2.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см и один из катетов равен 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

**3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ со сторонами $|AB| = |BC| = 20$ см и $|AC| = 24$ см. Найдите длину высоты, проведенной из вершины $A$.

**4.** В ромбе со стороной 1,5 см длина одной из диагоналей равна 2,4 см. Найдите длину другой диагонали этого ромба.

**5.*** Докажите, что треугольник со сторонами 88 мм, 105 мм и 137 мм является прямоугольным.

**Вариант III**

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ длины катетов $AB$ и $BC$ равны 7 см и 9 см. Чему равна площадь квадрата со стороной, равной $AC$?

**2.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 26 см и один из катетов равен 10 см. Найдите площадь этого треугольника.

**3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ со сторонами $|AB| = |BC| = 10$ см и $|AC| = 12$ см. Найдите длину высоты, проведенной из вершины $A$.

**4.** В ромбе со стороной 3,5 см длина одной из диагоналей равна 4,2 см. Найдите длину другой диагонали этого ромба.

**5.*** Докажите, что треугольник со сторонами 104 мм, 153 мм и 185 мм является прямоугольным.

**Вариант IV**

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ длины катетов $AB$ и $BC$ равны 4 см и 11 см. Чему равна площадь квадрата со стороной, равной $AC$?

**2.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 17 см и один из катетов равен 8 см. Найдите площадь этого треугольника.

**3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ со сторонами $|AB| = |BC| = 20$ см и $|AC| = 32$ см. Найдите длину высоты, проведенной из вершины $A$.

**4.** В ромбе со стороной 2 см длина одной из диагоналей равна 3,2 см. Найдите длину другой диагонали этого ромба.

**5.*** Докажите, что треугольник со сторонами 105 мм, 208 мм и 233 мм является прямоугольным.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

**Вариант I**

**1.** Найдите сумму натуральных чисел:

а) $314\,206 + 23\,491$; б) $89\,789 + 76\,945$.

**2.** Найдите разность натуральных чисел:

а) $5839 - 1627$; б) $111\,111 - 5089$.

**3.** Известно, что сумма двух целых чисел равна $-1386$ и одно из них на 200 больше другого. Найдите эти числа.

**4.** Найдите сумму

$$(-583) + 279 + 7031 + (-9072) + (-30\,402) + 2799.$$

**Вариант II**

**1.** Найдите сумму натуральных чисел:

а) 157 188 + 84 745;  б) 78 997 + 88 769.

**2.** Найдите разность натуральных чисел:

а) 7465 − 2132;  б) 101 010 − 6147.

**3.** Известно, что сумма двух целых чисел равна −2178 и одно из них на 300 меньше другого. Найдите эти числа.

**4.** Найдите сумму

$$(-751) + 136 + 9018 + (-1305) + (-19\,983) + 3611.$$

**Вариант III**

**1.** Найдите сумму натуральных чисел:

а) 216 597 + 32 174;  б) 87 969 + 78 688.

**2.** Найдите разность натуральных чисел:

а) 6948 − 1317;  б) 110 011 − 6072.

**3.** Известно, что сумма двух целых чисел равна −1974 и одно из них на 300 больше другого. Найдите эти числа.

**4.** Найдите сумму

$$(-236) + 377 + 6023 + (-7016) + (-21\,034) + 4709.$$

**Вариант IV**

**1.** Найдите сумму натуральных чисел:

а) 431 768 + 52 819;  б) 79 898 + 89 978.

**2.** Найдите разность натуральных чисел:

а) 8467 − 2216;  б) 101 101 — 5307.

**3.** Известно, что сумма двух целых чисел равна −2312 и одно из них на 200 меньше другого. Найдите эти числа.

**4.** Найдите сумму

$$(-419) + 231 + 5109 + (-6427) + (20\,901) + 3287.$$

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

**Вариант I**

**1.** Найдите сумму:

а) (−8375) + 1839;  б) (−614) + (−399).

**2.** Найдите разность:

а) 373 − (−192);  б) (−418) − 923.

**3.** Найдите значение выражения

$$|(-653) - (-418)| + |(-653) + (-418)|.$$

**4.*** Найдите все корни уравнения $|(-7) - x| = 9$.

**5.** В 12 часов ночи температура воздуха на улице была −2 °С, к 6 часам утра температура понизилась на 11 °С, затем к 12 часам дня повысилась на 5 °С, а к 6 часам вечера повысилась еще на 3 °С. Какой стала температура в 6 часов вечера?

## Вариант II

**1.** Найдите сумму:

а) $(-4167) + 7143$; б) $(-256) + (-778)$.

**2.** Найдите разность:

а) $373 - (-192)$; б) $(-418) - 923$.

**3.** Найдите значение выражения

$$|(-397) - (-549)| + |(-397) + (-549)|.$$

**4.*** Найдите все корни уравнения $|(-4) + x| = 7$.

**5.** В 12 часов ночи температура воздуха на улице была 4 °С, к 6 часам утра температура понизилась на 9 °С, затем к 12 часам дня повысилась на 3 °С, а к 6 часам вечера повысилась еще на 7 °С. Какой стала температура в 6 часов вечера?

## Вариант III

**1.** Найдите сумму:

а) $(-6219) + 2357$; б) $(-589) + (-463)$.

**2.** Найдите разность:

а) $373 - (-192)$; б) $(-418) — 923$.

**3.** Найдите значение выражения

$$|(-428) - (-173)| + |(-428) + (-173)|.$$

**4.*** Найдите все корни уравнения $|(-3) - x| = 5$.

**5.** В 12 часов ночи температура воздуха на улице была −7 °С, к 6 часам утра температура понизилась на 5 °С, затем к 12 часам дня понизилась на 4 °С, а к 6 часам вечера повысилась на 3 °С. Какой стала температура в 6 часов вечера?

## Вариант IV

**1.** Найдите сумму:

а) $(-5236) + 9714$; б) $(-317) + (-698)$.

**2.** Найдите разность:

а) $373 - (-192)$; б) $(-418) — 923$.

**3.** Найдите значение выражения

$$|(-271) - (-634)| + |(-271) + (-634)|.$$

**4.*** Найдите все корни уравнения $|(-6) + x| = 8$.

**5.** В 12 часов ночи температура воздуха на улице была 2 °С, к 6 часам утра температура понизилась на 7 °С, затем к 12 часам дня повысилась на 15 °C, а к 6 часам вечера понизилась на 3 °C. Какой стала температура в 6 часов вечера?

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

### Вариант I

**1.** В окружности с радиусом 5 см на диаметре $AB$ выбрана точка $M$ так, что $|AM| = 2$ см. Найдите длину хорды этой окружности, которая проходит через точку $M$ и перпендикулярна к $AB$.

**2.** В окружности с центром $O$ и радиусом 13 см проведены хорда $AB$ длиной 10 см и радиус $OC$, который пересекает $AB$ в точке $M$ и перпендикулярен $AB$. Найдите длину отрезка $CM$.

**3.** На окружности отмечены 6 точек. Сколько можно провести хорд окружности с концами в отмеченных точках?

**4.**** Найдите прямоугольный треугольник с катетом 11 см, остальные стороны которого в сантиметрах выражаются целыми числами.

**5.*** Окружности $S_1$ с центром $O_1$ и $S_2$ с центром $O_2$ проходят через концы диаметра окружности $S_3$ с центром $O_3$. Докажите, что точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ принадлежат одной прямой.

### Вариант II

**1.** В окружности с радиусом 10 см на диаметре $AB$ выбрана точка $M$ так, что $|AM| = 2$ см. Найдите длину хорды этой окружности, которая проходит через точку $M$ и перпендикулярна к $AB$.

**2.** В окружности с центром $O$ и радиусом 17 см проведены хорда $AB$ длиной 16 см и радиус $OC$, который пересекает $AB$ в точке $M$ и перпендикулярен $AB$. Найдите длину отрезка $CM$.

**3.** В окружность вписан шестиугольник. Сколько можно провести хорд окружности с концами в вершине этого шестиугольника, которые не являются его сторонами?

**4.**** Найдите прямоугольный треугольник с катетом 9 см, остальные стороны которого в сантиметрах выражаются целыми числами.

**5.*** Окружности $S_1$ с центром $O_1$ и $S_2$ с центром $O_2$ проходят через концы диаметра окружности $S_3$ с центром $O_3$. Докажите, что точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ принадлежат одной прямой.

### Вариант III

**1.** В окружности с радиусом 5 см на диаметре $AB$ выбрана точка $M$ так, что $|AM| = 9$ см. Найдите длину хорды этой окружности, которая проходит через точку $M$ и перпендикулярна к $AB$.

**2.** В окружности с центром $O$ и радиусом 13 см проведены хорда $AB$ длиной 24 см и радиус $OC$, который пересекает $AB$ в точке $M$ и перпендикулярен $AB$. Найдите длину отрезка $CM$.

**3.** На окружности отмечены 7 точек. Сколько можно провести хорд окружности с концами в отмеченных точках?

**4.**** Найдите прямоугольный треугольник с катетом 13 см, остальные стороны которого в сантиметрах выражаются целыми числами.

**5.*** Окружности $S_1$ с центром $O_1$ и $S_2$ с центром $O_2$ проходят через концы диаметра окружности $S_3$ с центром $O_3$. Докажите, что точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ принадлежат одной прямой.

### Вариант IV

**1.** В окружности с радиусом 10 см на диаметре $AB$ выбрана точка $M$ так, что $|AM| = 16$ см. Найдите длину хорды этой окружности, которая проходит через точку $M$ и перпендикулярна к $AB$.

**2.** В окружности с центром $O$ и радиусом 17 см проведены хорда $AB$ длиной 30 см и радиус $OC$, который пересекает $AB$ в точке $M$ и перпендикулярен $AB$. Найдите длину отрезка $CM$.

**3.** В окружность вписан семиугольник. Сколько можно провести хорд окружности с концами в вершине этого семиугольника, которые не являются его сторонами?

**4.**** Найдите прямоугольный треугольник с катетом 7 см, остальные стороны которого в сантиметрах выражаются целыми числами.

**5.*** Окружности $S_1$ с центром $O_1$ и $S_2$ с центром $O_2$ проходят через концы диаметра окружности $S_3$ с центром $O_3$. Докажите, что точки $O_1$, $O_2$, $O_3$ принадлежат одной прямой.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

### Вариант I

**1.** Две окружности с центрами $P$ и $Q$ и с радиусами 5,2 см и 6,7 см лежат по разные стороны от прямой $m$ и касаются прямой $m$ в одной точке. Чему равно расстояние от середины отрезка $PQ$ до прямой $m$?

**2.** Прямая $AB$ касается в точке $A$ окружности с центром $O$ и радиусом 5 см. Известно, что расстояние от центра $O$ до середины отрезка $AB$ равно 13 см. Найдите длину отрезка $AB$.

**3.*** Две равные окружности с радиусами 8 см имеют общую хорду, длина которой 12 см. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

**4.**** Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с катетами $AB$ и $BC$, расположенными на линиях сетки и с длинами в 5 и 10 шагов сетки. После этого нарисуйте окружность с центром $B$, касающуюся прямой $AC$, и объясните, почему ваше построение правильное.

### Вариант II

**1.** Две окружности с центрами $P$ и $Q$ и с радиусами 4,3 см и 7,8 см лежат по одну сторону от прямой $m$ и касаются прямой $m$ в одной точке. Чему равно расстояние от середины отрезка $PQ$ до прямой $m$?

**2.** Прямая $AB$ касается в точке $A$ окружности с центром $O$ и радиусом 8 см. Известно, что расстояние от центра $O$ до середины отрезка $AB$ равно 10 см. Найдите длину отрезка $AB$.

**3.*** Две равные окружности с радиусами 7 см имеют общую хорду, длина которой 10 см. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

**4.**** Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с катетами $AB$ и $BC$, расположенными на линиях сетки и с длинами в 5 и 10 шагов сетки. После этого нарисуйте окружность с центром $B$, касающуюся прямой $AC$, и объясните, почему ваше построение правильное.

### Вариант III

**1.** Две окружности с центрами $P$ и $Q$ и с радиусами 4,9 см и 6,6 см лежат по разные стороны от прямой $m$ и касаются прямой $m$ в одной точке. Чему равно расстояние от середины отрезка $PQ$ до прямой $m$?

**2.** Прямая $AB$ касается в точке $A$ окружности с центром $O$ и радиусом 12 см. Известно, что расстояние от центра $O$ до середины отрезка $AB$ равно 13 см. Найдите длину отрезка $AB$.

**3.*** Две равные окружности с радиусами 6 см имеют общую хорду, длина которой 8 см. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

**4.**** Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с катетами $AB$ и $BC$, расположенными на линиях сетки и с длинами в 5 и 10 шагов сетки. После этого нарисуйте окружность с центром $B$, касающуюся прямой $AC$, и объясните, почему ваше построение правильное.

### Вариант IV

**1.** Две окружности с центрами $P$ и $Q$ и с радиусами 6,1 см и 8,4 см лежат по разные стороны от прямой $m$ и касаются прямой $m$ в одной точке. Чему равно расстояние от середины отрезка $PQ$ до прямой $m$?

**2.** Прямая $AB$ касается в точке $A$ окружности с центром $O$ и радиусом 12 см. Известно, что расстояние от центра $O$ до середины отрезка $AB$ равно 15 см. Найдите длину отрезка $AB$.

**3.*** Две равные окружности с радиусами 7 см имеют общую хорду, длина которой 6 см. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

**4.**** Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с катетами $AB$ и $BC$, расположенными на линиях сетки и с длинами в 5 и 10 шагов сетки. После этого нарисуйте окружность с центром $B$, касающуюся прямой $AC$, и объясните, почему ваше построение правильное.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

### Вариант I

**1.** Найдите произведение $(-7196) \cdot 432$.

**2.** Найдите значение выражения

$$125 \cdot (-32) - 903 \cdot (-16) + 64 \cdot (-163).$$

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении:

$$(2a - b) \cdot (a + b).$$

**4.*** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$a \cdot (2a + b) - b \cdot (a + 2b) - (a^2 - b^2).$$

**5.** Найдите произведение всех целых чисел, которые больше $(-8)$ и меньше 0.

### Вариант II

**1.** Найдите произведение $(-689) \cdot 1544$.

**2.** Найдите значение выражения

$$213 \cdot (-54) - 913 \cdot (-27) + 81 \cdot (-162).$$

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$(a + 3b) \cdot (b - a).$$

**4.*** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$a \cdot (2a - b) - b \cdot (2b + a) - (b^2 - a^2).$$

**5.** Найдите произведение всех целых чисел, которые больше (−9 и меньше (−1).

### Вариант III

**1.** Найдите произведение $3812 \cdot (-678)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$139 \cdot (-32) - 956 \cdot (-16) + 64 \cdot (-171).$$

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$(3a - b) \cdot (a + b).$$

**4.*** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$b \cdot (2b + a) - a \cdot (2a + b) - (b^2 - a^2).$$

**5.** Найдите произведение всех целых чисел, которые меньше (−2) и больше (−9).

### Вариант IV

**1.** Найдите произведение $527 \cdot (-2378)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$(-227) \cdot 54 - (-968) \cdot 27 + 81 \cdot (-171).$$

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$(2a + b) \cdot (a - b).$$

**4.*** Раскройте скобки и приведите подобные в выражении

$$b \cdot (2b - a) - a \cdot (2a - b) - (a^2 - b^2).$$

**5.** Найдите произведение всех целых чисел, которые меньше (−3) и больше (−9).

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

### Вариант I

**1.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 4 шага сетки, окружность $S$ с диаметром $AB$. После этого постройте окружность, симметричную окружности $S$ относительно прямой $AC$.

**2.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 9 шагов сетки. На сторонах $AB$ и $CD$ отметьте соответственно точки $M$ и $N$ так, что

$|AM| = |CN| = \frac{1}{3}AB$. После этого постройте отрезок, симметричный отрезку $AC$ относительно прямой $MN$.

**3.**** Докажите, что если четырехугольник имеет ось симметрии, то ось симметрии содержит две вершины этого четырехугольника.

**4.** Центр окружности $S_1$ с радиусом 2,5 см находится на расстоянии 1,5 см от оси симметрии $m$. При симметрии относительно оси $m$ окружность $S_1$ переходит в окружность $S_2$. Найдите длину общей хорды окружностей $S_1$ и $S_2$.

### Вариант II

**1.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 3 шага сетки и окружность $S$ с центром $A$ и радиусом $AB$. После этого постройте окружность, симметричную окружности $S$ относительно прямой $BD$.

**2.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 9 шагов сетки. На сторонах $AB$ и $CD$ отметьте соответственно точки $M$ и $N$ так, что $|AM| = |CN| = \frac{1}{3}AB$. После этого постройте отрезок, симметричный отрезку $BD$ относительно прямой $MN$.

**3.**** Докажите, что если четырехугольник имеет ось симметрии, то одна из его диагоналей перпендикулярна оси симметрии.

**4.** Центр окружности $S_1$ с радиусом 7,5 см находится на расстоянии 4,5 см от оси симметрии $m$. При симметрии относительно оси $m$ окружность $S_1$ переходит в окружность $S_2$. Найдите длину общей хорды окружностей $S_1$ и $S_2$.

### Вариант III

**1.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 6 шагов сетки, окружность $S$ с диаметром $AB$. После этого постройте окружность, симметричную окружности $S$ относительно прямой $BD$.

**2.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 9 шагов сетки. На сторонах $AB$ и $CD$ отметьте соответственно точки $M$ и $N$ так, что $|AM| = |CN| = \frac{1}{3}AB$. После этого постройте отрезок, симметричный отрезку $BC$ относительно прямой $MN$.

**3.**** Докажите, что если четырехугольник имеет ось симметрии, то у четырехугольника есть две равные соседние стороны.

**4.** Центр окружности $S_1$ с радиусом 2,5 см находится на расстоянии 2 см от оси симметрии $m$. При симметрии относительно оси $m$ окружность $S_1$ переходит в окружность $S_2$. Найдите длину общей хорды окружностей $S_1$ и $S_2$.

### Вариант IV

**1.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 5 шагов сетки и окружность $S$ с центром $B$ и радиусом $BA$. После этого постройте окружность, симметричную окружности $S$ относительно прямой $AC$.

**2.** Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со сторонами на линиях сетки и длиной в 9 шагов сетки. На сторонах $AB$ и $CD$ отметьте соответственно точки $M$ и $N$ так, что $|AM| = |CN| = \frac{1}{3}AB$. После этого постройте отрезок, симметричный отрезку $AB$ относительно прямой $MN$.

**3.**** Докажите, что если четырехугольник имеет ось симметрии, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

**4.** Центр окружности $S_1$ с радиусом 7,5 см находится на расстоянии 6 см от оси симметрии $m$. При симметрии относительно оси $m$ окружность $S_1$ переходит в окружность $S_2$. Найдите длину общей хорды окружностей $S_1$ и $S_2$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

### Вариант I

**1.** Найдите сумму:

а) $\left(-2\frac{7}{9}\right) + 4\frac{2}{3}$;  б) $\left(-1\frac{2}{7}\right) + \left(-2\frac{3}{11}\right)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$\left(-2\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1\frac{1}{4}\right)+\left(-3\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right).$$

**3.** Решите уравнение $\frac{1}{7} - \frac{2}{3}x = 3\frac{5}{14}$.

**4.** Найдите число, обратное к разности $\frac{5}{9} - \frac{7}{24}$.

**5.** Найдите два числа $a$ и $b$ такие, что $a + b = \frac{1}{7}$, $a - b = \frac{3}{4}$.

## Вариант II

**1.** Найдите сумму:

а) $\left(-6\frac{5}{6}\right) + 4\frac{1}{2}$;  б) $\left(-4\frac{5}{9}\right) + \left(-1\frac{6}{7}\right)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$\left(-3\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2\frac{1}{6}\right)+\left(-2\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-4\frac{2}{3}\right).$$

**3.** Решите уравнение $1\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x = 5\frac{1}{6}$.

**4.** Найдите число, обратное к разности $\frac{5}{12} - \frac{17}{18}$.

**5.** Найдите два числа $a$ и $b$ такие, что $a + b = \frac{2}{11}$, $a - b = \frac{5}{6}$.

## Вариант III

**1.** Найдите сумму:

а) $3\frac{1}{4} + \left(-5\frac{5}{12}\right)$;  б) $\left(-2\frac{1}{6}\right) + \left(-3\frac{2}{11}\right)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$\left(-1\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)+\left(2\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right).$$

**3.** Решите уравнение $2\frac{2}{5} - \frac{2}{7}x = 3\frac{7}{15}$.

**4.** Найдите число, обратное к разности $\frac{1}{6} - \frac{7}{27}$.

**5.** Найдите два числа $a$ и $b$ такие, что $a + b = \frac{3}{7}$, $a - b = \frac{7}{12}$.

## Вариант IV

**1.** Найдите сумму:

а) $7\frac{5}{21} + \left(-2\frac{4}{7}\right)$;  б) $\left(-3\frac{4}{7}\right) + \left(-4\frac{5}{6}\right)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(5\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-1\frac{3}{4}\right).$$

**3.** Решите уравнение $\frac{2}{7} - \frac{4}{5}x = 1\frac{2}{21}$.

**4.** Найдите число, обратное к разности $\frac{5}{24}-\frac{8}{9}$.

**5.** Найдите два числа $a$ и $b$ такие, что $a+b=\frac{1}{6}$, $a-b=\frac{5}{7}$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

### Вариант I

**1.** Найдите на числовой прямой расстояние:

а) между точками $A\left(-1\frac{4}{9}\right)$ и $B\left(2\frac{5}{12}\right)$;

б) между точками $P\left(-\frac{7}{9}\right)$ и $Q\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**2.** Найдите на числовой прямой координату середины отрезка с концами $M\left(-56\frac{5}{18}\right)$ и $N\left(57\frac{2}{3}\right)$.

**3.*** Найдите на числовой прямой координаты всех точек, которые находятся на расстоянии $5\frac{3}{7}$ от точки $A\left(-2\frac{1}{5}\right)$.

**4.** Найдите наибольшую из разностей

$$\left(-3\frac{2}{3}\right)-\left(-4\frac{1}{5}\right) \text{ и } 5\frac{4}{9}-4\frac{1}{3}.$$

**5.*** Найдите наибольшую из дробей со знаменателем 7, которая меньше числа $\left(-1\frac{4}{15}\right)$.

### Вариант II

**1.** Найдите на числовой прямой расстояние:

а) между точками $A\left(-3\frac{2}{3}\right)$ и $B\left(4\frac{7}{9}\right)$;

б) между точками $P\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $Q\left(-24\frac{1}{6}\right)$.

**2.** Найдите на числовой прямой координату середины отрезка с концами $M\left(23\frac{3}{4}\right)$ и $N\left(-24\frac{1}{6}\right)$.

**3.*** Найдите на числовой прямой координаты всех точек, которые находятся на расстоянии $3\frac{1}{3}$ от точки $A\left(5\frac{1}{7}\right)$.

**4.** Найдите наименьшую из разностей

$$7\frac{2}{5}-6\frac{1}{3} \text{ и } \left(-1\frac{2}{3}\right)-\left(-2\frac{1}{5}\right).$$

**5.*** Найдите наименьшую из дробей со знаменателем 7, которая больше числа $\left(-2\frac{15}{17}\right)$.

**Вариант III**

**1.** Найдите на числовой прямой расстояние:

а) между точками $A\left(-5\frac{1}{6}\right)$ и $B\left(1\frac{3}{4}\right)$;

б) между точками $P\left(\frac{5}{6}\right)$ и $Q\left(-\frac{1}{4}\right)$.

**2.** Найдите на числовой прямой координату середины отрезка с концами $M\left(2\frac{5}{6}\right)$ и $N\left(1\frac{2}{3}\right)$.

**3.*** Найдите на числовой прямой координаты всех точек, которые находятся на расстоянии $4\frac{1}{7}$ от точки $A\left(-1\frac{2}{5}\right)$.

4. Найдите наибольшую из разностей

$$\left(-5\frac{1}{5}\right)-\left(-4\frac{2}{3}\right) \text{ и } 3\frac{1}{3}-4\frac{2}{5}.$$

**5.*** Найдите наибольшую из дробей со знаменателем 7, которая меньше числа $\left(-2\frac{6}{11}\right)$.

**Вариант IV**

**1.** Найдите на числовой прямой расстояние:

а) между точками $A\left(-2\frac{1}{6}\right)$ и $B\left(-3\frac{5}{8}\right)$;

б) между точками $P\left(\frac{1}{3}\right)$ и $Q\left(-\frac{1}{5}\right)$.

**2.** Найдите на числовой прямой координату середины отрезка с концами $M\left(-3\frac{1}{4}\right)$ и $N\left(-4\frac{5}{6}\right)$.

**3.*** Найдите на числовой прямой координаты всех точек, которые находятся на расстоянии $4\frac{2}{9}$ от точки $A\left(2\frac{5}{12}\right)$.

**4.** Найдите наименьшую из разностей

$$8\frac{1}{3}-9\frac{2}{5} \text{ и } \left(-3\frac{1}{5}\right)-\left(-2\frac{1}{3}\right).$$

**5.*** Найдите наименьшую из дробей со знаменателем 7, которая больше числа $\left(-2\frac{3}{13}\right)$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

### Вариант I

**1.** Найдите отношение $1\frac{1}{24} : \left(-1\frac{7}{18}\right)$.

**2.** Найдите $a^2 - b^2$, если известно, что $a + b = 2\frac{1}{3}$, $a - b = 2\frac{5}{7}$.

**3.** Решите уравнение $\frac{2x}{3} - 1\frac{1}{4} = \frac{3x}{4} - 2\frac{1}{3}$.

**4.*** На числовой прямой точка $C\left(1\frac{2}{3}\right)$ является серединой отрезка $AB$. Найдите координату точки $A$, если точка $B$ имеет координату $\left(-1\frac{1}{3}\right)$.

**5.** Автомобилист едет из одного города в другой со скоростью 80 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 90 км/ч, то приехал бы на 20 мин раньше. Найдите расстояние по дороге между городами.

### Вариант II

**1.** Найдите отношение $\left(-2\frac{1}{12}\right) : -2\frac{2}{9}$.

**2.** Найдите $b^2 - a^2$, если известно, что $a + b = -3\frac{1}{3}$, $a - b = 2\frac{2}{5}$.

**3.** Решите уравнение $\frac{x}{3} - 1\frac{1}{6} = 3\frac{1}{3} - \frac{x}{4}$.

**4.*** На числовой прямой точка $C\left(-1\frac{3}{4}\right)$ является серединой отрезка $AB$. Найдите координату точки $A$, если точка $B$ имеет координату $\left(-2\frac{1}{2}\right)$.

**5.** Автомобилист едет из одного города в другой со скоростью 90 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 80 км/ч, то приехал бы на 15 мин позже. Найдите расстояние по дороге между городами.

### Вариант III

**1.** Найдите отношение $\left(-2\frac{7}{24}\right) : \left(-1\frac{7}{18}\right)$.

**2.** Найдите $a^2 - b^2$, если известно, что $a + b = -5\frac{1}{3}$, $a - b = -1\frac{7}{8}$.

**3.** Решите уравнение $2\frac{3}{4} - \frac{2x}{3} = 3\frac{1}{6} - \frac{3x}{4}$.

**4.*** На числовой прямой точка $C\left(2\frac{1}{3}\right)$ является серединой отрезка $AB$. Найдите координату точки $A$, если точка $B$ имеет координату $\left(-1\frac{2}{3}\right)$.

**5.** Автомобилист едет из одного города в другой со скоростью 90 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 100 км/ч, то приехал бы на 12 мин раньше. Найдите расстояние по дороге между городами.

### Вариант IV

**1.** Найдите отношение $1\frac{1}{48} : \left(-1\frac{1}{27}\right)$.

**2.** Найдите $b^2 - a^2$, если известно, что $a + b = -2\frac{1}{3}$, $a - b = -2\frac{4}{7}$.

**3.** Решите уравнение $2\frac{7}{12} + \frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} + 2\frac{5}{6}$.

**4.*** На числовой прямой точка $C\left(-3\frac{1}{2}\right)$ является серединой отрезка $AB$. Найдите координату точки $A$, если точка $B$ имеет координату $\left(-1\frac{1}{4}\right)$.

**5.** Автомобилист едет из одного города в другой со скоростью 100 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 90 км/ч, то приехал бы на 8 мин позже. Найдите расстояние по дороге между городами.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

### Вариант I

**1.** Укажите, в какой четверти прямоугольной системы координат расположена точка, которая:

а) симметрична точке $A(-3; 8)$ относительно оси ординат;

б) симметрична точке $B(7; -5)$ относительно оси абсцисс.

**2.** Найдите расстояние между точками:

а) $A(2; 4)$ и $B(4; 5)$; б) $M\left(-\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2}\right)$ и $N\left(\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right)$.

**3.** Запишите уравнение окружности с центром $F\left(-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\sqrt{\frac{10}{4}}$. После этого перенесите все слагаемые в левую часть, раскройте скобки и приведите подобные.

**4.**** Найдите координаты центра и радиус окружности с уравнением $(6x + 3)^2 + (6y + 4)^2 = 25$.

**5.*** Определите, лежит ли точка $M\left(-\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right)$ на окружности с уравнением $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

### Вариант II

**1.** Укажите, в какой четверти прямоугольной системы координат расположена точка, которая:

а) симметрична точке $A(5; -7)$ относительно оси ординат;

б) симметрична точке $B(-4; -6)$ относительно оси абсцисс.

**2.** Найдите расстояние между точками:

а) $A(-3; 4)$ и $B(-1; 2)$; б) $M\left(-\frac{2}{3}; -1\frac{1}{2}\right)$ и $N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

**3.** Запишите уравнение окружности с центром $F\left(1\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\sqrt{\frac{10}{4}}$. После этого перенесите все слагаемые в левую часть, раскройте скобки и приведите подобные.

**4.**** Найдите координаты центра и радиус окружности с уравнением $(3x - 4)^2 + (3y + 3)^2 = 25$.

**5.*** Определите, лежит ли точка $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ на окружности с уравнением $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

### Вариант III

**1.** Укажите, в какой четверти прямоугольной системы координат расположена точка, которая:

а) симметрична точке $A(-2; 5)$ относительно оси ординат;

б) симметрична точке $B(3; 8)$ относительно оси абсцисс.

**2.** Найдите расстояние между точками:

а) $A(-2; -3)$ и $B(-3; -1)$; б) $M\left(1\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ и $N\left(\frac{1}{3}; -1\frac{1}{2}\right)$.

**3.** Запишите уравнение окружности с центром $F\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\sqrt{\frac{10}{4}}$. После этого перенесите все слагаемые в левую часть, раскройте скобки и приведите подобные.

**4.**** Найдите координаты центра и радиус окружности с уравнением $(4x - 3)^2 + (4y - 4)^2 = 25$.

**5.*** Определите, лежит ли точка $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ на окружности с уравнением $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$.

### Вариант IV

**1.** Укажите, в какой четверти прямоугольной системы координат расположена точка, которая:

а) симметрична точке $A(-4; -3)$ относительно оси ординат;

б) симметрична точке $B(-5; 1)$ относительно оси абсцисс.

**2.** Найдите расстояние между точками:

а) $A(3; -2)$ и $B(5; -3)$; б) $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ и $N\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

**3.** Запишите уравнение окружности с центром $F\left(-1\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и радиусом $\sqrt{\frac{10}{4}}$. После этого перенесите все слагаемые в левую часть, раскройте скобки и приведите подобные.

**4.**** Найдите координаты центра и радиус окружности с уравнением $(5x+4)^2+(5y-3)^2=25$.

**5.*** Определите, лежит ли точка $M\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ на окружности с уравнением $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16

### Вариант I

**1.** Выразите:

а) скорость 24 км/ч в единицах м/с;

б) скорость 15 м/с в единицах км/ч.

**2.** В пропорции $(-14) : (-12) = 21 : 18$ переставьте:

а) средние члены; б) крайние члены.

**3.** Найдите неизвестный член пропорции

$$x : \frac{2}{3} = \frac{7}{5} : \left(-\frac{4}{9}\right).$$

**4.*** Расставьте каким-нибудь способом числа (−21), (−9), 12, 28 так, чтобы получилась пропорция.

**5.** В пропорции $a : b = c : d$ с положительными членами величину $a$ увеличили в три раза. Как нужно при этом изменить величину $d$, чтобы после этого получилась верная пропорция?

### Вариант II

**1.** Выразите:

а) скорость 27 км/ч в единицах м/с;

б) скорость 10 м/с в единицах км/ч.

**2.** В пропорции $18 : (-24) = (-27) : 36$ переставьте:

а) средние члены; б) крайние члены.

**3.** Найдите неизвестный член пропорции $1{,}2 : 3{,}6 = x : 7{,}5$.

**4.*** Расставьте каким-нибудь способом числа $(-42)$, $(-28)$, 20, 30 так, чтобы получилась пропорция.

**5.** В пропорции $a : b = c : d$ с положительными членами величину $b$ уменьшили в четыре раза. Как нужно при этом изменить величину $d$, чтобы после этого получилась верная пропорция?

### Вариант III

**1.** Выразите:

а) скорость 30 км/ч в единицах м/с;

б) скорость 20 м/с в единицах км/ч.

**2.** В пропорции $24 : 27 = (-40) : (-45)$ переставьте:

а) средние члены; б) крайние члены.

**3.** Найдите неизвестный член пропорции

$$1\frac{1}{3} : x = \left(-3\frac{4}{9}\right) : \left(-1\frac{1}{5}\right).$$

**4.*** Расставьте каким-нибудь способом числа $(-18)$, $(-12)$, 32, 48 так, чтобы получилась пропорция.

**5.** В пропорции $a : b = c : d$ с положительными членами величину $a$ уменьшили в пять раза. Как нужно при этом изменить величину $d$, чтобы после этого получилась верная пропорция?

### Вариант IV

**1.** Выразите: а) скорость 60 км/ч в единицах м/с; б) скорость 5 м/с в единицах км/ч.

**2.** В пропорции $(-36) : 42 = (-42) : 49$ переставьте:

а) средние члены; б) крайние члены.

**3.** Найдите неизвестный член пропорции

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{9}{10} : x.$$

**4.*** Расставьте каким-нибудь способом числа $(-42)$, $(-35)$, 10, 12 так, чтобы получилась пропорция.

**5.** В пропорции $a : b = c : d$ с положительными членами величину $b$ увеличили в шесть раза. Как нужно при этом изменить величину $d$, чтобы после этого получилась верная пропорция?

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17

### Вариант I

**1.** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Найдите:

а) чему равно $y$ при $x = 4\frac{2}{7}$;

б) чему равно $x$, при котором $y = -5\frac{7}{8}$.

**2.*** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = -2\frac{1}{4}$. Найдите, при каком значении $x$ сумма $x + y$ будет равна 500.

**3.** 200 г сметаны жирностью $10\%$ смешали с 300 г сметаны жирностью $15\%$. Какова жирность поучившейся смеси?

**4.** Имеется 190 г раствора, содержащего $3\%$ соли. Сколько граммов соли нужно добавить, чтобы получился раствор, содержащий $5\%$ соли?

**5.*** С каким масштабом на листе бумаги нужно изобразить участок прямоугольной формы со сторонами 20 м и 30 м, чтобы получившийся прямоугольник имел площадь 24 см$^2$?

### Вариант II

**1.** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = \frac{3}{4}$. Найдите:

а) чему равно $y$ при $x = -1\frac{7}{9}$;

б) чему равно $x$, при котором $y = 3\frac{1}{2}$.

**2.*** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = 3\frac{1}{3}$. Найдите, при каком значении $x$ разность $y - x$ будет равна 700.

**3.** 200 г сметаны жирностью $25\%$ смешали с 300 г сметаны жирностью $20\%$. Какова жирность поучившейся смеси?

**4.** Имеется 188 г раствора, содержащего $5\%$ соли. Сколько граммов соли нужно добавить, чтобы получился раствор, содержащий $6\%$ соли?

**5.*** С каким масштабом на листе бумаги нужно изобразить участок прямоугольной формы со сторонами 20 м и 30 м, чтобы получившийся прямоугольник имел площадь 96 см$^2$?

## Вариант III

**1.** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Найдите:

а) чему равно $y$ при $x = 2\frac{5}{7}$;

б) чему равно $x$, при котором $y = -1\frac{2}{3}$.

**2.*** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = -1\frac{2}{3}$. Найдите, при каком значении $x$ сумма $x + y$ будет равна 200.

**3.** 200 г сметаны жирностью 15% смешали с 300 г сметаны жирностью 20% . Какова жирность поучившейся смеси?

**4.** Имеется 190 г раствора, содержащего 4% соли. Сколько граммов соли нужно добавить, чтобы получился раствор, содержащий 5% соли?

**5.*** С каким масштабом на листе бумаги нужно изобразить участок прямоугольной формы со сторонами 40 м и 60 м, чтобы получившийся прямоугольник имел площадь 96 см$^2$?

## Вариант IV

**1.** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = \frac{3}{5}$. Найдите:

а) чему равно $y$ при $x = 2\frac{6}{7}$;

б) чему равно $x$, при котором $y = 2\frac{4}{5}$.

**2.*** Величина $y$ прямо пропорциональна величине $x$ с коэффициентом $k = 1\frac{3}{4}$. Найдите, при каком значении $x$ разность $x - y$ будет равна 600.

**3.** 200 г сметаны жирностью 20% смешали с 300 г сметаны жирностью 25% . Какова жирность поучившейся смеси?

**4.** Имеется 192 г раствора, содержащего 2% соли. Сколько граммов соли нужно добавить, чтобы получился раствор, содержащий 4% соли?

**5.*** С каким масштабом на листе бумаги нужно изобразить участок прямоугольной формы со сторонами 8 м и 12 м, чтобы получившийся прямоугольник имел площадь 24 см$^2$?

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18

### Вариант I

**1.** Найдите произведение $27{,}3 \cdot (-0{,}0584)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$4{,}632 \cdot 2{,}48 + 4{,}2784 \cdot (-11{,}24).$$

**3.** Запишите в виде десятичной дроби число $5\frac{7}{16}$.

**4.** Найдите неизвестный член пропорции

$$4{,}327 : x = 3{,}18 : 4{,}77.$$

**5.** Найдите целую часть произведения $6{,}78 \cdot 8{,}42$.

### Вариант II

**1.** Найдите произведение $(-35{,}4) \cdot 0{,}0273$.

**2.** Найдите значение выражения:

$$3{,}72 \cdot 27{,}8 + (-7{,}44) \cdot 3{,}9.$$

**3.** Запишите в виде десятичной дроби число $-3\frac{9}{16}$.

**4.** Найдите неизвестный член пропорции

$$10{,}8 : 6{,}3 = 4{,}8 : x.$$

**5.** Найдите целую часть произведения $5{,}64 \cdot 7{,}83$.

### Вариант III

**1.** Найдите произведение $4{,}81 \cdot (-0{,}796)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$(-5{,}18) \cdot 6{,}3 + (-2{,}59) \cdot (-2{,}6).$$

**3.** Запишите в виде десятичной дроби число $4\frac{5}{16}$.

**4.** Найдите неизвестный член пропорции

$$5{,}1 : \mathrm{x} = 13{,}6 : 11{,}2.$$

**5.** Найдите целую часть произведения $7{,}39 \cdot 4{,}71$.

### Вариант IV

**1.** Найдите произведение $(-5{,}39) \cdot (-0{,}143)$.

**2.** Найдите значение выражения

$$4{,}73 \cdot (-4{,}8) + 9{,}64 \cdot 7{,}4.$$

**3.** Запишите в виде десятичной дроби число $-2\frac{11}{16}$.

**4.** Найдите неизвестный член пропорции

$$10{,}4 : 16{,}9 = 5{,}6 : x.$$

**5.** Найдите целую часть произведения $8{,}43 \cdot 5{,}69$.

# КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

### Вариант I

**1.** Найдите все делители числа 108.

**2.** Найдите все общие делители чисел 12 и 80.

**3.** Найдите все общие простые делители чисел 42 и 66.

**4.** Найдите: а) НОД (142, 166); б) НОК (36, 90).

**5.**** Найдите такие натуральные числа $a$ и $b$, что НОД $(a, b)$ = = 324, НОК $(a, b)$ = 10 692 и каждое из чисел $a$ и $b$ больше 324.

### Вариант II

**1.** Найдите все делители числа 100.

**2.** Найдите все общие делители чисел 36 и 48.

**3.** Найдите все общие простые делители чисел 180 и 60.

**4.** Найдите: а) НОД (96, 84); б) НОК (35, 42).

**5.**** Найдите два натуральных числа $a$ и $b$ такие, что НОД $(a, b)$ = 432, НОК $(a, b)$ = 9072 и каждое из чисел $a$ и $b$ больше 432.

### Вариант III

**1.** Найдите все делители числа 196.

**2.** Найдите все общие делители чисел 30 и 48.

**3.** Найдите все общие простые делители чисел 52 и 104.

**4.** Найдите: а) НОД (98, 70); б) НОК (45, 36).

**5.**** Найдите два натуральных числа $a$ и $b$ такие, что НОД $(a, b)$ = 288, НОК $(a, b)$ = 11 202 и каждое из чисел $a$ и $b$ больше 288.

### Вариант IV

**1.** Найдите все делители числа 276.

**2.** Найдите все общие делители чисел 32 и 36.

**3.** Найдите все общие простые делители чисел 42 и 63.

**4.** Найдите: а) НОД (54, 81); б) НОК (126, 42).

**5.**** Найдите два натуральных числа $a$ и $b$ такие, что НОД $(a, b)$ = 224, НОК $(a, b)$ = 17 248 и каждое из чисел $a$ и $b$ больше 224.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

### Вариант I

**1.** Вычислите произведение $346 \cdot 972$.

**2.** Разложите на простые множители число 2639.

**3.** Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 245 км, одновременно выехали два автомобиля со скоростями 80 км/ч и 90 км/ч. Через какое время после встречи расстояние между автомобилями будет равно 20 км?

**4.** Найдите наименьшее целое число, которое больше $(-2387)$.

**5.**** Решите уравнение $|x + 5| = 3$.

### Вариант II

**1.** Вычислите произведение $436 \cdot 792$.

**2.** Разложите на простые множители число 5134.

**3.** Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 11 км, одновременно вышли два пешехода со скоростями 3 км/ч и 5 км/ч. Через какое время после встречи расстояние между пешеходами будет равно 1 км?

**4.** Найдите наибольшее целое число, которое меньше $(-1945)$.

**5.**** Решите уравнение $|x - 7| = 5$.

### Вариант III

**1.** Вычислите произведение $646 \cdot 498$.

**2.** Разложите на простые множители число 2873.

**3.** Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 71 км, одновременно выехали два велосипедиста со скоростями 12 км/ч и 15 км/ч. Через какое время после встречи расстояние между велосипедистами будет равно 8 км?

**4.** Найдите наибольшее целое число, которое меньше $(-1745)$ на 2.

**5.**** Решите уравнение $|x + 7| = 15$.

### Вариант IV

**1.** Вычислите произведение $473 \cdot 962$.

**2.** Разложите на простые множители число 3179.

**3.** Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 1100 км, одновременно вылетели два самолета со скоростями 300 км/ч и 500 км/ч. Через какое время после встречи расстояние между самолетами будет равно 100 км?

**4.** Найдите наименьшее целое число, которое больше $(-4575)$ на 3.

**5.**** Решите уравнение $|x - 7| = 15$.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

### Вариант I

**1.** На числовой прямой с единичным отрезком, имеющим длину 0,25 см, отмечены точки $A(25)$ и $B(-37)$. Найдите: а) длину отрезка $AB$; б) координату середины отрезка $AB$.

**2.** Решите уравнения:

а) $2x + 57 = x - 41$; б) $x - (-35) = -18$.

**3.** Вычислите значение выражения

$$(-783) - ((-5382) - (-3197)).$$

**4.*** Найдите значение выражения $9a - 10a + 11a - 12a + 13a - \ldots + 79a - 80a$ при $a = 7$.

**5.** Часы отстали на 3 мин 47 с и показывают 5 ч 23 с. Какое время в этот момент должны показывать верные часы?

### Вариант II

**1.** На числовой прямой с единичным отрезком, имеющим длину 0,75 см, отмечены точки $A(7)$ и $B(-19)$. Найдите: а) длину отрезка $AB$; б) координату середины отрезка $AB$.

**2.** Решите уравнения:

а) $x - 38 = 2x - 29$; б) $(-47) - x = -19$.

**3.** Вычислите значение выражения

$$(-4107) - ((-691) - (-7528)).$$

**4.*** Найдите значение выражения $19a - 20a + 21a - 22a + 23a - \ldots + 89a - 90a$ при $a = 11$.

**5.** Часы отстали на 5 мин 38 с и показывают 9 ч 11 с. Какое время в этот момент должны показывать верные часы?

### Вариант III

**1.** На числовой прямой с единичным отрезком, имеющим длину 1,75 см, отмечены точки $A(11)$ и $B(-33)$. Найдите: а) длину отрезка $AB$; б) координату середины отрезка $AB$.

**2.** Решите уравнения:

а) $x - 25 = 3x - 69$; б) $(-53) - x = -14$.

**3.** Вычислите значение выражения

$$(-3767) - ((-981) - (-7562)).$$

**4.*** Найдите значение выражения $19a - 21a + 23a - 25a + {}$ $+ 27a - \ldots + 79a - 81a$ при $a = 12$.

**5.** Часы отстали на 12 мин 47 с и показывают 8 ч 57 с. Какое время в этот момент должны показывать верные часы?

### Вариант IV

**1.** На числовой прямой с единичным отрезком, имеющим длину 1,25 см, отмечены точки $A(-18)$ и $B(-36)$. Найдите: а) длину отрезка $AB$; б) координату середины отрезка $AB$.

**2.** Решите уравнения:

а) $3x - 18 = 2x - 34$; б) $(-37) - 2x = -84$.

**3.** Вычислите значение выражения

$$(-6775) - ((-365) - (-8745)).$$

**4.*** Найдите значение выражения $10a - 12a + 14a - 16a + {}$ $+ 18a - \ldots + 90a - 92a$ при $a = 8$.

**5.** Часы отстали на 6 мин 28 с и показывают 7 ч 51 с. Какое время в этот момент должны показывать верные часы?

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

### Вариант I

**1.** Найдите произведение $(-297) \cdot 4002$.

**2.** При каких целых $n$ выполнено неравенство $2n < n$?

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(a + 3)(4 - a)$.

**4.** Имеются чашечные весы и три гири в 1 кг, 3 кг и 7 кг. Как отвесить 19 кг крупы, используя ровно два взвешивания?

**5.*** Сумма двух чисел равна 3. Если одно из них увеличить на 2, а другое уменьшить на 1, то их произведение уменьшится на 11. Найдите эти числа.

**6.*** Известно, что произведение двух целых чисел, каждое из которых меньше $(-1)$, равно 161. Найдите эти числа.

### Вариант II

**1.** Найдите произведение $(-431) \cdot (-2003)$.

**2.** При каких целых $m$ выполнено неравенство $m < -m$?

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(b + 5)(2 - b)$.

**4.** Имеются чашечные весы и три гири в 1 кг, 2 кг и 4 кг. Как отвесить 13 кг крупы, используя ровно два взвешивания?

**5.*** Сумма двух чисел равна 5. Если одно из них увеличить на 3, а другое уменьшить на 2, то их произведение увеличится на 14. Найдите эти числа.

**6.*** Известно, что произведение двух целых чисел, каждое из которых меньше $(-1)$, равно 203. Найдите эти числа.

### Вариант III

**1.** Найдите произведение $(-621) \cdot (-4321)$.

**2.** При каких целых $m$ выполнено неравенство $2 \cdot m < -m$?

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(b + 5)(2 - b)$.

**4.** Имеются чашечные весы и три гирьки в 20 г, 20 г и 50 г. Как отвесить 160 г муки, используя ровно два взвешивания?

**5.*** Сумма двух чисел равна 5. Если одно из них увеличить на 4, а другое уменьшить на 3, то их произведение увеличится на 22. Найдите эти числа.

**6.*** Известно, что произведение двух целых чисел, каждое из которых меньше $(-1)$, равно 253. Найдите эти числа.

### Вариант IV

**1.** Найдите произведение $(-477) \cdot 1878$.

**2.** При каких целых $m$ выполнено неравенство $m < (-2) \cdot m$?

**3.** Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражении $(b - 5)((-b) + 4)$.

**4.** Имеются чашечные весы и три гирьки в 100 г, 200 г и 500 г. Как отвесить один с половиной килограмм сахара, используя ровно два взвешивания?

**5.*** Сумма двух чисел равна 1. Если одно из них уменьшить на 3, а другое уменьшить на 2, то их произведение увеличится на 1. Найдите эти числа.

**6.*** Известно, что произведение двух целых чисел, каждое из которых меньше $(-1)$, равно 209. Найдите эти числа.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

### Вариант I

**1.** Найдите значение выражения $\left(2\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{11}\right) + \left(-4\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{7}{9}\right)$.

**2.** Найдите произведение $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{97}{98}\right) \cdot \frac{98}{99}$.

**3.** Решите уравнения:

а) $\frac{3}{4}x - 2\frac{1}{7} = \frac{4}{5}x + \frac{1}{3}$;  б) $\frac{3}{5} : (-x) = \frac{5}{9}$.

**4.** Отец может выкопать траншею под фундамент для бани за 5 ч, его сын — за 7 ч. За сколько часов могут выкопать эту траншею отец с сыном, работая вместе?

### Вариант II

**1.** Найдите значение выражения $\left(3\frac{1}{7}\right) : \left(-\frac{11}{14}\right) - \left(5\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-4\frac{1}{8}\right)$.

**2.** Найдите произведение $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{82}{83}\right) \cdot \frac{83}{84}$.

**3.** Решите уравнения:

а) $\frac{2}{3}x - 1\frac{3}{7} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}x$;  б) $\left(-\frac{7}{9}\right) : (-x) = \frac{9}{14}$.

**4.** Автор может набрать текст статьи за 8 ч, его помощница — за 6 ч. За сколько часов могут набрать текст этой статьи автор и помощница, работая вместе?

### Вариант III

**1.** Найдите значение выражения $\left(3\frac{1}{7}\right) : \left(-\frac{8}{11}\right) - \left(-2\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{7}{9}\right)$.

**2.** Найдите произведение $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{70}{71} \cdot \left(-\frac{71}{72}\right)$.

**3.** Решите уравнения:

а) $\frac{3}{4}x - 1\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}x$;  б) $\frac{4}{7} : (-x) = \frac{7}{8}$.

**4.** Одна бригада каменщиков может сложить стены дома за 50 ч, другая — за 30 ч. За сколько часов могут сложить стены дома обе бригады, работая вместе?

### Вариант IV

**1.** Найдите значение выражения $\left(2\frac{1}{7}\right) : \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(2\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{3}{8}\right)$.

**2.** Найдите произведение $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{88}{89} \cdot \left(-\frac{89}{90}\right)$.

**3.** Решите уравнения:

а) $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}x$;  б) $\left(-\frac{5}{9}\right) : (-x) = \frac{3}{20}$.

**4.** Отец может собрать ведерко ягод за 30 мин, а его сын — за 45 мин. За сколько минут могут собрать это ведерко ягод отец с сыном, собирая вместе?

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

### Вариант I

**1.** Покажите, что значение выражения $\left(-6\frac{2}{3}\right) : \left(-1\frac{5}{6}\right) + \left(1\frac{1}{2}\right) \cdot$ $\cdot \left(-1\frac{1}{11}\right)$ является целым числом.

**2.** Решите уравнение $\frac{x+2}{5} - 1\frac{2}{3} = \frac{x-2}{7}$.

**3.** Найдите значение выражения $\left(-6\frac{5}{37}\right)^2 - \left(8\frac{5}{37}\right)^2$.

**4.** Некто задумал число, увеличил его в 1,5 раза, после этого прибавил к результату $2\frac{3}{4}$; что получилось, умножил на $\frac{2}{3}$ и из полученного результата вычел задуманное число. Сколько оказалось в итоге?

**5.**** Решите уравнение $\left|-3\frac{1}{3} - x\right| = 1\frac{3}{4}$.

### Вариант II

**1.** Покажите, что значение выражения $\left(-3\frac{1}{7}\right) \cdot \left(1\frac{4}{11}\right) - \left(2\frac{1}{4}\right) :$ $: \left(-1\frac{3}{4}\right)$ является целым числом.

**2.** Решите уравнение $\frac{x-2}{3} = \frac{x+3}{5} + 2\frac{1}{7}$.

**3.** Найдите значение выражения $\left(5\frac{3}{41}\right)^2 - \left(-7\frac{3}{41}\right)^2$.

**4.** Некто задумал число, увеличил его в 2,5 раза, после этого прибавил к результату $3\frac{1}{3}$; что получилось, умножил на $\frac{2}{5}$ и из полученного результата вычел задуманное число. Сколько оказалось в итоге?

**5.**** Решите уравнение $\left|2\frac{3}{4} - x\right| = 1\frac{2}{3}$.

### Вариант III

**1.** Покажите, что значение выражения $\left(2\frac{1}{3}\right) : \left(2\frac{4}{5}\right) + \left(5\frac{1}{4}\right) \cdot$ $\cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$ является целым числом.

**2.** Решите уравнение $\frac{x+1}{6} - 1\frac{1}{5} = \frac{x-4}{7}$.

**3.** Найдите значение выражения $\left(-7\frac{7}{29}\right)^2 - \left(9\frac{7}{29}\right)^2$.

**4.** Некто задумал число, увеличил его в 1,6 раза, после этого прибавил к результату $2\frac{4}{5}$; что получилось, умножил на $\frac{5}{8}$ и из полученного результата вычел задуманное число. Сколько оказалось в итоге?

**5.**** Решите уравнение $\left|x + 1\frac{3}{4}\right| = 2\frac{1}{3}$.

### Вариант IV

**1.** Покажите, что значение выражения $\left(-2\frac{2}{3}\right) \cdot \left(1\frac{1}{6}\right) + \left(1\frac{2}{3}\right) :$ $: \left(-1\frac{7}{8}\right)$ является целым числом.

**2.** Решите уравнение $\frac{x-1}{5} = \frac{x+4}{6} - \frac{5}{7}$.

**3.** Найдите значение выражения $\left(4\frac{6}{31}\right)^2 - \left(-6\frac{6}{31}\right)^2$.

**4.** Некто задумал число, увеличил его в 2,4 раза, после этого прибавил к результату $3\frac{3}{5}$; что получилось, умножил на $\frac{5}{12}$ и из полученного результата вычел задуманное число. Сколько оказалось в итоге?

**5.**** Решите уравнение $\left|1\frac{2}{3} - x\right| = 3\frac{3}{4}$.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

### Вариант I

**1.** Найдите значение выражения $5{,}9 : \left(1\frac{5}{7}\right) - 7{,}42 \cdot \frac{5}{12}$.

**2.** Решите уравнение $\frac{x-4{,}3}{2{,}7} = \frac{3{,}9-x}{(-3{,}1)}$.

**3.** Во дворе гуляют куры и кролики, причем кур в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем кроликов. Сколько во дворе кур и сколько кроликов, если у всех вместе 44 ноги?

**4.** Точка $A(-1;\ 1)$ — вершина квадрата, центр которого совпадает с точкой $E(1;\ 1)$. Найдите координаты трех других вершин.

**5.** В автосалоне выставили на продажу автомобиль. Через полгода его цену увеличили на $10\%$. Затем, еще через полгода, цену уменьшили на $10\%$. В результате модуль разности между начальной и последней ценой оказался равным 2400 рублей. Какой была первоначальная цена автомобиля?

### Вариант II

**1.** Найдите значение выражения $3{,}24 \cdot \left(1\frac{7}{12}\right) - 8{,}64 : \left(1\frac{4}{5}\right)$.

**2.** Решите уравнение $\frac{2{,}6 - x}{3{,}4} = \frac{x - 3{,}1}{(-2{,}9)}$.

**3.** В копилке лежат монеты достоинством 2 и 5 рублей, причем двухрублевых в $2\frac{1}{3}$ раза больше, чем пятирублевых. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если общая сумма денег составляет 116 рублей?

**4.** Точка $A(-1;\,3)$ — вершина квадрата, центр которого совпадает с точкой $E(1;\,1)$. Найдите координаты трех других вершин.

**5.** Предприятие выставило акции на продажу. Через неделю они подешевели на $5\%$, а еще через неделю подорожали на $6\%$. В итоге модуль разности между начальной и конечной ценой одной акции оказался равным семи рублям. Какова первоначальная цена одной акции?

### Вариант III

**1.** Найдите значение выражения $6{,}88 : \left(1\frac{5}{9}\right) - 0{,}36 \cdot \left(2\frac{2}{7}\right)$.

**2.** Решите уравнение $\frac{4{,}3 - x}{(-1{,}9)} = \frac{x - 6{,}4}{2{,}2}$.

**3.** На плоскости нарисованы треугольники и квадраты, не имеющие общих вершин, причем квадратов в $2\frac{2}{3}$ раза меньше, чем треугольников. Сколько нарисовано треугольников и сколько квадратов, если у всех вместе 108 сторон?

**4.** Точка $A(1;\,-1)$ — вершина квадрата, центр которого совпадает с точкой $E(-1;\,-1)$. Найдите координаты трех других вершин.

**5.** В автосалоне выставили на продажу автомобиль. Через полгода его цену уменьшили на $10\%$. Затем, еще через полгода, цену увеличили на $10\%$. В результате модуль разности между начальной и последней ценой оказался равным 3600 рублей. Какой была первоначальная цена автомобиля?

### Вариант IV

**1.** Найдите значение выражения $2{,}87 : \left(2\frac{2}{11}\right) - 1{,}04 \cdot \left(1\frac{4}{7}\right)$.

**2.** Решите уравнение $\frac{1{,}9 - x}{(-1{,}8)} = \frac{x - 4{,}2}{2{,}4}$.

**3.** В бочку налили несколько ведер воды по 8 и по 12 литров, причем двенадцатилитровых в $1\frac{1}{5}$ раза меньше, чем восьмилитровых. Сколько восьмилитровых и сколько двенадцатилитровых ведер налито, если общий объем воды составил 216 л?

**4.** Точка $A(1; -3)$ — вершина квадрата, центр которого совпадает с точкой $E(-1; -1)$. Найдите координаты трех других вершин.

**5.** В понедельник доллар подорожал на $5\%$, а во вторник подешевел на $6\%$. В итоге модуль разности между начальной и конечной ценой оказался равным 39 коп. Сколько стоил доллар в воскресенье?

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

### Вариант I

**1.** Разложите на простые множители число 459 459, зная, что число 1001 делится на 7.

**2.** Разделите с остатком:

а) число 11 111 на 18;

б)** число (−583) на 14.

**3.** Даны две окружности с общим центром $O$ и радиусами 3,5 см и 2,1 см. Прямая $m$ касается меньшей окружности и пересекает большую окружность в точках $A$ и $B$. Найдите длину отрезка $AB$.

**4.** Смешали 120 г $10\%$-го раствора соли и 180 г $5\%$-го. Сколько процентов соли в получившейся смеси?

**5.** На плитку любимого шоколада Кате не хватало столько денег, сколько стоит $\frac{2}{3}$ такой плитки. Когда мама добавила Кате 100 рублей, то у нее стало столько денег, сколько нужно на две плитки такого шоколада. Сколько стоит одна плитка такого шоколада?

**6.*** Найдите все значения $x$, при которых выполняется равенство $x - |x - 1| = -5{,}16$.

### Вариант II

**1.** Разложите на простые множители число 232 323, зная, что число 10 101 делится на 13.

**2.** Разделите с остатком:

а) число 22 222 на 17;

б)** число (−817) на 12.

**3.** Из точки $A$ проведена прямая, касающаяся окружности с центром $O$ в точке $B$. Известно, что отрезок $AO$ в 1,25 раза длиннее отрезка $AB$, а радиус окружности равен 6 см. Найдите длину отрезка $AB$.

**4.** Смешали 150 г 12%-го раствора соляной кислоты и 250 г 4%-го. Сколько процентов соляной кислоты в получившейся смеси?

**5.** На любимое мороженое Ване не хватало столько денег, сколько стоит $\frac{1}{4}$ такого мороженого. Когда мама добавила Ване 50 рублей, то у него стало столько денег, что хватило ровно на два таких мороженых. Сколько стоит одно мороженое?

**6.*** Найдите все значения $x$, при которых выполняется равенство $|x + 1| - x = 4{,}16$.

### Вариант III

**1.** Разложите на простые множители число 567 567, зная, что число 1001 делится на 11.

**2.** Разделите с остатком:

а) число 33 333 на 14;

б)** число (−473) на 15.

**3.** Даны две окружности с общим центром $O$ и радиусами 1,5 см и 1,2 см. Прямая $m$ касается меньшей окружности и пересекает большую окружность в точках $A$ и $B$. Найдите длину отрезка $AB$.

**4.** Смешали 100 г 18%-го раствора сахара и 150 г 8%-го. Сколько процентов сахара в получившейся смеси?

**5.** На билет в кукольный театр у Буратино не хватало $\frac{2}{5}$ необходимой суммы. Когда папа Карло добавил ему 7 сольдо, у Буратино стало столько денег, что хватило ровно на два билета. Сколько стоит один билет?

**6.*** Найдите все значения $x$, при которых выполняется равенство $x - |x + 2| = -2{,}86$.

### Вариант IV

**1.** Разложите на простые множители число 292 929, зная, что число 10 101 делится на 37.

**2.** Разделите с остатком:

а) число 44 444 на 15;

б)** число (−457) на 18.

**3.** Из точки $A$ проведена прямая, касающаяся окружности с центром $O$ в точке $B$. Известно, что отрезок $AO$ в 2,6 раза длиннее радиуса окружности, а длина отрезка $AB$ равна 24 см. Найдите радиус окружности.

**4.** Смешали 120 г 12%-го раствора серной кислоты и 160 г 5%-го. Сколько процентов серной кислоты в получившейся смеси?

**5.** Лиса Алиса и кот Базилио заказали в харчевне одну порцию жареных пескарей, но им не хватило денег ровно на четверть порции. Пришлось добавить 5 золотых, отнятых у Буратино, и тогда денег хватило точно на две порции пескарей. Сколько стоила одна порция?

**6.*** Найдите все значения $x$, при которых выполняется равенство $|x - 1| - x = 3{,}72$.

# ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

**Вариант I.** **1.** $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$. **2.** 14. **3.** 840. **4.** $1147 = 31 \cdot 37$. **5.** а) $\frac{7}{13}$; б) $\frac{11}{28}$.

**Вариант II.** **1.** $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$. **2.** 14. **3.** 630. **4.** $1073 = 29 \cdot 37$. **5.** а) $\frac{7}{12}$; б) $\frac{13}{24}$.

**Вариант III.** **1.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$. **2.** 22. **3.** 420. **4.** $1763 = 41 \cdot 43$. **5.** а) $\frac{17}{26}$; б) $\frac{11}{17}$.

**Вариант IV.** **1.** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$. **2.** 16. **3.** 630. **4.** $1273 = 31 \cdot 41$. **5.** а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{13}{18}$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

**Вариант I.** **1.** 24°. **2.** 8 см. **3.** 120°. **4.** $\angle BAD = \angle CAE$.
**Вариант II.** **1.** 26°. **2.** 18 см. **3.** 98°. **4.** $\angle CAE = \angle DAF$.
**Вариант III.** **1.** 13°. **2.** 12 см. **3.** 120°. **4.** $\angle BAE = \angle CAF$.
**Вариант IV.** **1.** 16°. **2.** 20 см. **3.** 102°. **4.** $\angle BAD = \angle DAF$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

**Вариант I.** **2.** 36°. **4.** 10 см. **5.** 108 см$^2$.
**Вариант II.** **2.** 54°. **4.** 30 см. **5.** 112 см$^2$.
**Вариант III.** **2.** 108°. **4.** 2 см. **5.** 72 см$^2$.
**Вариант IV.** **2.** 39°. **4.** 6 см. **5.** 96 см$^2$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

**Вариант I.** **1.** $3\frac{1}{3}$ см. **2.** 4. **3.** 68 см. **4.** $C(13)$. **5.** $D(2)$. **6.** (−2388).

**Вариант II.** **1.** 2,4 см. **2.** 21. **3.** 54 см. **4.** $C(-8)$. **5.** $D(3)$. **6.** (−3095).

**Вариант III.** **1.** $1\frac{5}{7}$ см. **2.** 19. **3.** 66 см. **4.** $C(11)$. **5.** $D(-1)$. **6.** (−3930).

**Вариант IV.** **1.** 11,25 см. **2.** 5. **3.** 90 см. **4.** $C(-11)$. **5.** $D(-11)$. **6.** (−2040).

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

**Вариант I. 1.** 74 см$^2$. **2.** 30 см$^2$. **3.** 6 см. **4.** 4,8 см. **5.** $193^2 - 168^2 = 95^2$.

**Вариант II. 1.** 90 см$^2$. **2.** 96 см$^2$. **3.** 16 см. **4.** 1,8 см. **5.** $137^2 - 105^2 = 88^2$.

**Вариант III. 1.** 130 см$^2$. **2.** 120 см$^2$. **3.** 8 см. **4.** 5,6 см. **5.** $185^2 - 153^2 = 104^2$.

**Вариант IV. 1.** 137 см$^2$. **2.** 60 см$^2$. **3.** 12 см. **4.** 2,4 см. **5.** $233^2 - 208^2 = 105^2$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

**Вариант I. 1.** а) 337 697; б) 166 734. **2.** а) 4212; б) 106 022. **3.** –793, –593. **4.** –29 848.

**Вариант II. 1.** а) 214 933; б) 167 766. **2.** а) 5333; б) 94 863. **3.** –1239, –939. **4.** –9274.

**Вариант III. 1.** а) 248 771; б) 166 657. **2.** а) 5631; б) 103 939. **3.** –1137, –837. **4.** 17 177.

**Вариант IV. 1.** а) 484 587; б) 169 876. **2.** а) 6251; б) 95 794. **3.** –1256, –1026. **4.** –19 120.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

**Вариант I. 1.** а) –6536; б) –1013. **2.** а) 562; б) 183. **3.** 1306. **4.** –16; 2. **5.** –5°.

**Вариант II. 1.** а) 2976; б) –1034. **2.** а) 681; б) –205. **3.** 1098. **4.** –3; 11. **5.** 5°.

**Вариант III. 1.** а) –3862; б) –1052. **2.** а) 845; б) –153. **3.** 856. **4.** –8; 2. **5.** –13°.

**Вариант IV. 1.** а) 4478; б) –1015. **2.** а) 1069; б) 84. **3.** 1268. **4.** –2;14. **5.** 7°.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

**Вариант I. 1.** 8 см. **2.** 1 см. **3.** 15. **4.** 11 см, 60 см, 61 см.

**Вариант II. 1.** 12 см. **2.** 2 см. **3.** 9. **4.** 9 см, 40 см, 41 см.

**Вариант III. 1.** 6 см. **2.** 8 см. **3.** 21. **4.** 13 см, 84 см, 85 см.

**Вариант IV. 1.** 16 см. **2.** 9 см. **3.** 14. **4.** 7 см, 24 см, 25 см.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

**Вариант I. 1.** 0,75 см. **2.** 24 см. **3.** $4\sqrt{7}$см. **4.** *Указание.* Точка касания делит гипотенузу в отношении 1:4.

**Вариант II.** **1.** 4,05 см. **2.** 12 см. **3.** $4\sqrt{6}$ см. **4.** *Указание.* Точка касания делит гипотенузу в отношении 1:4.

**Вариант III.** **1.** 0,85 см. **2.** 10 см. **3.** $4\sqrt{5}$см. **4.** *Указание.* Точка касания делит гипотенузу в отношении 1:4.

**Вариант IV.** **1.** 7,25 см. **2.** 18 см. **3.** $4\sqrt{10}$ см. **4.** *Указание.* Точка касания делит гипотенузу в отношении 1:4.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

**Вариант I.** **1.** –3 108 672. **2.** 16. **3.** $2a^2 + ab - b^2$. **4.** $a^2 - b^2$. **5.** –5040.

**Вариант II.** **1.** –1 063 816. **2.** 27. **3.** $3b^2 - 2ab - a^2$. **4.** $a^2 - b^2$. **5.** –22 680.

**Вариант III.** **1.** –2 584 536. **2.** 16. **3.** $3a^2 + 2ab - b^2$. **4.** $b^2 - a^2$. **5.** 20 160.

**Вариант IV.** **1.** –1 253 206. **2.** 27. **3.** $2a^2 - ab - b^2$. **4.** $b^2 - a^2$. **5.** –5720.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

**Вариант I.** **4.** 4 см.

**Вариант II.** **4.** 12 см.

**Вариант III.** **4.** 3 см.

**Вариант IV.** **4.** 9 см.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

**Вариант I.** **1.** а) $1\frac{8}{9}$; б) $-3\frac{43}{77}$. **2.** $15\frac{3}{4}$. **3.** $-4\frac{23}{28}$. **4.** $3\frac{15}{79}$. **5.** $\frac{25}{56}$, $-\frac{19}{56}$.

**Вариант II.** **1.** а) $-2\frac{1}{3}$; б) $-3\frac{23}{63}$. **2.** $2\frac{11}{12}$. **3.** $-4\frac{2}{3}$. **4.** $-1\frac{17}{19}$. **5.** $\frac{67}{132}$, $-\frac{43}{132}$.

**Вариант III.** **1.** а) $-2\frac{1}{6}$; б) $-5\frac{23}{66}$. **2.** $2\frac{17}{36}$. **3.** $-3\frac{1}{15}$. **4.** $-10\frac{4}{5}$. **5.** $\frac{73}{168}$, $-\frac{25}{168}$.

**Вариант IV.** **1.** а) $4\frac{2}{3}$; б) $-8\frac{17}{42}$. **2.** $-1\frac{13}{24}$. **3.** $-1\frac{1}{84}$. **4.** $-1\frac{23}{49}$. **5.** $\frac{37}{84}$, $-\frac{23}{84}$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

**Вариант I. 1.** а) $3\frac{31}{36}$; б) $\frac{5}{18}$. **2.** $\frac{26}{36}$. **3.** $M\left(3\frac{8}{35}\right)$ и $N\left(-3\frac{22}{35}\right)$. **4.** Вторая. **5.** $-\frac{9}{7}$.

**Вариант II. 1.** а) $8\frac{4}{9}$; б) $\frac{8}{21}$. **2.** $-\frac{5}{24}$. **3.** $M\left(8\frac{10}{21}\right)$ и $N\left(1\frac{17}{21}\right)$. **4.** Первая. **5.** $-\frac{20}{7}$.

**Вариант III. 1.** а) $3\frac{5}{12}$; б) $1\frac{1}{12}$. **2.** $2\frac{1}{4}$. **3.** $M\left(2\frac{26}{35}\right)$ и $N\left(-5\frac{19}{35}\right)$. **4.** Первая. **5.** $-\frac{18}{7}$.

**Вариант IV. 1.** а) $1\frac{11}{24}$; б) $\frac{8}{15}$. **2.** $-4\frac{1}{24}$. **3.** $M\left(6\frac{23}{36}\right)$ и $N\left(-2\frac{29}{36}\right)$. **4.** Вторая. **5.** $-\frac{15}{7}$.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

**Вариант I. 1.** $-1\frac{1}{20}$. **2.** $-4$. **3.** 13. **4.** $4\frac{2}{3}$. **5.** 240 км.

**Вариант II. 1.** $-\frac{15}{16}$. **2.** 8. **3.** 54. **4.** $-1$. **5.** 180 км.

**Вариант III. 1.** $1\frac{13}{20}$. **2.** 10. **3.** 5. **4.** $6\frac{1}{3}$. **5.** 180 км.

**Вариант IV. 1.** $-\frac{63}{64}$. **2.** $-6$. **3.** 15. **4.** $-5\frac{3}{4}$. **5.** 120 км.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

**Вариант I. 1.** а) I; б) I. **2.** а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{\sqrt{26}}{6}$. **3.** $x^2 + y^2 + x - 3y = 0$. **4.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$; $R = \frac{5}{6}$. **5.** Да.

**Вариант II. 1.** а) III; б) II. **2.** а) $\sqrt{8}$; б) $\frac{\sqrt{50}}{6}$. **3.** $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$. **4.** $\left(1\frac{1}{3}; -1\right)$; $R = 1\frac{2}{3}$. **5.** Нет.

**Вариант III. 1.** а) I; б) IV. **2.** а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{\sqrt{74}}{6}$. **3.** $x^2 + y^2 - x + 3y = 0$. **4.** $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$; $R = 1\frac{1}{4}$. **5.** Да.

**Вариант IV.** **1.** а) IV; б) II. **2.** а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{\sqrt{50}}{6}$. **3.** $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$. **4.** $\left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$; $R = 1$. **5.** Нет.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16

**Вариант I.** **1.** а) $6\frac{2}{3}$ м/с; б) 54 км/ч. **3.** $-3\frac{1}{10}$. **4.** $(-9) : (-21) = 12 : 28$. **5.** Уменьшить в 3 раза.

**Вариант II.** **1.** а) $7\frac{1}{2}$ м/с; б) 36 км/ч. **3.** $2\frac{1}{2}$. **4.** $(-28) : (-42) = 20 : 30$. **5.** Уменьшить в 4 раза.

**Вариант III.** **1.** а) $8\frac{1}{3}$ м/с; б) 72 км/ч. **3.** $\frac{8}{21}$. **4.** $(-12) : (-18) = 32 : 48$. **5.** Увеличить в 5 раз.

**Вариант IV.** **1.** а) $16\frac{2}{3}$ м/с; б) 18 км/ч. **3.** $2\frac{5}{8}$. **4.** $(-35) : (-42) = 10 : 12$. **5.** Увеличить в 6 раз.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17

**Вариант I.** **1.** а) $2\frac{6}{7}$; б) $-8\frac{2}{3}$. **2.** −400. **3.** 4 г. **4.** 13% . **5.** 1:500.

**Вариант II.** **1.** а) $-1\frac{1}{3}$; б) $4\frac{2}{3}$. **2.** 300. **3.** 2 г. **4.** 22% . **5.** 1:250.

**Вариант III.** **1.** а) $1\frac{1}{7}$; б) $-3\frac{1}{3}$. **2.** −300. **3.** 2 г. **4.** 18% . **5.** 1:500.

**Вариант IV.** **1.** а) $-2\frac{1}{2}$; б) $4\frac{2}{3}$. **2.** −800. **3.** 4 г. **4.** 23% . **5.** 1:200.

## САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18

**Вариант I.** **1.** −1,594432. **2.** 23,4. **3.** 5,4375. **4.** 3,6. **5.** 57.
**Вариант II.** **1.** −0,96642. **2.** 74,4. **3.** −3,5625. **4.** 2,8. **5.** 44.
**Вариант III.** **1.** −3,82876. **2.** −25,9. **3.** 4,3125. **4.** 4,2. **5.** 34.
**Вариант IV.** **1.** 0,77077. **2.** 47,3. **3.** −2,6875. **4.** 9,1. **5.** 47.

# ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

**Вариант I. 1.** 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108. **2.** 1, 2, 4. **3.** 2, 3. **4.** а) 2; б) 180. **5.** 972 и 3564.

**Вариант II. 1.** 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200. **2.** 1, 2, 3, 4, 6, 12. **3.** 2, 3, 5. **4.** а) 12; б) 210. **5.** 1246 и 3024.

**Вариант III. 1.** 1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196. **2.** 2, 3, 6. **3.** 2, 13. **4.** а) 14; б) 180. **5.** 864 и 3744.

**Вариант IV. 1.** 1, 2, 3, 4, 6, 12, 23, 46, 69, 92, 276. **2.** 2 и 4. **3.** 2, 3, 7. **4.** а) 27; б) 126. **5.** 1568 и 2464.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

**Вариант I. 1.** 336 332. **2.** $2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17$. **3.** 0,125 ч. **4.** −2386. **5.** −2 и −8.

**Вариант II. 1.** 345 312. **2.** $2 \cdot 3^2 \cdot 17^2$. **3.** 0,125 ч. **4.** −1946. **5.** 2 и 12.

**Вариант III. 1.** 321 708. **2.** $13^2 \cdot 17$. **3.** 2 ч 20 мин. **4.** −1747. **5.** 8 и −22.

**Вариант IV. 1.** 455 026. **2.** $11 \cdot 17^2$. **3.** 1 ч 15 мин. **4.** −4572. **5.** 22 и −8.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

**Вариант I. 1.** а) 15,5 см; б) −6. **2.** а) −98; б) −53. **3.** 1402. **4.** −252. **5.** 5 ч 1 мин 10 с.

**Вариант II. 1.** а) 18,5 см; б) −6. **2.** а) −9; б) −28. **3.** −10 944. **4.** −396. **5.** 8 ч 54 мин 33 с.

**Вариант III. 1.** а) 38,5 см; б) −11. **2.** а) −47; б) −39. **3.** −10 348. **4.** −384. **5.** 8 ч 13 мин 44 с.

**Вариант IV. 1.** а) 22,5 см; б) −27. **2.** а) −16; б) −23,5. **3.** −15 155. **4.** −336. **5.** 7 ч 7 мин 19 с.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

**Вариант I. 1.** −1 188 594. **2.** $n < 0$. **3.** $12 + a - a^2$. **4.** 11 кг + + 8 кг. **5.** 5 и −2. **6.** −7 и −23.

**Вариант II. 1.** 863 293. **2.** $m < 0$. **3.** $10 - 3b - b^2$. **4.** 7 кг + 6 кг. **5.** 6 и −1. **6.** −7 и −29.

**Вариант III. 1.** 2 683 341. **2.** $m < 0$. **3.** $(-b^2 - 3b + 10)$. **4.** 90 г + + 70 г. **5.** −11 и −2.

**Вариант IV. 1.** −895 806. **2.** $m < 0$. **3.** $(-b^2 + 9b + 20)$. **4.** 800 г + + 700 г. **5.** −11 и −19.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

**Вариант I. 1.** $3\frac{3}{5}$. **2.** $\frac{1}{33}$. **3.** а) $-30\frac{10}{21}$; б) $-1\frac{21}{25}$. **4.** 2 ч 55 мин.

**Вариант II. 1.** 18. **2.** $\frac{1}{17}$. **3.** а) $-\frac{19}{51}$; б) $1\frac{17}{81}$. **4.** $3\frac{3}{7}$ ч.

**Вариант III. 1.** $\frac{15}{28}$. **2.** $-\frac{1}{18}$. **3.** а) $-14\frac{1}{7}$; б) $-\frac{32}{49}$. **4.** 18,75 ч.

**Вариант IV. 1.** $-1\frac{10}{21}$. **2.** $\frac{1}{45}$. **3.** а) $15\frac{5}{8}$; б) $37\frac{1}{27}$. **4.** 18 мин.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

**Вариант I. 1.** 2. **2.** $8\frac{4}{5}$. **3.** $-28\frac{20}{37}$. **4.** $1\frac{5}{6}$. **5.** $-5\frac{1}{12}$ и $-1\frac{7}{12}$.

**Вариант II. 1.** −3. **2.** $25\frac{4}{7}$. **3.** $-24\frac{12}{41}$. **4.** $1\frac{1}{3}$. **5.** $1\frac{1}{12}$ и $4\frac{5}{12}$.

**Вариант III. 1.** 2. **2.** $19\frac{2}{5}$. **3.** $-32\frac{28}{29}$. **4.** $1\frac{3}{4}$. **5.** $-4\frac{1}{12}$ и $\frac{7}{12}$.

**Вариант IV. 1.** −4. **2.** $4\frac{4}{7}$. **3.** $-20\frac{24}{31}$. **4.** $1\frac{1}{2}$. **5.** $-2\frac{1}{12}$ и $5\frac{5}{12}$.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

**Вариант I. 1.** 0,35. **2.** 7. **3.** 10 кур и 6 кроликов. **4.** (1; 3), (3; 1), (1; −1). **5.** 240 000 руб.

**Вариант II. 1.** 0,33. **2.** 6. **3.** 12 монет по 5 руб. и 28 монет по 2 руб. **4.** (3; 3), (3; −1), (−1; −1). **5.** 1000 руб.

**Вариант III. 1.** 3,6. **2.** −9. **3.** 8 квадратов и 24 треугольника. **4.** (−1; −3), (−3; −1), (−1; 1). **5.** 360 000 руб.

**Вариант IV. 1.** 5,6. **2.** −5. **3.** 10 ведер по 12 л и 12 ведер по 8 л. **4.** (−3; −3), (−3; 1), (1; 1). **5.** 30 руб.

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

**Вариант I. 1.** $3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. **2.** а) $11\,111 = 617 \cdot 18 + 5$; б) $-583 = (-42) \cdot 14 + 5$. **3.** 5,6 см. **4.** 7%. **5.** 60 руб. **6.** −2,08.

**Вариант II.** **1.** $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 37$. **2.** а) $22\,222 = 1307 \cdot 17 + 3$; б) $-817 = (-69) \cdot 12 + 11$. **3.** 6 см. **4.** 7% . **5.** 40 руб. **6.** $-2{,}58$.

**Вариант III.** **1.** $3^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. **2.** а) $33\,333 = 2380 \cdot 14 + 13$; б) $-473 = (-32) \cdot 15 + 7$. **3.** 2,7 см. **4.** 12% . **5.** 5 сольдо. **6.** $-2{,}43$.

**Вариант IV.** **1.** $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37$. **2.** а) $44\,444 = 2962 \cdot 15 + 14$; б) $-457 = (-26) \cdot 18 + 11$. **3.** 10 см. **4.** 8% . **5.** 4 золотых. **6.** $-0{,}86$.

# ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

| | Задание 1 | | | | Задание 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 |
| Глава 1 | | | | | | | | |
| § 1 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2,3 | 1,3 | 2,4 | 1,3,4 |
| § 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 2,4 | 1,2 | 1 | 2,3 |
| Глава 2 | | | | | | | | |
| § 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 1,2 | 1,2,3 | 1,2,3,4 | 1,3,4 |
| § 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 1,4 | 1,3,4 | 1,2,3,4 | 1,3 |
| § 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 1,3, | 2,3 | 2,3 | 1,3,4 |
| Глава 3 | | | | | | | | |
| § 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2,3 | 1,2,4 | 1,4 | 3 |
| § 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1,2,3 | 1,4 | 2,3 | 1 |
| § 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 1,3 | 1,3 | 2,3 | 3,4 |
| Глава 4 | | | | | | | | |
| § 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3,4 | 1,3 | 2,3 | 3,4 |
| § 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1,2,3 | 1,2 | 3,4 | 1,2,3 |
| § 4 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2,3 | 1,3 | 1,3 | 1,4 |
| Глава 5 | | | | | | | | |
| § 1 | 3 | 4 | 4 | 2 | 2,3,4 | 1,2 | 3,4 | 2,4 |
| § 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1,2,3 | 3,4 | 1,3 | 3,4 |
| § 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1,2,4 | 2,3 | 1,4 | 3,4 |
| Глава 6 | | | | | | | | |
| § 1 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2,3 | 3 | 1,3 | 2,4 |
| § 2 | 1 | 4 | 3 | 3 | 1,3 | 1,4 | 4 | 1,2,3,4 |
| § 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1,2 | 3 | 3,4 | 1,2 |

| | Задание 1 | | | | Задание 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Глава 7** | | | | | | | | |
| § 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 2,3,4 | 1,3 | 2,3,4 | 1,4 |
| § 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1,2 | 2,4 | 1,2 | 1,3 |
| § 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1,2 | 2,4 | 1,2,3 | 1,2,4 |
| § 4 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1,2,3 | 1,3 | 2,3 | 1,2,3 |
| **Глава 8** | | | | | | | | |
| § 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3,4 | 1,4 | 1,2,3,4 | 3 |
| § 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 1,2 | 2,3,4 | 2,4 | 1,3 |
| § 3 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1,2,4 | 1,3,4 | 2,3 | 2,3,4 |
| **Глава 9** | | | | | | | | |
| § 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 | 1,3,4 | 1,2,3,4 |
| § 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1,2,4 | 1,2,3 | 3,4 | 2 |
| § 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2,3,4 | 2 | 2 | 2,3 |
| **Глава 10** | | | | | | | | |
| § 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1,3,4 | 1,2,3 | 2,4 | 1,3 |
| § 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2,3,4 | 2,3 | 3,4 | 2,3 |
| § 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2,3 | 1,3 | 3,4 | 1,2 |
| § 4 | 2 | 4 | 1 | 2 | 1,3 | 3,4 | 2 | 1,3,4 |
| **Глава 11** | | | | | | | | |
| § 1 | 3 | 4 | 3 | 4 | 1,3 | 1,3,4 | 1,2 | 3,4 |
| § 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | 1,4 | 3 | 2,3 | 1,3 |
| § 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1,3 | 3,4 | 1,2 | 2,4 |
| **Глава 12** | | | | | | | | |
| § 1 | 4 | 2 | 3 | 3 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 3,4 |
| § 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2,3,4 | 1 | 1,2,3 | 1,2,4 |
| § 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1,2,3,4 | 2,4 | 1,4 | 1,2,4 |

| | Задание 1 | | | | Задание 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Глава 13** | | | | | | | | |
| § 1 | 4 | 2 | 1 | 3 | 1,3,4 | 2,4 | 2,3 | 1,2 |
| § 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2,3,4 | 1,3,4 | 1,2,3 | 1,3 |
| § 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1,4 | 1,3,4 | 2,4 | 2,4 |
| § 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1,4 | 2,4 | 3 | 2,4 |
| § 5 | 2 | 2 | 4 | 3 | 2,3,4 | 1,2 | 4 | 2,3,4 |
| **Глава 14** | | | | | | | | |
| § 1 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1,3,4 | 1,4 | 1,2 | 2,3,4 |
| § 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 1,3 | 2,4 | 2,3 | 1,3 |
| § 3 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1,2,4 | 2,4 | 3,4 | 3,4 |
| **Глава 15** | | | | | | | | |
| § 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2,3 | 2,3,4 | 2,3 | 1,4 |
| § 2 | 4 | 1 | 4 | 2 | 3,4 | 1 | 1,3 | 3,4 |
| § 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2,3 | 1,4 | 1,2,3,4 | 4 |
| § 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 3,4 | 1,2,3 | 3,4 | 1,2 |
| § 5 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2,3,4 | 3,4 | 2,3,4 | 4 |

## СОДЕРЖАНИЕ


Пояснительная записка . . . . . . . . . . 3
Предисловие . . . . . . . . . . 5

*Глава 1.* НАПРАВЛЕНИЕ И КООРДИНАТЫ
§ 1. «Морской бой» . . . . . . . . . . 11
§ 2. Координаты на прямой, на плоскости и в пространстве . . . . 13

*Глава 2.* ДЕЛИТЕЛИ И КРАТНЫЕ
§ 1. Делители натурального числа . . . . . . . . . . 17
§ 2. Простые и составные числа. Сокращение дроби . . . . . . . . . . 21
§ 3. Общие делители и общие кратные . . . . . . . . . . 25

*Глава 3.* ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ
§ 1. Замечательные отрезки в треугольнике . . . . . . . . . . 31
§ 2. Первый признак равенства треугольников . . . . . . . . . . 34
§ 3. Свойства равнобедренного треугольника и ромба . . . . . . 38

*Глава 4.* ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА
§ 1. Отрицательные целые числа . . . . . . . . . . 44
§ 2. Сравнение целых чисел . . . . . . . . . . 46
§ 3. Модуль числа . . . . . . . . . . 47

*Глава 5.* ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ОТРЕЗКОВ
§ 1. Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр . . . . . . . . . . 49
§ 2. Теорема Пифагора . . . . . . . . . . 53
§ 3. Единственность . . . . . . . . . . 56

*Глава 6.* СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
§ 1. Сложение целых чисел . . . . . . . . . . 59
§ 2. Противоположные числа . . . . . . . . . . 62
§ 3. Вычитание целых чисел . . . . . . . . . . 64

*Глава 7.* ОКРУЖНОСТЬ. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ
§ 1. Диаметр и хорда . . . . . . . . . . 67
§ 2. Касательная . . . . . . . . . . 70
§ 3. Вписанные и описанные многоугольники . . . . . . . . . . 73
§ 4. Правильные многогранники . . . . . . . . . . 76

*Глава 8.* УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
§ 1. Умножение целых чисел . . . . . . . . . . 79
§ 2. Буквенные выражения и действия с ними . . . . . . . . . . 81
§ 3. Деление целых чисел . . . . . . . . . . 83

*Глава 9.* ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ
§ 1. Симметрия относительно оси . . . . . . . . . . 87
§ 2. Оси симметрии фигур . . . . . . . . . . 91
§ 3. Зеркальное отражение . . . . . . . . . . 94

*Глава 10.* ДРОБНЫЕ ЧИСЛА
§ 1. Положительные дроби . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97
§ 2. Отрицательные дроби. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
§ 3. Умножение дробей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
§ 4. Деление дробей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103
*Глава 11.* СВОЙСТВА ДРОБЕЙ
§ 1. Координаты точек на числовой прямой . . . . . . . . . . . 107
§ 2. Сравнение дробей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
§ 3. Свойства операций над дробями . . . . . . . . . . . . . . . . 115
*Глава 12.* КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ
§ 1. Прямоугольная система координат . . . . . . . . . . . . . . 119
§ 2. Симметрия относительно координатных осей . . . . . . . 121
§ 3. Расстояние между точками . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123
*Глава 13.* ПРОПОРЦИИ
§ 1. Числовые отношения и отношения величин . . . . . . . . 126
§ 2. Пропорция и ее основное свойство . . . . . . . . . . . . . . 130
§ 3. Прямая пропорциональность . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132
§ 4. Смеси и проценты. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135
§ 5. Масштаб . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138
*Глава 14.* ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ
§ 1. Десятичная запись дробных чисел . . . . . . . . . . . . . . 140
§ 2. Последовательности десятичных приближений . . . . . . 143
§ 3. Бесконечные десятичные дроби . . . . . . . . . . . . . . . . 145
*Глава 15.* ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКОВ НА ПРАКТИКЕ
§ 1. Встреча поездов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148
§ 2. Колодец . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152
§ 3. Как получить наибольший объем? . . . . . . . . . . . . . . 155
§ 4. О времени и скоростях . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
§ 5. Фантастический проект . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
Самостоятельные работы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
Контрольные работы. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
Ответы к самостоятельным работам . . . . . . . . . . . . . . . 202
Ответы к контрольным работам. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207
Ответы к тестам . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210

ФГОС
Инновационная школа

**Козлов Валерий Васильевич,**
**Никитин Александр Александрович,**
**Белоносов Владимир Сергеевич,**
**Мальцев Андрей Анатольевич,**
**Марковичев Александр Сергеевич,**
**Михеев Юрий Викторович,**
**Фокин Михаил Валентинович**

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ
К УЧЕБНИКУ «МАТЕМАТИКА». 6 КЛАСС

Под редакцией академика РАН *В.В. Козлова*
и академика РАО *А.А. Никитина*

Редактор *Е.В. Лебедева*
Художественный редактор *В.В. Тырданова*
Рисунки *Н.В. Кануриной*
Корректор *Т.Г. Люборец*
Верстка *М.О. Кошелева*

Подписано в печать 18.02.13. Формат 60x90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,5.
Тираж 2000 экз. Заказ . Изд. № 16082.

ООО «Русское слово — учебник».
125009, Москва, ул. Тверская, д. 9/17, стр. 5.
Тел.: (495) 969-24-54, 940-65-56.

ISBN 978-5-91218-991-3

9 785912 189913