ФГОС
ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

К УЧЕБНИКУ «МАТЕМАТИКА» 5 КЛАСС

Под редакцией академика РАН В.В. Козлова и академика РАО А.А. Никитина

Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2013

УДК 372.016:51*05(072)
ББК 74.262.21
К53

Авторы-составители:
В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин

К53 **Книга** для учителя к учебнику «Математика». 5 класс. Под редакцией акад. РАН В.В. Козлова и акад. РАО А.А. Никитина /авт.-сост. В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2013. — 256 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

ISBN 978-5-91218-934-0

Издание адресовано учителям математики общеобразовательных учреждений, методистам.

УДК 372.016:51*05(072)
ББК 74.262.21

© В.В. Козлов, 2013
© А.А. Никитин, 2013
© В.С. Белоносов, 2013
© А.А. Мальцев, 2013
© А.С. Марковичев, 2013
© Ю.В. Михеев, 2013
© М.В. Фокин, 2013
© ООО «Русское слово — учебник», 2013

ISBN 978-5-91218-934-0

ФГОС

Инновационная школа

Козлов Валерий Васильевич, Никитин Александр Александрович, Белоносов Владимир Сергеевич, Мальцев Андрей Анатольевич, Марковичев Александр Сергеевич, Михеев Юрий Викторович, Фокин Михаил Валентинович

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

К УЧЕБНИКУ «МАТЕМАТИКА». 5 КЛАСС

Под редакцией академика РАН *В.В. Козлова*
и академика РАО *А.А. Никитина*

Редактор *Е.В. Лебедева*
Художественный редактор *В.В. Тырданова*
Рисунки *Н.В. Кануриной*
Корректор *Г.А. Голубкова*
Верстка *Л.Х. Матвеевой*

Подписано в печать 3.10.12. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 16. Изд. № 16073. Тираж 2000. Заказ

ISBN 978-5-91218-934-0

9 785912 189340

ООО «Русское слово — учебник».
125009, Москва, ул. Тверская, д. 9/17, стр. 5.
Тел.: (495) 969-24-54, 658-66-60.

Пояснительная записка

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности и учитывают психологические особенности учащихся. Такая тенденция в области естественно-научных дисциплин проявилась давно, в частности, это можно видеть по широкому распространению специализированных классов и школ физико-математического профиля. В каждой школе встречаются учащиеся с разными способностями к изучению математики, однако не везде имеются возможности для организации специализированного обучения. Поэтому целесообразно применять учебники, включающие в себя различные уровни изложения материала.

Авторским коллективом профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета, научных сотрудников Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук реализована идея многоуровневого преподавания математики в общеобразовательной школе с 5 по 11 класс в рамках единой концепции.

Остановимся на основных принципах этой концепции.

Математика — единая наука: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, начала математического анализа и так далее являются зависимыми друг от друга дисциплинами. Единое изложение всего предмета подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов.

Математика тесно связана с различными науками. Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Книга для учителя» к учебнику «Математика» для 5 класса общеобразовательных учреждений[1] учебно-методического комплекса из серии «ФГОС. Инновационная школа. Математика» в составе трехуровневых учебников, рабочих тетрадей и дидактических материалов с 5 по 11 класс рассчитана на то, чтобы облегчить работу преподавателей, уменьшить затраты времени и усилий на восприятие замысла и содержания многоуровневого учебника.

Изучать математику целесообразно в единстве ее идей и методов. Единое изложение материала подчеркивает широту математических идей и общность развиваемых методов, тесную связь с другими науками, а также красоту математики как важного элемента общей человеческой культуры.

Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

Развитие интереса к математике является одним из залогов ее качественного усвоения. Использование увлекательных задач позволяет подчеркнуть красоту математики и помогает сделать преподавание математики живым и менее формальным.

Математика носит абстрактный характер, имеет свои законы развития и применяется в различных сферах человеческой деятельности. Умение абстрактно мыслить вырабатывается постепенно, опираясь на конкретные реальные объекты.

Потребности использования математики в различных областях человеческой деятельности различны, так же как раз-

---

[1] Математика: учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. М.: Русское слово, 2012.

личны и природные склонности, способности и типы мышления учащихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объеме. Кроме того, изучение и осознанное восприятие многих математических понятий, свойств и методов требует постепенного перехода от наблюдений и экспериментов к точным формулировкам и доказательствам, неоднократного возвращения к фундаментальным понятиям.

Авторским коллективом из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одаренности детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета создан учебно-методический комплекс, в котором предложены три уровня обучения математике.

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности. Многоуровневое обучение математике, начиная с 5 класса, способно обеспечить минимальные запросы общества к уровню математической подготовки и предоставить всем учащимся широкие возможности для развития своих способностей и получения дополнительных математических знаний. При этом учителя получают возможность строить преподавание с учетом специфики учебных заведений, интересов и уровня подготовки учащихся и при наличии возможности осуществлять углубленное изучение математики. Допредпрофильным обучением мы будем называть обучение более высокого уровня в 5—6 классах, при котором уделяется повышенное внимание элементам логических рассуждений на основе конкретных примеров в дополнение к освоению фактических знаний и алгоритмов. Предпрофильным обучением принято считать обучение более высокого уровня в 7—9 классах, которое отличается не столько тем, что ученики решают в целом более трудные задачи, а скорее более точными и основательными рассуждениями, установлением взаимосвязей различных утверждений. Профильное обучение, наряду со специализированной подготовкой, осуществляемое в старших классах и реализуемое в рамках различных организационных и дидактических форм изучения предмета, рассчитано на то, чтобы учащиеся по окончании старших классов приобретали компетенции, необходимые для последующего обучения в вузах с высокими требованиями к математическим дисциплинам.

Первый уровень предполагает овладение таким минимумом знаний и умений, которые необходимы каждому культурному человеку.

Второй уровень развивает и дополняет первый уровень, тесно с ним связан и содержит часть материала для углубленного изучения математики. Он позволяет обеспечить умения и навыки, необходимые для успешного продолжения обучения в вузе.

Третий уровень — специализированный — рассчитан на воспитание профессионального интереса к математике и сознательное овладение логикой рассуждений.

В 5 классе начинает формироваться единое цельное восприятие математики, закладываются основы для ее последующего изучения. При этом выделяется ряд направлений.

Первое направление связано с развитием понятия числа. С самого начала даются общие представления о натуральных, целых, рациональных и вещественных числах, формируются устойчивые навыки работы с натуральными числами и дробями, на примерах иллюстрируется применение иррациональных чисел.

Второе направление отражает практическое значение математики и связано со сравнением величин и понятием приближения, что естественным образом увязывается с измерением величин. Особую роль при этом играет глава о применении формул в практической деятельности, цель которой — продемонстрировать учащимся широкие возможности применения математики на практике с использованием формул из любого справочника.

Это направление тесно связано с третьим направлением — понятием функциональной зависимости и проявляется также в неявной форме в виде таблиц и некоторых формул.

Четвертое направление — подготовка к систематическому изучению геометрии. Главное внимание обращается на наглядно-понятийное восприятие изучаемого материала. Моделью для наблюдения за свойствами геометрических фигур служит бумага в клеточку, свойства которой неявно принимаются в виде аксиом. Это позволяет достаточно полно изучить свойства прямоугольников и прямоугольных треугольников, изучить основные свойства площади, дать учащимся представления о теореме Пифагора и квадратном корне из числа.

Пятое направление — одновременное изложение арифметических и геометрических понятий — достигается за счет введения элементов числовой прямой и установления соответствия между числами и точками.

Шестое направление связано с логикой доказательств. В 5 классе это направление реализуется только фрагментами, причем в основном общие рассуждения реализуются на конкретных примерах.

Изучение теоретического материала предполагает решение задач и упражнений, ответы на тесты как из учебника, так и из рабочей тетради.

В целом структура учебника по математике для 5 класса достаточно традиционна: учебник разбит на главы, главы — на параграфы, параграфы разбиты на пункты, в конце каждого параграфа формулируются контрольные вопросы и приводятся задачи, упражнения и тесты.

К особенностям изложения материала следует отнести распределение пунктов по уровням изучения и наличие в конце каждого пункта так называемого «открытого» вопроса, предназначенного для того, чтобы учащиеся осмыслили прочитанное и могли найти ответ на поставленный вопрос либо из самого текста пункта, либо на основе ранее изученного материала. Иногда для ответа учащимся нужно попытаться самим дать определения понятий, обобщить некоторые рассуждения и т.п. Чаще всего предполагается, что смысл открытого вопроса является естественным продолжением основной идеи пункта. Тем самым ответ на открытый вопрос можно считать промежуточным итогом изучения материала соответствующего пункта. Открытые вопросы не являются контрольными и не всегда подразумевают наличие точных или конкретных ответов. Открытый вопрос позволяет читателю остановиться и задуматься над только что прочитанным материалом. Иногда ответ на вопрос приводит материал пункта к определенному логическому завершению. Именно поэтому необходимо найти ответы на открытые вопросы либо самостоятельно, либо с посторонней помощью. Разумеется, иногда учащиеся могут дать неверные или неудовлетворительные с математической точки зрения ответы на эти вопросы. В таком случае имеет смысл сравнить приведенный ответ с правильным и выяснить, из каких соображений проистекает правильный ответ. Тем самым делается попытка подвести учащихся к пониманию естественности математических определений, приемов рассуждений.

Материал учебника рассматривается, следуя структуре учебника, по определенной схеме. Сначала определяются **цели,** которые должны достигаться в процессе изучения данной главы, данного параграфа. Затем уточняются **особенности** изложения учебного материала данной главы, данного параграфа, особенности распределения учебного материала по уровням обучения. При этом указываются **предварительные знания, умения и навыки,** предполагаемые у учащихся. Перечисляются также **новые математические понятия и свойства**, изучение которых производится в данном параграфе или данной главе и которые могут быть определены и обоснованы с различной степенью строгости. Указываются также **вспомогательные понятия.** Это преимущественно понятия из жизненной практики или других учебных дисциплин. Вспомогательными на текущем этапе обучения могут оказаться термины, которые только упоминаются в тексте, в полном объеме будут изучаться в дальнейшем, но математическое определение которых давать преждевременно. Многократное возвращение к важнейшим понятиям способствует их лучшему восприятию, расширению кругозора, привитию ощущения «широты мира», осознанию того, что понятия могут вмещать в себя значительно больше, чем изучено на данном этапе.

В «Книге для учителя» приводятся варианты ответов на **открытые вопросы к пунктам**. Во многих случаях это только варианты ответов, так как со стороны учащихся можно ожидать разнообразных, а иногда и неожиданных правильных ответов.

Учебник 5 класса и рабочая тетрадь к нему содержат значительное число непростых задач, преимущественно рассчитанных на третий уровень. В «Книге для учителя» приводятся **указания к решению** большинства **наиболее трудных** или нестандартных **задач.**

Здесь также приведены **указания по работе с наиболее трудными тестами.** В учебнике 5 класса и рабочей тетради к нему содержатся образцы двух видов тестовых заданий. Задания первого вида достаточно традиционны — это одновариантные тесты, рассчитанные на выбор одного верного варианта из числа приведенных. Задания второго вида — многовариантные тесты, рассчитанные на выбор нескольких правильных ответов из числа приведенных. Работа над многовариантными тестами чаще всего предполагает анализ предлагаемых заданий и поиск закономерностей, с учетом которых можно получить правильный ответ, состоящий **в выборе всех верных вариантов.** Среди многовариантных тестов можно найти значительное число непростых задач, в основном рассчитанных на третий уровень. В конце «Книги для учителя» приводятся **ответы ко всем тестам** из учебника и **образцы вариантов самостоятельных и контрольных работ**.

Авторы выражают искреннюю признательность В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровнего обучения. Авторы благодарят М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе в формировании содержания трехуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — В.В. Войтишека, Т.И. Зеленяка и Д.М. Смирнова.

Глава 1
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Цель главы — познакомить учащихся с понятием геометрической фигуры на плоскости, с некоторыми основными типами фигур, дать наглядные представления об элементах геометрических фигур, выработать у учащихся навыки изображения на клетчатой бумаге простейших фигур с помощью циркуля и линейки, заложить основы для восприятия равенства плоских фигур.

Особенности главы. Глава посвящена начальному знакомству с разделом математики, который называется геометрией. Поэтому на первый план выходит наглядность изложения, привлечение значительного числа примеров и неоднократное повторение отдельных понятий. Делается это с той целью, чтобы в начале изучения нового материала не возникало недопонимания из-за неверного восприятия того или иного понятия. Основное содержание главы рассчитано на знакомство с простейшими геометрическими фигурами и их элементами, а также с понятием геометрического равенства фигур.

§ 1. ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Цель параграфа. Познакомиться с понятиями фигур на плоскости и примерами наиболее известных фигур, выработать начальные представления об элементах геометрических фигур, внутренней и внешней части фигуры; привести примеры некоторых практических способов построения фигур.

Особенности параграфа. В параграфе приводятся разнообразные примеры геометрических фигур на плоскости. Учащиеся знакомятся с рисунками треугольника, произвольного четырехугольника, окружности, дуги окружности. При изучении параграфа важное значение имеют наглядность и практические упражнения по изображению геометрических фигур с помощью линейки и циркуля. Следует широко приводить примеры из окружающего мира, дающие представление о той или иной геометрической фигуре, можно предлагать задания по изображению фигур, аналогичных тем, о которых говорится в учебнике, обсуждать особенности получившихся фигур. В результате практической работы у учащихся вырабатываются интуитивные представления о плоскости как о «ровной поверхности», на которой можно рисовать и чертить. Можно обратить внимание на то, что при изображении фигур мы используем только часть плоскости, но при необходимости эту часть плоскости мысленно всегда можно расширить.

На втором и третьем уровнях учащиеся должны научиться воспринимать разницу между замкнутыми и незамкнутыми линиями, между плоскими фигурами и фигурами из отрезков. С помощью раскраски и штриховки учащиеся должны уметь выделять простейшие области, ограниченные линиями.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается, что учащиеся на бытовом (или интуитивном) уровне знакомы с понятиями плоскости и пространства, а также с некоторыми фигурами (квадратом, прямоугольником, окружностью, кругом, ромбом).

Новые математические понятия и свойства: фигура (геометрическая фигура); треугольник; квадрат; ромб; прямоугольник; окружность; дуга окружности.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: параллелограмм; четырехугольник; эллипс.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие примеры частей плоскости можно увидеть в классной комнате?

Варианты ответа. Поверхность стола; поверхность классной доски; поверхность потолка.

1.2. Могут ли концы одного отрезка быть внутренними точками другого отрезка?

Ответ. Да, могут. Для этого можно взять две внутренние точки одного отрезка и считать их концами второго отрезка.

1.3. Сколько различных углов можно нарисовать, используя в качестве вершин углов три точки на рис. 1?

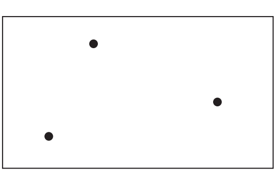


Рис. 1

Вариант ответа. Сколько угодно. Каждую из трех данных точек можно соединять отрезками с любыми другими точками, а не только с данны-

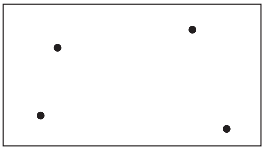


Рис. 2

ми. Поэтому и углов можно нарисовать столько, сколько захотим.

1.4. Сколько получится разных треугольников, если соединить отрезками всевозможные пары точек, изображенных на рис. 2?

Ответ. Четыре треугольника.

1.5. В чем отличие друг от друга геометрических фигур, изображенных в учебнике на рис. 7, 8 и 9?

Ответ. На рис. 7 фигура состоит только из отрезков. На рис. 8 к предыдущей фигуре добавляются новые точки. На рис. 9 к первой фигуре также добавляются новые точки, но не такие, которые добавлялись во втором случае. Можно увидеть и другие отличия. Например, фигуры на рисунках 7 и 8 — ограниченные, а фигура на рис. 9 — неограниченная.

1.6. Как при помощи одних только ножниц вырезать ромб из листа бумаги?

Ответ. Сначала перегнуть лист пополам, а затем еще раз перегнуть, совместив части края первого сгиба. После этого ножницами отрезать «уголок» и развернуть его.

1.7. Как разрезать прямоугольник на две части, из которых можно составить треугольник?

Ответ. Провести прямую линию разреза из вершины к середине одной из противолежащих сторон.

1.8. Как называется ромб, в котором имеются четыре равных угла?

Ответ. Квадрат, прямоугольник.

1.9. Какие из рассмотренных выше фигур являются параллелограммами?

Ответ. Ромб, прямоугольник, квадрат.

1.10. Какие геометрические фигуры вы можете изобразить с помощью линейки?

Вариант ответа. Ученики могут изобразить одну из перечисленных в тексте фигур, могут изобразить некоторый многоугольник, незамкнутую ломаную, многоугольную область, внешнюю область для многоугольника и т.д.

1.11. Какие геометрические фигуры изображаются при помощи циркуля?

Вариант ответа. Окружность, полуокружность, дуги окружности, фигуры, составленные из дуг разных окружностей или ими ограниченные. Примером может служить фигура, ограниченная двумя дугами пересекающихся окружностей. Такие фигуры называются луночками Гиппократа — по имени древнегреческого математика.

1.12. Какие геометрические фигуры на плоскости вы можете изобразить при помощи циркуля и линейки?

Вариант ответа. Например, окружность, квадрат. Кроме примеров из учебника желательно изобразить полуокружность, часть окружности, отрезок и др.

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.** При помощи линейки проведите отрезок. Затем проведите другой отрезок так, чтобы получившиеся отрезки имели больше одной общей точки.

Указание. Например, нарисовать один из отрезков внутри другого. Второй отрезок желательно изобразить другим цветом, предварительно приложив линейку к первому отрезку.

15.** Найдите пример такого расположения четырех точек на листе бумаги, чтобы отрезок, соединяющий две произвольные точки из этих четырех, не имел общих точек с отрезком, соединяющим оставшиеся две точки.

Указание. Выбрать три вершины какого-нибудь треугольника и еще одну точку внутри него. Другими словами, эти четыре точки должны быть вершинами невыпуклого четырехугольника.

36.** Изобразите три окружности, имеющие только две общие точки.

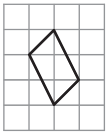
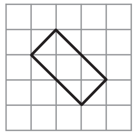
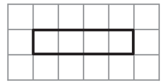
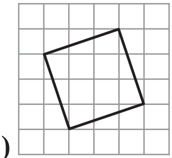
Указание. Важно понять, что через две различные точки можно провести сколь угодно много окружностей, причем центры этих окружностей расположены на прямой. Поэтому можно выбрать центры окружностей на одной прямой, взять еще одну точку вне прямой и через эту точку провести окружности с выбранными центрами.

43.** Нарисуйте окружность. Отметьте на ней точку. Затем нарисуйте вторую окружность так, чтобы отмеченная точка была единственной общей точкой этих окружностей.

Указание. Выбрать на одной прямой три точки, две из них считать центрами окружностей, а третью — общей точкой. При таком подходе к решению естественным образом возникают два различных случая расположения окружностей.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из изображенных фигур являются прямоугольниками?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

Указание. Ответ 1 не подходит, так как есть угол, который меньше другого угла.

§ 2. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Цель параграфа. Ознакомиться с клетчатой бумагой, некоторыми многоугольниками, их элементами, названиями и способами обозначений.

Особенности параграфа. В параграфе на основе понятий треугольника и прямоугольника вырабатываются общие представления о многоугольниках, вершинах и сторонах многоугольников, вводятся соответствующие обозначения. Понятие угла затрагивается только на уровне названия и примера прямого угла на клетчатой бумаге. С помощью введенных терминов описываются некоторые свойства клетчатой бумаги. При изучении параграфа следует обратить внимание на то, чтобы учащиеся усвоили терминологию, научились приводить примеры четырехугольника, пятиугольника и некоторых других многоугольников, правильно их обозначать.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: прописные буквы латинского алфавита, например, A, B, C, D, E, F, ..., M, N, K, L, P, R, S, T; строчные буквы латинского алфавита, например, x, y, z, t, v, a, b, d, r.

Новые математические понятия и свойства: многоугольник; вершина многоугольника; сторона многоугольника; соседние вершины; соседние стороны; противоположные стороны; угол в многоугольнике.

Вспомогательные понятия: порядок перечисления вершин; одинаковые стороны.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: угол; прямой угол.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Что вам известно о прямоугольниках и квадратах?

Вариант ответа. У квадрата все углы одинаковы и все стороны одинаковы. У прямоугольника все углы также одинаковы, но соседние стороны могут быть разными.

2.2. Сколько существует различных обозначений одного и того же треугольника с вершинами M, N и K?

Ответ. Шесть обозначений. Эти способы могут появиться при полном переборе первой из вершин и последующих продолжений.

2.3. Сколько существует различных обозначений одного и того же четырехугольника $PQRS$?

Ответ. Восемь. Для получения такого ответа нужно понять, что запись в определенном порядке двух соседних вершин можно продолжить только одним способом.

2.4. Какие фигуры, содержащие четыре точки, соединенные отрезками, но не являющиеся четырехугольниками, вы можете нарисовать при помощи линейки?

Вариант ответа. Например, можно рассмотреть 4 точки, лежащие на одной прямой.

2.5. Может ли пятиугольник иметь четыре стороны?

Ответ. Не может, потому что если выберем на плоскости пять точек и проведем только четыре отрезка с концами в этих точках, то найдутся точки, которые не будут общими для каких-то двух из приведенных отрезков.

2.6.* Чем отличаются соседние вершины многоугольника от не соседних?

Ответ. Соседние вершины соединяет одна из сторон, не соседние вершины не соединены стороной многоугольника.

2.7.* Какие фигуры могут получиться, если изменить порядок перечисления вершин прямоугольника?

Ответ. Может получиться тот же прямоугольник, а может получиться линия с самопересечением. При ответе на этот вопрос целесообразно последовательно рисовать стороны соответствующей фигуры, используя контур данного прямоугольника.

2.8. Что вы знаете об углах?

Вариант ответа. Угол между отрезками с общей вершиной.

2.9. Как из листа бумаги при помощи ножниц можно вырезать прямой угол?

Ответ. Сначала перегнуть лист пополам, а затем еще раз перегнуть, совместив части края первого сгиба. Разрезать по линиям сгиба.

2.10.** Какой четырехугольник можно было бы назвать «равноугольником с четырьмя вершинами»?

Ответ. Прямоугольник.

2.11. Как вы понимаете выражение «одинаковые квадраты»?

Вариант ответа. Если два квадрата вырезать, то их можно совместить, положив один на другой.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.** Каким числом способов можно записать обозначение пятиугольника $KLMNO$?

Указание. Всего десять способов. В качестве первой буквы можно выбрать одну из 5 букв, а дальше продолжить запись возможно только двумя способами. Такой подход является общим и позволяет получить все возможные способы обозначения любого конкретного многоугольника.

16.** Разместите на плоскости пять точек — A, B, C, D и E так, чтобы они были вершинами пятиугольника $ABCDE$. Переставьте в этой записи вторую и четвертую буквы. Изобразите фигуру, соответствующую полученной записи. Приведите пример, когда фигура $ADCBE$ будет многоугольником.

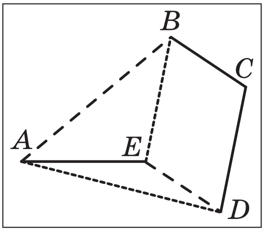


Рис. 1

Указание. Один из примеров приведен на рис. 1, где по-разному отмеченными отрезками указано два способа получения пятиугольников.

17. На рис. 2 изображен треугольник, имеющий одинаковые стороны. Вырежьте из бумаги четыре таких треугольника. Какие многоугольники можно из них сложить, совмещая целиком некоторые стороны этих треугольников?

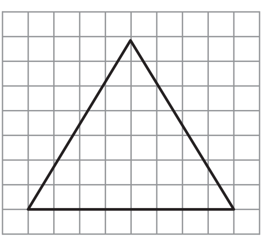


Рис. 2

Указание. Складывая указанным способом три из этих треугольников, можно получить только равнобедренную трапецию. Прикладывание четвертого треугольника приводит либо к треугольнику, либо к параллелограмму, либо к шестиугольнику.

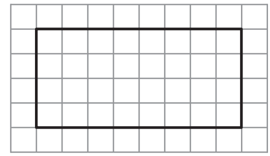


Рис. 3

18. Вырежьте из бумаги четыре таких прямоугольника, как на рис. 3. Какие многоугольники можно сложить из них, совмещая целиком некоторые стороны этих прямоугольников?

Указание. Всего можно получить многоугольники семи видов.

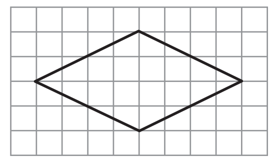


Рис. 4

19. Вырежьте из бумаги три таких ромба, как на рис. 4. Какие многоугольники можно сложить из них, совмещая целиком некоторые стороны этих ромбов?

Указание. Всего можно получить многоугольники пяти видов.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

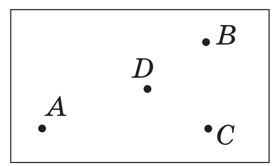


Рис. 5

1.2. Точки поставлены так, как на рис. 5. Сколько всего четырехугольников можно получить, по-разному соединяя эти точки?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Указание. Можно получить четырехугольники $ABCD$, $ADCB$, $ACBD$.

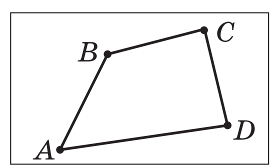


Рис. 6

1.4. Известно, что если на плоскости попарно соединять 15 различных точек, то всего получится 105 различных отрезков. Сколько всего отрезков можно получить, попарно соединяя 16 различных точек?

1) 120; 2) 121; 3) 210; 4) 240.

Указание. Соединим сначала 15 точек отрезками. Получится 105 отрезков. Теперь 16-ю точку соединим со всеми оставшимися. Получится еще 15 отрезков. Итого: 120 отрезков.

2.1. Какие из записей не являются обозначениями многоугольника, изображенного на рис. 6?

1) $ABCD$; 2) $BCAD$;

3) $ADBC$; 4) $CADB$.

Указание. В случае верного ответа должны получиться линии с самопересечениями.

§ 3. РАВЕНСТВО ФИГУР

Цель параграфа — заложить основы восприятия понятия геометрического равенства фигур на плоскости.

Особенности параграфа. В параграфе начинается знакомство с одним из самых важных понятий геометрии — равенством фигур. Понятие равенства фигур является сложным, и к нему придется возвращаться неоднократно. Сначала на уровне материальных моделей из бумаги или картона вырабатывается представление об «одинаковости» некоторых фигур и о возможности получения копии данной фигуры, то есть ее второго экземпляра. Затем на примере фигур, составленных из клеточек клетчатой бумаги, проверяется возможность совмещения копии и фигуры. На основе приведенных наглядных рассуждений вводится понятие равенства двух плоских фигур: две фигуры на плоскости называются равными, если существует перемещение, при котором копия первой фигуры полностью совмещается со второй фигурой. Следует иметь в виду, что понятие равенства непросто, и для того, чтобы идея перемещения при установлении равенства была усвоена учащимися, требуются усилия. Нужно научиться изготовлять копии фигур и выполнять перемещения разного вида: повороты, переносы копии, а иногда и переворачивания копии другой стороной. Следует обратить внимание учащихся на то, что в отдельных случаях для достижения совмещения возможны разные способы перемещения копии.

На втором уровне предлагается рассмотреть игрушку С. Лойда с иллюзией исчезновения одного из охотников. На третьем уровне формулируются основные свойства равенства геометрических фигур. На примере одного из них приводятся рассуждения, поясняющие, почему такие свойства имеют место.

Новые математические понятия и свойства: копия фигуры; перемещение; совмещение (фигуры и копии); равенство фигур; свойства равенства геометрических фигур.

Вспомогательные понятия: вертикальная линия; горизонтальная линия; разбиение фигуры на части; правила, законы и свойства.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как показать, что на клетчатой бумаге любые две клеточки с одинаковыми сторонами равны?

Вариант ответа. Если сделать копию одного из квадратов, то наложением ее можно совместить со вторым квадратом.

При ответе на этот вопрос целесообразно разъяснить, что равенство фигур отличается от сходства («похожести») фигур.

3.2. На рис 1. изображен прямоугольник $ABCD$. Как проверить, что треугольники ABC и BCD равны?

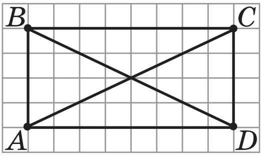


Рис. 1

Ответ. Сделать копию треугольника ABC, перевернуть ее, а затем переместить до совмещения с треугольником BCD.

3.3.** Как можно пояснить второе свойство равенства фигур из пункта 3.2?

Вариант ответа. Если фигура A равна фигуре B, то копия фигуры A и фигура B совпали, и копию фигуры A можно считать копией фигуры B. Совместив эту копию фигуры B (она же копия фигуры A) с фигурой C в силу равенства фигур B и C, заключаем, что копия фигуры A совместилась с фигурой C. Тем самым фигуры A и C равны.

3.4.* Какой из охотников, по вашему мнению, исчез на рис.3 после поворота?

Ответ. Прежде чем отвечать на поставленный вопрос, полезно поупражняться с более простой аналогичной головоломкой из задачи 27**. После этого можно заметить, что «исчез» охотник, который находился ближе всех (по ходу часовой стрелки) к стоящему внизу мальчику на рис. 2.

Рис. 2

Рис. 3

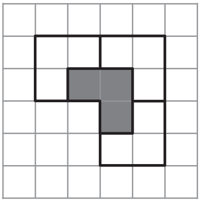


Рис. 4

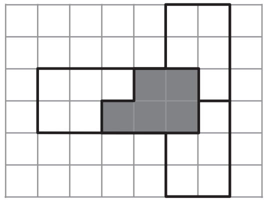


Рис. 5

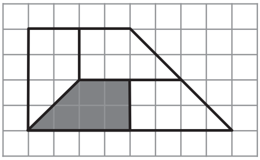


Рис. 6

3.5. Сколько способов перемещения копии точки A в точку B вы знаете?

Вариант ответа. Способов перемещения много. Например, повернуть копию листа и затем перемещать до совмещения копии точки A с точкой B.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.** Нарисуйте квадрат. Разделите его на пять равных частей.

Указание. Сначала можно разделить одну из сторон квадрата на пять равных частей. Это проще всего заметить, если на клетчатой бумаге нарисовать квадрат размером 5×5.

18.* Разделите изображенную на рис. 4 фигуру на четыре равные части.

Указание. Каждая часть состоит из трех квадратов, образующих «уголок». Один из них изображен на рис. 4 внутри данной фигуры.

19.* Разделите изображенную на рис. 5 фигуру на четыре равные части.

Указание. Каждая часть состоит из пяти квадратов. Одна из таких частей изображена на рис. 5 внутри данной фигуры.

20.** Разделите изображенную на рис. 6 фигуру на четыре равные части.

Указание. Части «похожи» на саму фигуру, то есть на прямоугольную трапецию. На рис. 6 приведен вариант деления.

24.** Как привязать козу, чтобы она могла пастись лишь на участке, имеющем вид плоской фигуры, ограниченной двумя дугами окружностей с центрами A и B?

Указание. Закрепить на шее козы две веревки длиной, равной радиусам окружностей, затем привязать козу к колышку A веревкой, равной радиусу первой окружности, и к колышку B веревкой, равной радиусу второй окружности.

26.** Посмотрите на фигуры A и B на рис. 7. Сколько можно разглядеть частей фигуры A, состоящих из клеток, которые равны фигуре B?

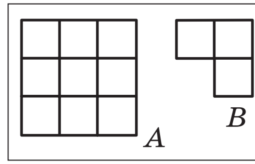


Рис. 7

Указание. Для подсчета числа частей сначала фигуру B можно перемещать, не поворачивая, до совмещения с частями фигуры A и найти четыре возможных положения. После этого аналогично рассмотреть еще три повернутых положения фигуры B.

28.** Придумайте свою головоломку с «исчезновением».

Указание. Например, можно рассмотреть две концентрические окружности и по равномерно распределенным радиусам проводить равные отрезки на возрастающем расстоянии от общего центра (рис. 8).

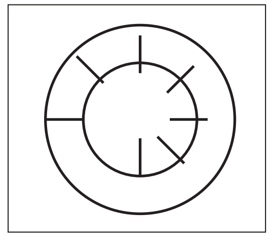


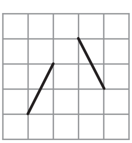
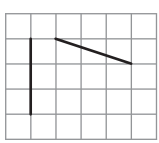
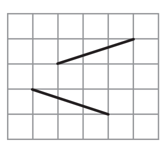
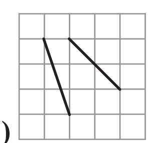
Рис. 8

30.** Разрежьте квадрат на четыре равные части. Какое множество различных способов решения этой задачи вы можете предложить?

Указание. Через центр квадрата произвольно провести две взаимно перпендикулярные прямые. Получаем бесконечное множество способов. Заметим, что вместо прямых можно проводить и другие линии.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. На каких из рисунков изображена пара неравных между собой отрезков?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

Указание. Сначала в каждом из вариантов сместить, не поворачивая, один из отрезков, чтобы его конец совместить с концом другого отрезка. Затем в вариантах 1 и 3 обратить внимание на «симметричность» относительно линии сетки, в вариантах 2 и 4 на наглядном уровне воспользоваться тем, что «гипотенуза длиннее катета».

2.4. В каких из указанных случаев квадрат $ABCD$ не будет равен квадрату $MNKL$?

1) если отрезок AB равен отрезку MN;

2) если отрезок BC равен отрезку NL;

3) если отрезок CD равен отрезку MK;

4) если отрезок AD равен отрезку NK.

Указание. Если стороны двух квадратов равны, то могут быть равны и сами квадраты. Тот факт, что это действительно так, будет доказан позже, но интуитивно это совершенно ясно уже в 5 классе. Если же сторона одного квадрата равна диагоналям другого, то такие квадраты уже точно не могут быть равными.

Глава 2
ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

Цель главы — ознакомить учащихся с измерениями и единицами измерения; с потребностью в расширении числовых систем от натуральных до целых, затем до дробных и действительных чисел; с различными числовыми системами, используемыми для записи результатов измерений; с приближенным характером определения численного значения величины с помощью измерительного прибора; с представлениями результатов измерения в виде таблиц и в виде формул («сокращенной записи таблиц»).

Особенности главы. В данной главе учащиеся в основном знакомятся с прикладным значением математики, в связи с чем рассматривается использование чисел при измерениях, задание с помощью чисел некоторых процессов, отмечается, что на практике результаты измерений чаще всего определяются только приближенно. Поэтому значительная часть главы посвящена важным для последующего понятиям приближений с избытком и с недостатком, на что и следует обратить особое внимание при изучении данной главы.

§ 1. СРАВНЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА И ШКАЛЫ

Цель параграфа — среди многообразных свойств и особенностей окружающих нас объектов выделить те, которые допускают количественное описание и изучение и которые называются *измеряемыми величинами* или просто *величинами*; рассмотреть измерение величин, которое заключается в их сопоставлении с определенными эталонами, то есть «образцовыми» величинами.

Особенности параграфа. Понятия измеряемых величин, числовых значений и единиц измерения разъясняются на примерах. Также на примерах разъясняется, что результаты измерения величин выражаются числами, которые получаются при сравнении величины с некоторыми эталонами. Число одинаковых эталонов, составляющих вместе данную величину, называется ее *числовым значением*. При этом самим эталонам отвечают единичные числовые значения, поэтому они называются также *единицами измерения*. Необходимо напомнить учащимся о некоторых известных измерительных приборах и основных единицах длины, времени, массы, температуры.

При изучении параграфа нужно обратить внимание на следующие моменты:

— различие между величиной и ее числовым значением, так как одна и та же величина в разных единицах выражается разными числами;

— неоднозначность выбора единиц измерения; в каждом конкретном случае выбор единицы обусловлен как объективными причинами (характером самой величины и удобством дальнейшего использования числового значения), так и культурными традициями;

— важность выбора общей единицы измерения при сравнении величин и выполнении операций с ними;

— умение переводить результаты измерений из одних единиц в другие однородные единицы.

Важно отметить, что не все свойства можно измерить, то есть не все они являются величинами. Таковы, в частности, вкусовые качества гастрономических изделий или художественные достоинства произведений литературы и искусства, оценка которых зависит от субъективного восприятия. Одному больше нравятся детективы, а другому — научная фантастика. Нельзя определенно сказать, что лучше — картина Шишкина «Утро в сосновом лесу» или картина Репина «Бурлаки на Волге». Как говорится, на вкус и цвет товарищей нет!

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: знакомство с различными измерительными приборами (цифровые и стрелочные часы, линейки, различные весы, градусники для измерения температуры тела и наружной температуры воздуха, спидометры автомобилей и другие приборы); умение использовать некоторые из приборов (линейку, часы, градусник); меры веса, длины, скорости, времени; существование разных типов единиц и величин измерения; знакомство с использованием результатов измерений для сравнения величин.

Новые математические понятия и свойства: величина; измеряемая величина; численное значение величины.

Вспомогательные понятия: шкала; деление шкалы.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Можно ли считать измеряемыми величинами такие качества, как «красивый», «полезный», «смешной»?

Ответ. Наверное, нет, ведь каждый «красив по-своему», способы оценок бывают разными и всегда субъективными.

1.2. Какие эталоны для измерений вы знаете?

Варианты ответа. Эталон расстояния — метр, эталон веса — грамм.

1.3. В каких единицах измерения обычно указывают расстояние между городами?

Варианты ответа. В километрах. В некоторых странах — в милях.

1.4. Можно ли ученическую линейку считать измерительным прибором?

Ответ. Да, потому что с помощью линейки можно *измерить длины* предметов, для определения численного значения линейка имеет *шкалу* с делениями.

1.5. Как водитель может определить скорость автомобиля?

Варианты ответа. Обычно водитель измеряет скорость по спидометру. Однако можно измерить скорость и с помощью дорожных километровых указателей и часов, найдя путь, пройденный за определенное время.

1.6.** Каких цифр больше — четных или нечетных?

Ответ. Одинаковое количество. Каждой нечетной цифре можно поставить в соответствие на единицу меньшую четную цифру.

Указания к решению наиболее трудных задач.

12. Посмотрите на рисунок. Как вы можете объяснить то, что видите?

Указание. Вес поставленных гирь превышает наибольшее значение, которое нанесено на шкале весов по окружности. Поэтому стрелка весов сделала больше одного полного оборота.

13. В гостинице за полярным кругом летом один уставший человек заснул в 9 часов. Проснувшись, он увидел, что часы показывают 10 часов 15 минут. Сколько времени он мог проспать?

Указание. Человек может проспать меньше половины суток, больше половины суток и даже больше суток. Возможные варианты ответа: 1 ч 15 мин; 13 ч 15 мин; 25 ч 15 мин.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из указанных весов можно точно получить на чашечных весах без делений, имея три гири, одна из которых — 100 г, другая — 200 г, третья — 500 г?

1) 300 г; 2) 400 г; 3) 700 г; 4) 800 г.

Указание: Понятно, как взвесить 300, 700 и 800 граммов. Но и 400 граммов тоже можно взвесить. Для этого на одну чашку весов надо поставить гирю в 500 г, а на другую — гирю в 100 г и взвешиваемый объект. Таким образом, все четыре варианта ответа правильные.

§ 2. КАКИЕ БЫВАЮТ ЧИСЛА?

Цель параграфа — показать, что потребности математики и ее приложений приводят к необходимости расширения системы натуральных чисел, которых вполне хватало для счета предметов.

Особенности параграфа. Большинство математических понятий в этом параграфе упоминается только в порядке ознакомления. Можно сказать, что здесь очерчен план развития представлений о числовых системах на ближайшую перспективу и на отдаленное будущее вплоть до окончания средней школы.

Целых чисел недостаточно уже для выражения результатов простейших измерений. Приходится использовать части целого или *дроби*.

Чтобы придать смысл операции вычитания большего числа из меньшего, к дробям и натуральным числам добавляют противоположные им *отрицательные* числа. Так возникает система *рациональных* чисел.

Но и их не хватает для вычислений и измерений. Например, еще древним грекам было известно, что длина диагонали квадрата с целочисленной стороной не может быть выражена никаким рациональным числом. Поэтому к рациональным добавляют *иррациональные* числа, образуя систему *действительных* чисел.

Наконец, в старших классах при решении алгебраических уравнений придется ввести в рассмотрение *комплексные* числа, поскольку даже не всякое квадратное уравнение имеет действительные корни

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: представление о натуральных числах; строение шкал некоторых приборов (в том числе тех, которые могут измерять отрицательные значения, например, термометр для измерения температуры на улице).

Вспомогательные понятия: термометр (градусник).

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: противоположные числа; дробные числа; число «пи»; иррациональные числа; действительные числа; вещественные числа; комплексные (мнимые) числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. В каких единицах можно выразить одним натуральным числом промежуток времени продолжительностью 2 часа 18 минут?

Ответ. Легче всего это сделать в минутах. Данный промежуток равен 138 минутам. Можно выразить в секундах — 8280, но это менее удобно.

2.2. Какие другие примеры дробных чисел вы знаете?

Варианты ответа. Например, одна треть расстояния от дома до школы, пятнадцать сотых площади поля и т.д.

2.3.* Какое число является противоположным для числа −2008?

Ответ. Противоположным будет число 2008.

2.4.** Что вам известно про число π?

Вариант ответа. Можно сказать, что π примерно равно 3, заключено между 3 и 4, примерно равно 22/7, примерно равно 3,14 и т.д. Может быть известно, что число π показывает, во сколько раз длина окружности больше ее диаметра.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.* Ночью температура воздуха каждый час понижалась на 2°С. В полночь термометр показывал +2°С. Какой была температура в 2 ч 30 мин ночи?

Указание. Можно предполагать, что за каждые полчаса температура понижается на 1°С. Поэтому до указанного времени понижение на 1°С происходило пять раз.

4.** (Задача-шутка.) Полтора рыбака за полтора дня поймали полтора судака. Сколько судаков поймают 9 рыбаков за 9 дней?

Указание. Полтора рыбака за день поймают одного судака, а за 9 дней девять судаков. Остается понять, что 9 рыбаков за 9 дней поймают в 6 раз больше, то есть 54 судака.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3.* Какие из указанных температур соответствуют морозной зимней погоде?

1) 18°C; 2) –26°C; 3) 24°C; 4) –125°C.

Указание. Морозной зимней погоде отвечает отрицательная температура. Но слишком холодно (например, –100 градусов) даже зимой не бывает.

§ 3. ЗНАЧЕНИЯ С НЕДОСТАТКОМ И С ИЗБЫТКОМ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием приближенных значений измеряемых величин, обосновать необходимость появления приближений и введение соответствующей терминологии.

Особенности параграфа. Материал параграфа очень важен для практических применений. Точные значения измеряемых величин удается получить очень редко. Как правило, стрелка измерительного прибора оказывается между двумя соседними делениями шкалы, рычажные весы не удается привести в равновесие, на цифровой шкале счетчика не хватает знаков для выражения точного расхода воды или электроэнергии и т.д. В таких случаях приходится использовать ориентировочные значения, дающие лишь приблизительное представление об измеряемой величине, но тем не менее пригодные для многих практических целей. Эти ориентировочные значения называются *приближенными* или *приближениями*.

Следует различать приближения *с недостатком*, меньшие точного значения величины, и приближения *с избытком*, большие точного значения. Кроме того, желательно знать *точность* приближения, которая показывает, насколько приближенное значение может отличаться от точного.

В тексте параграфа и упражнениях к нему на конкретных примерах показано, что многие задачи удается решить, зная только характер приближения (с избытком или с недостатком) и его точность.

Ученики должны осознать, что точность приближений зависит от наших реальных возможностей. Например, если измерять расстояние рулеткой с миллиметровыми делениями, то значения с недостатком и с избытком можно указывать с точностью до миллиметра. Но если то же самое расстояние измерять шнуром с нанесенными на нем метровыми делениями, то значения с недостатком и с избытком с точностью до миллиметра указать невозможно.

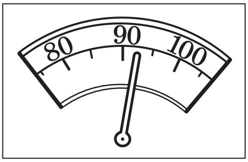
Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сравнение чисел; знакомство с «приблизительным» характером любых измерений и использование на практике приближенных значений.

Новые математические понятия и свойства: значение величины с недостатком, с избытком; приближенное значение величины; приближенное значение величины с недостатком, с избытком; приближение.

Вспомогательные математические понятия: приближенное значение величины слева, справа, снизу, сверху.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. На рисунке шкалы спидометра стрелка указывает значение скорости в первой половине промежутка от 90 до 100. В тексте пункта объясняется, что в этом случае 90 км/ч — значение скорости с недостатком. *Вопрос.* Можно ли указать более точные величины скорости с недостатком и с избытком в рассмотренном примере?



Ответ. Между делениями 90 и 100 стоит штрих, отмечающий 95 км/ч. Стрелка спидометра находится между делением 90 км/ч и 95 км/ч. Поэтому 90 км/ч — величина скорости автомобиля с недостатком, 95 км/ч — величина скорости автомобиля с избытком. Пытаться, глядя на шкалу спидометра, говорить, что скорость заключена между 92 км/ч и 93 км/ч бессмысленно, так как сама точность спидометра заведомо не позволяет определять скорость с точностью до 1 км/ч.

3.2.* Как объяснить, почему часовая стрелка проходит маленький промежуток между минутными делениями за 12 минут?

Ответ. За 1 час, то есть за 60 минут, часовая стрелка проходит 5 таких промежутков. Поэтому один промежуток между минутными делениями часовая стрелка проходит за время в 5 раз меньшее.

3.3. Какие значения можно считать приближениями сверху и снизу для температуры у поверхности Земли на Северном полюсе?

Вариант ответа. Точность ответа зависит от знания географии, но заведомо можно сказать, что приближением снизу является температура «минус 70 градусов» (самое холодное место в Северном полушарии находится в Якутии, где зарегистрирована самая низкая температура около 67,7° мороза); приближением сверху можно считать температуру 30° (трудно представить, что в окружении льдов будет сильная жара).

3.4.* Какие значения числа π с недостатком и с избытком вам известны?

Варианты ответа. Учащимся могут быть известны разные приближения, связанные с десятичным представлением $\pi = 3{,}14159265$....... Хорошо, если будут отмечены такие приближения: $3 < \pi < 4$; $3{,}1 < \pi < 3{,}2$; $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. На составление одной задачи учитель тратит от 15 до 20 минут. Может ли он составить 13 задач за 3 часа?

Указание. На составление 13 задач учителю потребуется не менее $13 \cdot 15 = 195$ минут, что больше трех часов.

6. Известно, что хозяйка, занимаясь домашними делами, проходит за день значительное расстояние. Какое расстояние, из предложенных вам, наиболее правдоподобно?

Указание. Можно предполагать, что хозяйка двигается со скоростью от 2 до 4 км/ч в течение примерно 12 часов.

7.** Сумма 5 чисел равна 141. Почему среди этих чисел есть хотя бы одно, которое больше 28?

Указание. Если все 5 чисел будут не больше 28, то их сумма будет не больше 140.

11. Расстояние между соседними телеграфными столбами колеблется от 24 до 25 метров. Сколько столбов может потребоваться для прокладки телеграфной линии длиной в 10 километров?

Указание. Разделив расстояние в 10 км на промежутки по 25 метров, мы получим 400 промежутков. Устанавливая в концах этих промежутков столбы, получим 401 столб. Если на расстоянии в 10 км отмечать промежутки по 24 м, то получим 416 таких промежутков и останется еще 16 м. Отсюда следует, что по условию задачи расстояние в 10 км задачи нужно делить не более чем на 417 промежутков, в концах которых будет стоять не более 418 столбов.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какой может быть высота пятиэтажного дома, в квартирах которого высота от пола до потолка равна 3 м?

1) 11 м; 2) 12 м; 3) 15 м; 4) 17 м.

Указание. Суммарная высота помещений на пяти этажах равна 15 м. Но надо еще учесть толщину перекрытий, высоту цоколя, чердака и т.д. Поэтому высота дома должна быть больше 15 м.

§ 4. ТАБЛИЦЫ И ФОРМУЛЫ

Цель параграфа — рассмотреть разные способы представления результатов нескольких измерений; подготовить учащихся к восприятию идеи функциональной зависимости между переменными величинами.

Особенности параграфа. Прежде всего нужно обратить внимание учеников на разницу между постоянными и переменными величинами. В простейших случаях функциональную зависимость можно описать при помощи таблиц или формул. Наглядные примеры таких описаний как раз и приводятся в этом параграфе, хотя соответствующие традиционные термины «аргумент», «функция» и др. пока отсутствуют. Таблицы и формулы связывают значения переменных величин. При этом сами значения могут быть как числами, так и другими объектами — буквами, именами, названиями дней недели и т.д.

На первых порах функциональную зависимость можно понимать как соответствие между двумя переменными величинами, когда каждому значению одной величины (аргумента) ставится в соответствие некоторое значение другой величины (функции). Например, каждой букве алфавита соответствует ее порядковый номер, каждому числу календаря — название дня недели и т.д. Такое соответствие удобно изображать таблицей, где в одной или нескольких строках (или столбцах) указаны значения первой величины, а в дополнительной строке (или столбце) — соответствующие значения второй величины. Примером является хорошо известный табель-календарь. Можно сказать, что такие таблицы — «прообразы» функций одного аргумента.

Более сложной является структура таблиц — «прообразов» функций двух аргументов. Здесь каждой паре значений двух величин (аргументов) ставится в соответствие некоторое значение третьей величины (функции). Такова, например, всем известная таблица умножения, где в первой строке и первом столбце указаны значения сомножителей (аргументов), а на пересечениях строк и столбцов — соответствующее значение произведения (функции).

Правила построения таблиц первого и второго типов нетрудно объяснить на примерах без использования терминов «аргумент» и «функция».

Во многих случаях зависимость между величинами, имеющими числовые значения, можно выразить формулой. Под формулой мы здесь понимаем равенство, в одной части которого стоит буквенное обозначение зависимой величины (функции), а в другой части — арифметическое выражение, содержащее буквенные обозначения независимых величин (аргументов). Иными словами, это — правило, показывающее, как по известным значениям независимых величин вычислить соответствующее значение зависимой переменной.

Таблицу умножения можно описать формулой $p = a \cdot b$, где a и b — значения сомножителей, а p — их произведение. Этой же формулой задаются многие другие зависимости, если иначе интерпретировать входящие в нее буквы. Пусть a и b — длины сторон прямоугольника, выраженные в сантиметрах. Тогда p будет его площадью в см^2. Если же a — скорость движения, выраженная в км/ч, а b — время в часах, то p будет пройденным расстоянием в километрах.

Нетрудно привести много других наглядных примеров зависимостей, которые можно описать формулами. Особое внимание следует обратить на то, что в этих формулах участвуют числовые значения величин, выраженные в определенных единицах. При переходе к другим единицам вид формулы может меняться.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: конкретные таблицы (например, таблица умножения); некоторые формулы (например, формула зависимости периметра прямоугольника от длин его сторон).

Новые математические понятия и свойства: таблица; числовое выражение; буквенное выражение; формула.

Вспомогательные понятия: однократные и многократные измерения; результат измерения; определение пути по скорости и времени движения; постоянная скорость.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Какие примеры таблиц вам известны?

Вариант ответа. Например, таблица названий разрядных единиц, таблица показаний температуры воздуха, измеренной в рассматриваемые часы, и т.д.

4.2.* Почему классный журнал в школе можно считать таблицей?

Вариант ответа. В клеточках, которые соответствуют дню проведения урока и ученику, проставляются соответствующие этому дню и этому ученику либо оценки, либо пометки о присутствии на занятии.

4.3. Какие приставки обозначают части единиц измерения?

Варианты ответа. Санти — $\frac{1}{100}$, милли — $\frac{1}{1000}$, деци — $\frac{1}{10}$.

4.4. Какие числовые выражения вы можете написать?

Варианты ответа. $1 + 2 + 3$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; $12 \cdot 4 - 5 \cdot 7$.

4.5. Какие примеры буквенных выражений вы знаете?

Варианты ответа. $2a$; $2n + 1$; $3a - 2b$.

4.6. Какие формулы вы знаете?

Варианты ответа. Распределительный закон: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$; формула $S = a \cdot b$ для определения площади прямоугольника, стороны которого измеряются числами a и b.

4.7.* Какой формулой выражается расстояние в сантиметрах, если оно задано в километрах?

Ответ. Если C — число сантиметров в отрезке, K — число километров, то $C = 100\,000 \cdot K$ (буквы K и C можно читать по-русски, а можно как латинские).

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.* 13 февраля 1995 года был понедельник. Какой день недели был:

а) 13 марта 1995 года;

б) 13 апреля 1995 года?

Указание. С 14 февраля по 13 марта 1995 года проходит 28 дней, то есть целое число недель; с 13 февраля по 13 апреля 1995 года проходит 59 дней, что составляет 8 полных недель и еще три дня.

10.* Каждое утро Петя выходит из дома, когда часы показывают 8 ч 49 мин, и идет до школы 10 мин, чтобы появиться в классе ровно за минуту до звонка. Какого числа Петя впервые опоздает на урок, если с трех часов утра в понедельник 10 октября часы начнут отставать на 12 секунд в сутки?

Указание. Заполнить таблицу времени прихода Пети в школу по дням, указывая время в секундах. Первая запись в этой таблице на 10 октября будет иметь вид: 8 ч 59 мин 4 сек.

13.** Составьте таблицу значений d, вычисляемых по формуле $d = a + b + c$, если числа a, b, c принимают всевозможные целые значения от 0 до 3.

Указание. Соответствующая таблица, скорее всего, похожа на тетрадь: первая страница — это таблица значений d при $a = 0$, заполненная для значений b и c от 0 до 3, и т.д.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Дана таблица стоимости сахара.

Вес	2 кг	5 кг	8 кг	11 кг	14 кг
Цена	50 руб.	125 руб.	200 руб.	275 руб.	350 руб.

Какова стоимость 10 кг сахара?

1) 125 руб.; 2) 225 руб.; 3) 250 руб.; 4) 325 руб.

Указание. Особенность этого теста в том, что значения 10 кг нет в таблице. Зато есть 2 кг и 8 кг. Складывая стоимость 2 и 8 кг сахара, получим 250 руб.

Глава 3
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Цель главы — выработать у учащихся правильные представления о натуральных числах на основе неявной индукции, закрепить навыки чтения и записи натуральных чисел при помощи разрядных единиц; рассмотреть правила сравнения чисел по их десятичной записи; ввести понятие степени числа и ознакомить учащихся с различными системами счисления.

Особенности главы. Изучение данной главы основывается на тех знаниях о натуральных числах, которые ученики приобрели за период обучения в начальной школе. Новым и существенным по отношению к этому является систематизация приобретенных знаний с выделением этапов построения множества натуральных чисел, способа их записи в десятичной системе счисления и в римской нумерации, сравнения натуральных чисел. В связи с этим дополнительно рассматривается понятие степени числа с натуральным показателем и на третьем уровне рассматривается обобщенный подход к записи натуральных чисел в разных позиционных системах счисления.

§ 1. ЗАПИСЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель параграфа — объяснить принципы записи и чтения натуральных чисел в десятичной системе; познакомить учеников с римскими цифрами; рассмотреть представление натуральных чисел в виде суммы произведений цифр и разрядных единиц.

Особенности параграфа. Параграф имеет преимущественно повторительный характер, хотя в нем делается попытка добиться более осознанного, чем прежде, понимания принципов записи натуральных чисел в позиционной системе счисления, то есть представления натуральных чисел в виде суммы с использованием цифр и разрядных единиц. Для реализации этого направления приходится ввести число 0.

Главное внимание следует обратить на принципы образования каждой очередной разрядной единицы. По цифровой записи натурального числа школьник должен уметь его прочитать и, наоборот, записать число цифрами по его названию.

Пункт 1.10* вынесен на второй уровень, однако вполне доступен большинству учеников. В этом пункте объясняются символы и принципы римской нумерации. По принципам римской нумерации учителю полезно представлять, что этот способ записи складывался постепенно, например, когда-то в Древнем Риме число 4 записывалось IIII, и только потом эту запись заменили более короткой IV. Принципиальный момент римской нумерации: если меньшая «цифра» записана правее большей, то эти «цифры» складываются, кроме того случая, когда за меньшей цифрой идет следующая за ней «цифра», как, например, в числе XIX число I вычитается из написанного правее числа 10, XIX = 10 + (10 − 1) = 19; более одной меньшей «цифры» не вычитается, например, не допускается запись IIX для числа 8, хотя она и короче. Все это показывает некоторую нелогичность римской нумерации, наличие не самых простых правил записи чисел. Позиционная система гораздо удобнее.

При изучении этого пункта достаточно стремиться к тому, чтобы большинство учеников умело записывать в римской нумерации числа от 1 до 100.

Новые математические понятия и свойства: цифры десятичной системы счисления; число нуль; разрядные единицы; римские цифры.

Вспомогательные понятия: класс разрядных единиц; римская нумерация.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какое натуральное число следует за числом 399?

Ответ. 400. Цель этого вопроса состоит в уяснении того, как при счете происходит смена цифр соответствующих разрядов. Если подобные вопросы вызывают затруднения, то необходимо вернуться к объяснению принципов записи небольших чисел, используя для иллюстрации счеты.

1.2. Как прочитать натуральное число, следующее за числом, равным 11 десяткам?

Ответ. Так как 11 десятков равно 110, то следующее за ним число 110 + 1 = 111 и читается как «сто одиннадцать».

1.3. Какие цифры используются для записи чисел в десятичной системе счисления?

Ответ. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1.4. Как образуются разрядные единицы?

Ответ. Новая разрядная единица образуется из 10 единиц предыдущего разряда, то есть каждая очередная разрядная единица в 10 раз больше предшествующей.

1.5. Как сокращенно записать сумму: $7 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8$?

Ответ. 7008.

1.6. Как называется число, равное ста тысячам тысяч?

Ответ. Тысяча тысяч — это один миллион, поэтому указанное число называется «сто миллионов».

1.7. Какие разрядные единицы вы знаете?

Ответ. Учащиеся должны знать разрядные единицы: 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000, 1 000 000 000. В таблице из п. 2.2* приведены названия других разрядных единиц (с промежутком в 3 разряда). Принципы образования названий не входящих в таблицу промежуточных разрядных единиц учащимся следует разъяснить. Например, 10^{20} — это 100 единиц, равных помещенной в таблице разрядной единице «квинтиллион», а поэтому 10^{20} — это «сто квинтиллионов».

1.8. Сколько секунд длится один невисокосный год?

Ответ. $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,536\,000$ сек.

1.9.* Сколько нужно знать слов, чтобы можно было назвать любое натуральное число от 1 до 99?

Ответ. Первый способ. При стандартном названии нужно 9 слов для чисел от 1 до 9, 9 слов для чисел от 11 до 19, 8 слов для чисел 20, 30, ..., 90. Всего 26 слов.

Второй способ. Можно обойтись девятью словами для названия цифр и двумя словами для названия двух разрядных единиц. Например, число 96 можно назвать: «девять десятков шесть единиц».

1.10.* Как записать с помощью римских цифр число 1999?

Ответ. MCMXCIX (M «тысяча» + CM «девятьсот» + XC «девяносто» + IX «девять»).

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.** (Задача-шутка.) У меня три спички. Если я к ним прибавлю еще две, то станет восемь. Как это может получиться?

Указание. Воспользуйтесь римскими цифрами. Сложите спички в виде числа VIII.

15. Сколько слов русского языка нужно знать, чтобы прочитать число 999 999 999 999, записанное в десятичной системе?

Указание. К тем словам, которые требуются для прочтения числа 999, достаточно добавить слова «тысяча», «миллион», «миллиард».

§ 2. СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

Цель параграфа — знакомство с натуральной степенью числа.

Особенности параграфа.

В параграфе знакомство со степенью числа начинается с сокращения записи разрядных единиц, после чего понятие степени a^n обобщается на натуральные показатели $n > 1$ для произвольного числа a. Ученики должны научиться правильно определять показатель и основание степени, правильно читать обозначения степени, в том числе и часто используемые обозначения a^2 и a^3. При записи разрядных единиц в виде степени числа 10 следует обратить внимание на то, что показатель степени равен числу нулей в записи разрядной единицы. Это обстоятельство может облегчить восприятие обозначений степени с показателем 1 и с показателем 0.

На третьем уровне учащимся приводится пример логарифма.

Новые математические понятия и свойства: степень числа 10 (как сокращенная запись разрядной единицы); степень числа a; основание степени; показатель степени.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: логарифм числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как называется число, равное 10^9?

Варианты ответа. «Десять в девятой степени»; «один миллиард»; «миллиард». Быть может, некоторые учащиеся знают, что в США это число называется «биллион».

2.2. Чему равно произведение $10^9 \cdot 10^0$?

Ответ. 10.

2.3. Сколько нулей содержит в десятичной записи число дециллион?

Ответ. 33 нуля.

2.4. Как записать число 1024 в виде степени числа 4?

Ответ. $1024 = 4^5$. Чтобы получить этот результат, можно последовательно вычислять: $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$. Если кто-то из учеников знает, что $1024 = 2^{10}$ (очень полезное равенство), то он может понять, что 10 сомножителей, равных 2, можно объединить попарно в 5 сомножителей, каждый из которых равен $2 \cdot 2 = 4$.

2.5. Какой смысл имеет цифра 6 в правой части равенства $64 = 2^6$ и какой смысл имеет цифра 6 в левой части этого равенства?

Ответ. В левой части записи цифра 6 означает количество десятков в числе, в правой части — показатель степени, то есть сколько раз нужно взять в качестве сомножителя 2, чтобы получить 64.

2.6.** Чему равен логарифм числа 256 по основанию 4?

Ответ. Для решения задачи можно выписать степени числа 4:

$4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$. Число $\log_4 256$ по определению равно показателю степени, в которую нужно возвести 4, чтобы получить 256, и потому равно 4.

2.7. В какую степень нужно возвести число a, чтобы получить произведение чисел a^2 и a^3?

Ответ. В пятую степень. Возможное решение:

$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

11.** Найдите десятичную запись для чисел: а) 8^9, б) 9^5, в) 13^6?

Указание. Для этого нужно проделать некоторые вычисления. Группировка сомножителей может облегчить эту работу.

15.** Запишите 3^{12} в виде степени числа: а) 9; б) 27; в) 81; г) 729.

Указание. Число 3^{12} можно записать в виде произведения 12 сомножителей, равных 3. Группируя их по два, получаем представление этого числа в виде степени числа 9, группируя по три — в виде степени числа 27, группируя по четыре — в виде степени числа 81, группируя по шесть — в виде степени числа 729.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных чисел являются степенью числа 2?

1) 18; 2) 32; 3) 64; 4) 98.

Указание. Зная, что $2^5 = 32$, нетрудно последовательным умножением получить 2^6, 2^7 и после этого выбрать ответы.

2.4. Какие из указанных чисел можно представить в виде квадрата натурального числа?

1) $2^3 \cdot 3^3$; 2) 4^3; 3) 3^3; 4) 3^4.

Указание. Одна из возможностей — это вычислить каждое из выражений и сравнить с известными квадратами первых натуральных чисел.

§ 3. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Цель параграфа — познакомить учащихся с существованием других позиционных систем счисления: двоичной, четверичной и шестнадцатеричной; научиться переводить запись чисел из k-ичной системы счисления в десятичную.

Особенности параграфа. В параграфе запись натуральных чисел в виде сумм произведений цифр и степеней числа 10 обобщается, и в качестве примеров рассматриваются аналогичные суммы произведений цифр 0, 1, 2, 3 и степеней числа 4, а также суммы произведений цифр 0, 1 и степеней числа 2. В результате учащиеся получают начальные представления о различных позиционных системах счисления. В конце параграфа приводятся краткие сведения о шестнадцатеричной системе счисления, в которой для записи чисел требуется более десяти цифр.

При изучении этого материала важную вспомогательную роль играют таблицы начальных степеней числа 4 и числа 2. Использование таблиц сокращает время, которое нужно для записи чисел в двоичной и четверичной системе счисления. Учащимся можно сообщить, что рассмотренные системы счисления выбраны не случайно и имеют отношение к работе компьютеров. Более того, запись числа в двоичной системе позволяет быстро получить его запись в четверичной системе, а последняя — получить запись числа в шестнадцатеричной системе. Проиллюстрировать это можно на примере. Возьмем равенство $213 = (11010101)_2$. Разбивая цифры двоичной записи справа на группы по две цифры, получим $(11)_2$, $(01)_2$, $(01)_2$, $(01)_2$. Переводя каждую группу из двоичной записи в десятичную, получаем 3, 1, 1, 1. Это цифры записи числа 213 в системе счисления с основанием 4, то есть $213 = (3111)_4$. Далее, разбивая цифры этой записи справа на группы по две цифры, получим $(31)_4$, $(11)_4$. Переводя каждую группу из четверичной записи в десятичную, получим 13, 5. Это «цифры» записи числа 213 в системе счисления с основанием 16. Так как «цифра» 13 обозначается через D, то $213 = (D5)_{16}$.

Весь материал параграфа, кроме пункта 3.1, предназначен для изучения на втором уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: знакомство учащихся с записями чисел в десятичной системе.

Новые математические понятия и свойства: системы счисления по основаниям 2, 4 и 16; цифры рассматриваемой системы счисления.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как записать число 2009 в виде суммы произведений при помощи цифр и степеней числа 10?

Ответ. $2009 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1$, или, используя сокращенную запись степени,

$2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1.$

3.2.* Как в десятичной системе счисления записать число $(1000)_4$?

Ответ. $(1000)_4 = 4^3 = 64$, так как $(1000)_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 4^3$.

3.3.* Какое число в десятичной системе соответствует записи $(11010101)_2$?

Ответ. $(11010101)_2 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 128 + 64 + 16 + 4 + 1 = 213$.

3.4.** Сколько цифр потребуется для записи числа 1999 в шестнадцатеричной системе счисления?

Ответ. Три цифры в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение. Выписываем степени числа 16 и находим, что $16^2 < 1999$, $16^3 > 1999$. Отсюда уже ясно, что потребуется не более трех цифр.

Хотя это и не требуется для ответа на вопрос, поясним, как найти шестнадцатеричную запись числа 1999. Получив, что $16^2 = 256$, $16^2 < 1999$, $16^3 > 1999$, будем умножать число 256 на натуральные k и найдем, что $256 \cdot 7 < 1999$, $256 \cdot 8 > 1999$. Затем из 1999 вычитаем $7 \cdot 16^2$: $1999 - 1792 = 207$. Затем будем умножать число 16 на натуральные k и найдем, что $16 \cdot 12 < 1999$, $16 \cdot 13 > 1999$. Далее из 207 вычитаем $12 \cdot 16$: $207 - 192 = 15$.

Итак, $1999 = 1792 + 192 + 15 = 7 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = (7CF)_{16}$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.* Запишите в троичной системе счисления числа: а) 2, б) 6, в) 8, г) 9, д) 11, е) 15, ж) 19.

Указание. Для решения этой задачи нужно посмотреть ответ на открытый вопрос к п. 3.4.**.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2.* Какова десятичная запись числа $(302)_4$?

1) 46; 2) 48; 3) 50; 4) 52.

Указание. Заданное число равно $3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 50$.

2.2.* Какие из указанных чисел используются как разрядные единицы в системе счисления с основанием 4?

1) 1; 2) 4; 3) 8; 4) 12.

Указание. Для ответа нужно выбирать число 1 и степени числа 4.

2.3.* Какие из указанных чисел будут двузначными при их записи в системе счисления с основанием 4?

1) 3; 2) 9; 3) 12; 4) 18.

Указание. В четверичной системе наименьшее двузначное число равно 4, наибольшее равно $3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 15$.

2.4.* Какие из указанных чисел будут трехзначными при их записи в двоичной системе счисления?

1) 3; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

Указание. В двоичной системе наименьшее трехзначное число равно 4, наибольшее равно $2^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

§ 4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

Цель параграфа — для натуральных чисел определить понятие неравенства, рассмотреть общее правило сравнения натуральных чисел по их десятичной записи, добиться того, чтобы учащиеся могли из нескольких натуральных чисел выбрать наименьшее или наибольшее число.

Особенности параграфа. За основу определения неравенства между натуральными числами выбрано их взаимное расположение в ряду натуральных чисел, который получается из числа 1 последовательным добавлением единицы. Это естественным образом приводит к правилу сравнения натуральных чисел по их десятичной записи. На втором уровне в порядке ознакомления приводится основное свойство упорядоченности, то есть транзитивность. На третьем уровне дополнительно разбираются два сложных примера.

Практически все задачи параграфа можно предлагать на первом уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается, что школьники умеют сравнивать небольшие натуральные числа, пользуясь знаками $<$ и $>$.

Новые математические понятия и свойства: сравнение любых двух натуральных чисел; основное свойство упорядоченности; правила сравнения натуральных чисел.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: порядок в ряду натуральных чисел; упорядоченность.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Почему $10^6 > 10^3$?

Ответ. Число 10^6 в десятичной записи содержит 7 цифр, число 10^3 — 4 цифры. По правилу сравнения первое число больше второго.

4.2.* В пункте рассматривается свойство: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. *Вопрос.* Как записать это свойство упорядоченности с использованием знака «больше»?

Ответ. Если $c > b$ и $b > a$, то $c > a$.

4.3.** В пункте рассматривается задача поиска наименьшего числа из расположенных в столбец чисел попарными сравнениями, начиная с нижнего числа. При этом наименьшее число поднимается на самый верх, то есть «всплывает как пузырек». *Вопрос.* Как изменить рассуждение так, чтобы наибольшее число «тонуло, как камень?

Ответ. Начинаем с верхнего числа, сравниваем его с числом, стоящим под ним; если нижнее число больше, то переходим к нему, если нижнее число меньше, то меняем числа местами и переходим к сравнению с числом, находящимся ниже.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Сумма двух натуральных чисел меньше 18, а одно из чисел равно 14. Чему может быть равно второе число?

Указание. Последовательно прибавлять к числу 14 натуральные числа, пока не придем к равенству $14 + 4 = 18$. В результате приходим к ответу: 1, 2, 3.

3. Разность двух натуральных чисел больше 10, а уменьшаемое равно 15. Чему может быть равно вычитаемое?

Указание. Найти разность $15 - 10 = 5$ и отсюда сделать вывод, что подходят только числа 1, 2, 3, 4.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Какое из указанных чисел наименьшее?

1) 4^4; 2) $2 \cdot 4^3$; 3) 4^5; 4) $3 \cdot 4^2$.

Указание. Решение сильно упрощается, если в каждом из чисел выделить общий множитель 4^2.

2.2. Количество каких чисел меньше 100?

1) всех трехзначных чисел;

2) всех трехзначных чисел, оканчивающихся на нуль;

3) всех трехзначных чисел, начинающихся на цифру 1;

4) всех трехзначных чисел, в записи которых используются *толь*ко цифры 8 и 9.

Указание. Число трехзначных чисел, начинающихся на цифру 1, в точности равно 100, поэтому ответ 3 — неверный.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Цель параграфа — ознакомить учащихся с практически важной задачей сравнения рассматриваемых чисел с другими, которые в определенном смысле проще воспринимаются, а поэтому и легче запоминаются.

Особенности параграфа. В параграфе изучаются некоторые правила замены натуральных чисел их приближенными значениями и вводится понятие точности приближения. Учитывая то, что с приближенными значениями, возникающими в результате измерений, учащиеся ознакомились во второй главе, рекомендуется перед изучением этого параграфа вспомнить о приближенных значениях с недостатком и с избытком. После этого можно переходить к важному случаю приближенных значений натурального числа с недостатком с заменой нескольких последних цифр нулями. Усвоив такие приближения, можно переходить к правилу получения соответствующих приближений с избытком, также оканчивающихся нулями. Учитывая, что при этом способе соответствующие значения с избытком и с недостатком отличаются на разрядную единицу, точность приближенных значений характеризуют этой разрядной единицей.

На втором уровне дополнительно рассматривается второй важный случай замены натурального числа его приближенным значением, который связан с указанием порядка числа. Можно указать на его связь с приближениями с недостатком и с избытком. Например, в записи $10^3 \le 2813 < 10^4$ указывается, что число 2813 имеет порядок 1000 — приближение с недостатком, а приближение с избытком — следующая разрядная единица, то есть 10^4. Иначе — указание порядка величины числа помещает его между двумя соседними степенями 10 (разрядными единицами).

Для примеров порядков величин полезно использовать сравнение больших расстояний, например, насколько искусственный спутник Земли (≈ 300 км) ближе к Земле, чем Луна; насколько Солнце дальше от Земли, чем Луна, и т.д.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: знакомство с примерами приближенных значений с недостатком и с избытком.

Новые математические понятия и свойства: приближение с недостатком; приближение с избытком; десятичное приближение с недостатком, с избытком (приближение натурального числа числами с нулями в конце записи); приближенное равенство; точность приближения.

Вспомогательные понятия: порядок величины числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Чему равно натуральное число, если его значения с избытком и недостатком равны соответственно 17 и 15?

Указание. В этом пункте предполагается, что приближение с недостатком меньше самой величины, а значение с избытком больше этой величины.

Ответ. 16.

5.2. Какими значениями обычно указывают приближенный возраст человека?

Ответ. У только что родившегося младенца возраст измеряют днями, далее неделями, месяцами. До среднего возраста измеряют годами, а дальше часто переходят на десятилетия (указывая приближения возраста обычно с недостатком).

5.3. С какой точностью указана масса Луны в последнем примере?

Ответ. С точностью до 10^{19} т.

5.4. С какой разрядной единицей сравнимо по порядку число месяцев в году?

Ответ. С разрядной единицей 10.

5.5.* Какие примеры различных по порядку величин вы знаете?

Ответ. Вариантов очень много. Например, длины в 1 мм, 1 м, 1 км по порядку различны; массы в 1 мг, 1 г, 1 кг, 1 т по порядку различны.

5.6.* На постройку дачного домика требуется 4816 кирпичей. Хватит ли на постройку трех таких домиков 36 поддонов по 400 кирпичей?

Ответ. $36 \cdot 400 = 3 \cdot 4800 < 3 \cdot 4816$. Поэтому 36 поддонов недостаточно.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. Расстояние от дома до школы равно 982 метрам. Чему приблизительно равно расстояние от дома до школы с точностью: а) до десятков метров; б) до сотен метров; в) до километра?

Указание. Обозначим расстояние от дома до школы через d. Тогда: а) $d \approx 980$ м с недостатком и $d \approx 990$ м с избытком с точностью до 10 м; б) $d \approx 900$ м с недостатком и $d \approx 1$ км с избытком с точностью до 100 м; в) $d \approx 0$ км с недостатком и $d \approx 1$ км с избытком с точностью до 1 км. После этого нужно выбрать те значения, о которых спрашивается в задаче.

7.* Расстояние между пунктами A и B примерно 3 км с избытком. Может ли быть так, что со скоростью 4 км/ч из пункта A в пункт B удастся пройти за 25 минут?

Указание. Если считать, что расстояние задано с точностью до километра, то следует ответить, что не удастся. Действительно, со скоростью 4 км/ч за 25 минут проходят расстояние, меньшее 2 км. Важно обратить внимание на то, что ответ на поставленный вопрос зависит от того, как мы понимаем фразу «примерно 3 км с избытком», считать ли возможным расстояние между пунктами меньше, чем 2 км, или нет.

11.* Приведите пример, когда приближение числа с избытком имеет больший порядок, чем порядок самого числа.

Указание. Для числа 999 можно взять приближенное значение с избытком, равное 1000. Но по определению число 999 имеет порядок числа 100, число 1000 имеет другой порядок, а поэтому числа 999 и 1000 имеют разный порядок.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Укажите десятичное приближение с избытком для числа 936 с точностью до 10^3.

1) 700; 2) 800; 3) 900; 4) 1000.

Указание. Десятичные приближения с точностью до 1000 — это числа, в конце десятичной записи которых стоят три нуля.

2.4. Какие из указанных чисел по порядку величины сравнимы с 99999?

1) 102 030; 2) 10 203; 3) 90 909; 4) 9090.

Указание. Данное в условии число по порядку величины сравнимо с 10 000. С этой разрядной единицей сравнимы числа из вариантов 2 и 3.

Исторические сведения

В позиционных системах счисления один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен. Считается, что позиционная нумерация была изобретена в Древнем Вавилоне и Шумере. К числу таких систем относится современная десятичная система счисления. Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев рук у человека

Древнейшая известная запись позиционной десятичной системы обнаружена в Индии в 595 г. Нуль в то время применялся не только в Индии, но и в Китае. В этих старинных системах для записи одинакового числа использовались символы, рядом с которыми дополнительно помечали, в каком разряде они стоят. Потом перестали помечать разряды, но число все равно можно прочитать, так как у каждого разряда есть своя позиция. А если позиция пустая, ее нужно пометить нулем. В поздних вавилонских текстах такой знак стал появляться, но в конце числа его не ставили. Лишь в Индии нуль окончательно занял свое место, эта запись распространилась затем по всему миру. Индийская нумерация пришла сначала в арабские страны, затем через итальянских купцов и в средневековую Западную Европу. Одним из главных источников был труд среднеазиатского математика Аль-Хорезми, написанный на арабском языке, поэтому за индийскими цифрами в Европе закрепилось неправильное название — «арабские».

Простые и удобные правила сложения и вычитания чисел, записанных в позиционной системе, сделали ее особенно популярной.

Глава 4

ОТРЕЗОК, ЛОМАНАЯ

Цель главы. Дать наглядное представление об отрезке и практических способах измерения длины отрезка, обобщить процедуру измерения длины, изучить основные свойства длины, неравенство треугольника и научить применять эти свойства при решении задач; ознакомиться с понятием ломаной, которая моделирует непрерывный путь из одной точки в другую, составленный из отрезков.

Особенности главы. В главе на основе наглядных представлений об отрезках, которые воспринимаются как геометрические фигуры, начерченные карандашом с помощью линейки, рассматривается процедура измерения, приводящая к понятию длины отрезка, изучаются основное свойство длины и неравенство треугольника. Этот материал на третьем уровне дополняется изучением характеристического свойства точек отрезка. После этого рассматриваются простейшие фигуры, составленные из отрезков, которые называются ломаными. На первом уровне изучение ломаных ограничивается конкретными примерами. На третьем уровне демонстрируются некоторые особенности ломаных, которые показывают, что понятие ломаной является непростым математическим понятием.

§ 1. ОТРЕЗОК. РАВЕНСТВО ОТРЕЗКОВ

Цель параграфа — рассмотреть равенство отрезков и различные случаи взаимного расположения двух отрезков, выработать наглядные представления об отрезке, составленном из двух или нескольких отрезков.

Особенности параграфа. В начале параграфа напоминается построение отрезка по его концам с помощью линейки. При этом обращается внимание на единственность отрезка с концами в двух заданных точках. Затем на основе общего понятия равенства геометрических фигур особо рассматривается равенство отрезков и записываются общие свойства равенства отрезков.

Основное внимание при изучении данного параграфа следует обратить на возможные случаи взаимного расположения двух отрезков. Выделяются случаи, когда два отрезка не пересекаются, то есть не имеют общих точек, и когда два отрезка пересекаются, то есть имеют общую точку, не совпадающую ни с одним из концов этих отрезков.

Для последующего изучения свойств длины важным является случай, когда один отрезок составлен из двух других. Введение этого понятия служит наглядным эквивалентом понятия «между» для трех точек, которое часто рассматривается при более формальных подходах к аксиоматическому построению курса евклидовой геометрии.

Предварительные знания, умения, навыки. Предполагаются известными: отрезок; конец отрезка; навыки работы с линейкой.

Новые математические понятия и свойства: равенство отрезков; свойства равенства отрезков; непересекающиеся отрезки; пересекающиеся отрезки; отрезок, составленный из двух других отрезков.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какое наибольшее число отрезков с концами в различных вершинах квадрата можно получить?

Вариант ответа. Пусть $ABCD$ квадрат. Соединяя вершину A с тремя оставшимися, затем вершину B с тремя остальными, затем аналогично вершины C и D, получим всего $4 \cdot 3$ комбинаций. Но при этом каждый из отрезков будет проведен дважды. Поэтому наибольшее число отрезков $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

1.2. Как проверить, что соседние стороны квадрата равны?

Вариант ответа. Сделать копию квадрата и повернуть ее вокруг общей вершины соседних сторон так, чтобы копия одной стороны квадрата совпала с другой его стороной.

1.3. Какие свойства равенства для чисел вы знаете?

Ответ. 1) Число равно самому себе. 2) Если первое число равно второму, то и второе число равно первому. 3) Если каждое из двух чисел равно третьему числу, то такие числа равны.

1.4. Могут ли два отрезка на плоскости иметь более одной общей точки?

Ответ. Могут. Например, если первый отрезок составлен из второго и третьего отрезка, то у первого и второго отрезка сколь угодно много общих точек.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.* Нарисуйте треугольник с равными сторонами.

Указание. Можно отметить точку, с центром в этой точке нарисовать окружность, выбрать на этой окружности другую точку и, не меняя раствора циркуля, нарисовать другую окружность. Одна из общих точек окружностей и центры окружностей удовлетворяют условиям задачи. Выбор другой общей точки окружностей дает еще один способ.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Какой из отрезков на рис. 1 равен отрезку AB?

1) BC; 2) CD; 3) DE; 4) AE.

Указание. Можно заметить, что копию отрезка AB удается переместить в отрезок DE, не поворачивая копию. Это позволяет выбрать нужный вариант ответа. Объяснить, почему остальные варианты не подходят, на данном этапе достаточно сложно.

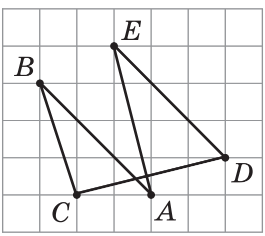


Рис. 1

2.1. Какие из изображенных на рис. 2 отрезков равны отрезку AB?

1) CD; 2) EF; 3) GH; 4) KL.

Указание. Каждому отрезку можно сопоставить треугольник, у которого одна сторона совпадает с отрезком, а остальные стороны расположены на линиях сетки. Отрезку AB соответствует треугольник со сторонами в 1 и 4 клетки. Ориентируясь на наглядные представления о равенстве прямоугольных треугольников, можно выбрать единственно подходящий вариант 3.

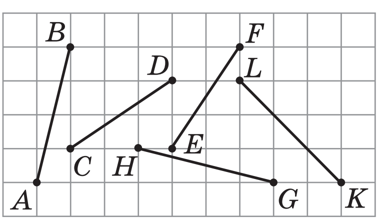


Рис. 2

§ 2. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Цель параграфа — ввести понятие длины отрезка, сначала опираясь на знакомую процедуру измерения с помощью линейки, а затем рассмотреть обобщение; определить понятие расстояния между двумя точками.

Особенности параграфа. В начале параграфа измерение отрезков осуществляется при помощи линейки. Затем на примере измерения отрезков в шагах сетки клетчатой бумаги указывается на возможность обобщения процедуры измерения. После такой предварительной работы формулируется следующее свойство: «Выбор некоторого отрезка в качестве единичного позволяет любому другому отрезку приписать число, называемое его длиной». Чтобы различать в обозначениях отрезок и его длину, длина отрезка AB обозначается как $|AB|$. В конце параграфа определяется расстояние между точками, в том числе и расстояние от точки до нее самой.

При изучении параграфа следует обратить внимание на приближенный характер определения длины отрезка при помощи линейки и поэтому выработать у учащихся практические навыки измерения длин с точностью до 1 мм. Ученики должны осознать, что каждый отрезок имеет определенную длину, но численное значение длины отрезка зависит от выбора единицы измерения.

Несмотря на то что для обозначения длины отрезка вводится особое обозначение, для удобства сразу же разрешается длину отрезка обозначать так же, как и отрезок, если ясно, что речь идет о длинах. Допускать двоякое обозначение длины проще, чем удерживаться на уровне сложного обозначения на протяжении всего школьного курса геометрии.

На втором и третьем уровне целесообразно обратить внимание на свойство, что равные отрезки имеют равные длины. Принимая без обоснования такое свойство, мы тем самым фиксируем одно из самых важных свойств перемещений: если перемещение копию одного отрезка переводит в другой отрезок, то длины таких отрезков равны, а если длины двух отрезков равны, то найдется перемещение, которое копию одного отрезка переводит в другой. На первом уровне такое свойство выглядит довольно естественно и воспринимается без особых затруднений, хотя и не фиксируется в явном виде.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: навыки счета; умение работать с линейкой; знакомство с единицами измерения; равенство отрезков.

Новые математические понятия и свойства: результат измерения длины отрезка; результат измерения с недостатком и с избытком; длина; единица длины; свойства длин равных отрезков; расстояние между точками, неравенство треугольника.

Вспомогательные понятия: шаг сетки.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как измерять отрезки на местности?

Варианты ответа. Рулеткой, шагами, оценивая расстояние на глаз.

2.2. Какие единицы измерения длины вам известны?

Вариант ответа. Учащиеся должны знать основные меры длины: километр, равный 1000 метров; метр, равный 100 см; дециметр, равный10 см; сантиметр, равный 10 мм.

2.3. Как на практике можно определить длину отрезка?

Вариант ответа. При помощи измерения. При этом должна быть указана единица измерения (метр, сантиметр, миллиметр и т.д.).

2.4. Какие примеры изменения единицы измерения длин отрезков вы знаете?

Вариант ответа. Например, если на местности измерять значительные расстояния, то часто достаточно производить измерения в метрах. Однако для измерений в пределах тетрадного листа нужны уже другие единицы измерения: сантиметры и миллиметры.

2.5. Как вы понимаете слова «расстояние от Земли до Луны»?

Вариант ответа. Это некоторое среднее значение, так как реально во времени такое расстояние изменяется. В справочниках указывают значение около 380 000 км. Полезно обратить внимание учащихся также на тот факт, что расстояние между двумя шарами можно понимать по-разному (например, как расстояние между их центрами и как кратчайшее расстояние).

2.6. Что вы можете сказать о равенстве длин двух противоположных сторон прямоугольника?

Указание. Если в прямоугольнике взять сторону и противоположную ей сторону, то длины этих сторон равны.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. На рис. 1. заданы точки A, B, C, D и Е. Нарисуйте все отрезки, концами которых являются пары этих точек. Сколько отрезков должно получиться?

Указание. Рассуждения, аналогичные ответу на вопрос из пункта 1.1, приводят к числу $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

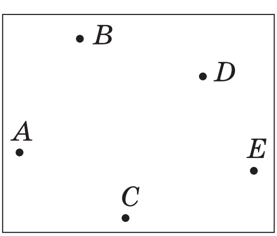


Рис. 1

14.** При измерении некоторого отрезка AB за единицу был принят отрезок PQ длиной 1 м 1 см 1 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах равна 20. Чему равна длина отрезка AB в сантиментах?

Указание. Чтобы увеличить значение 1 м 1 см 1 мм в 20 раз, можно выразить его в миллиметрах, умножить на 20, а затем в полученном ответе выделить число метров и оставшихся сантиметров.

15.** При измерении высотного здания в этажах получили 60 этажей и еще надстройку высотой 5 м. Чему равна высота этого здания в метрах, если высота каждого этажа 3 м 50 см?

Указание. В дециметрах найти значение $60 \cdot 35 + 50$, а затем перевести в метры.

17.** У плотника есть веревка длиной ровно 4 м. Как с ее помощью отмерить доску длиной: а) 2 м; б) 3 м?

Указание. Сложив веревку пополам, получаем мерку длиной 2 м, еще раз сложив пополам, получим мерку длиной 1 м, после чего нетрудно отмерить 3 м.

19.** Сколько можно указать вертикальных и горизонтальных отрезков, концами которых являются точки, отмеченные на рис. 2?

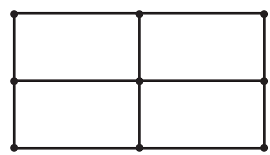


Рис. 2

Указание. Можно считать, что фигура составлена из 6 отрезков, каждый из которых составлен из двух отрезков. Поэтому всего $6 \cdot 3 = 18$.

20.* При разметке доски с помощью нитки эту нитку можно складывать пополам, получившуюся двойную нитку еще раз пополам, и так можно делать несколько раз подряд. Какие из длин в целое число сантиметров можно отметить на доске длиной 3 м, имея нитку длиной ровно в 1 м?

Указание. Сложив нитку пополам, получим 50 см. Еще раз сложив пополам, получим 25 см. При последующем сложении пополам целое число сантиметров уже не получается. Поэтому отметить удается только длины, кратные 25 см.

21.** При разметке доски с помощью нитки эту нитку можно складывать пополам, получившуюся двойную нитку еще раз пополам, и так можно делать несколько раз подряд. Какие из длин в целое число сантиметров можно отметить на доске длиной в 1 м, имея нитку длиной ровно в 1 м 28 см?

Указание. Складывая последовательно пополам, будем получать отрезки длиной 64 см, 32 см, 16 см, 8 см, 4 см, 2 см, 1 см. Поэтому на данной доске можно отметить любой отрезок длиной в целое число сантиметров от 1 см до 100 см.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. При измерении отрезка AB получили, что его длина находится между 520 и 605 см. Какие из указанных значений не могут быть длиной этого отрезка?

1) 51 дм; 2) 55 дм; 3) 6 м; 4) 61 дм.

Указание. Приведенные варианты ответов выразить в сантиметрах и отобрать те из них, которые больше 520 и меньше 605.

2.4. При измерении отрезка AB получили, что его длина 4532 см. Какие из указанных значений являются значениями его длины с избытком?

1) 40 м; 2) 50 м; 3) 100 м; 4) 12 000 м.

Указание. Приведенные варианты ответов выразить в сантиметрах и отобрать те из них, которые больше 4532.

§ 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЛИНЫ. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — установить аддитивность длины как свойство меры отрезков (длина суммы отрезков равна сумме длин отрезков), сформулировать неравенство треугольника, рассмотреть примеры применения неравенства треугольника.

Особенности параграфа. В параграфе на основе наблюдений за отрезками на клетчатой бумаге формулируются два свойства длины.

1. Для точки C, лежащей на отрезке AB, выполняется равенство $|AC| + |CB| = |AB|$.

2. Для точки D, не лежащей на отрезке AB, выполняется неравенство $|AD| + |DB| > |AB|$.

Первое из этих свойств отражает аддитивное свойство длины: если отрезок AB составлен из отрезков AC и CB, то длина отрезка AB равна сумме длин составляющих его отрезков. Второе свойство позволяет установить важное неравенство треугольника.

На третьем уровне поясняется, что первое из основных свойств длины является тем свойством, которое из всех точек плоскости выделяет точки, лежащие на отрезке. Часть параграфа посвящена изучению неравенства треугольника. Сначала уточняется понятие треугольника, а затем с использованием второго основного свойства длины устанавливается неравенство треугольника и рассматриваются применения этого неравенства в задачах о поиске кратчайшего пути. Задача, которая разбирается на третьем уровне, достаточно сложная и требует особого внимания со стороны учителя.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: длина отрезка; понятие числового неравенства; отрезок, составленный из двух отрезков; вершина треугольника; сторона треугольника.

Новые математические понятия и свойства: определение треугольника; неравенство треугольника, основные свойства длины.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Пусть имеется квадрат $ABCD$ со стороной 5 см. Как пояснить, что длина отрезка AC меньше 10 см?

Ответ. По основному свойству длины, так как $|AC| < |AB| + |BC| = 10$ см.

3.2.** Каким свойством характеризуются точки, не лежащие на отрезке?

Вариант ответа. Если точка D не лежит на отрезке AB, то $AD + DB > AB$. Обратно, если $AD + DB > AB$, то точка D не лежит на отрезке AB. Другими словами, сумма расстояний от каждой из точек, не лежащих на заданном отрезке, до концов данного отрезка строго больше длины этого отрезка.

3.3. Сколько треугольников можно указать, используя в качестве вершин треугольников вершины заданного квадрата?

Ответ. Четыре.

3.4. Почему не существует треугольника со сторонами длиной 1 км, 2 км, 3 км?

Ответ. Если бы такой треугольник существовал, то для него выполнялось бы неравенство треугольника. В частности, 3 км < 1 км + 2 км, но это неравенство не выполняется.

3.5.* В пункте рассматривается задача: «Комната имеет вид куба, как показано на рис. 6. Как должна ползти муха по боковой стене и потолку, чтобы попасть из нижнего угла N на полу комнаты в верхний угол V на потолке по кратчайшему пути?

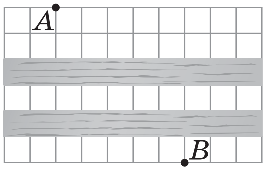


Рис. 1

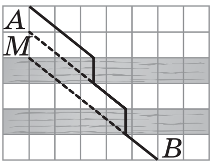


Рис. 2

Вопрос. По какому кратчайшему пути муха может перелететь из точки N в точку V?

Ответ. По отрезку, соединяющему эти точки.

3.6.** В каких местах нужно строить мосты, если пункты A и B разделяют две реки, расположенные, как на рис. 1?

Ответ. Решение похоже на приведенное в данном пункте. Сместим точку A вниз на ширину двух рек и после этого полученную точку M соединим с точкой B, как указано на рис. 2. Окончательный кратчайший путь и расположение мостов выделено на этом рисунке жирной линией.

Указания к решению наиболее трудных задач.

16. Что длиннее: сторона квадрата или его диагональ? Проверьте ответ непосредственным измерением.

Указание. На данном этапе приходится опираться на наглядные соображения. Если на клетчатой бумаге нарисовать квадрат $ABCD$ и отметить точку O пересечения диагоналей, то можно заметить, что $AO = BO = CO = DO$. Так как точка O не лежит на отрезке AB, то $AB < AO + OB = AO + OC = AC$.

17.* Может ли диагональ ромба быть короче его стороны?

Указание. Если сделать «вытянутый» ромб, то на глаз видно, что его меньшая диагональ меньше стороны.

18.** Имеется линейка, на которой остались только отметки 0, 1, 3, 7 и 15 см. Отрезки какой длины можно точно измерить, прикладывая линейку один раз?

Указание. Для ответа на вопрос достаточно вычислить всевозможные разности между отметками. В результате получим следующие значения: 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 6 см, 7 см, 8 см, 12 см, 14 см, 15 см.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Известно, что точка B не лежит на отрезке AC, а длины отрезков AB и BC равны 12 см и 15 см. Какие из указанных значений не могут быть длиной отрезка AC?

1) 23 см; 2) 25 см; 3) 27 см; 4) 29 см.

Указание. Из указанных не могут быть значения, которые больше или равны 27 см.

2.3. Известно, что точка B не лежит на отрезке AC, а длины отрезков AB и BC равны 25 см и 14 мм. Какие из указанных значений не могут быть длиной отрезка AC?

1) 26 см; 2) 27 см; 3) 28 см; 4) 29 см.

Указание. Выразить все длины в миллиметрах и отобрать те варианты, которые больше или равны 264 либо меньше или равны 236.

§ 4. ЛОМАНАЯ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием ломаной, определить длину ломаной, периметр многоугольника, рассмотреть одно из обобщений неравенства треугольника.

Особенности параграфа. Параграф затрагивает довольно сложное понятие ломаной. Сначала на примерах формируются наглядные представления о ломаной, определяются длина ломаной и периметр многоугольника. В итоге вырабатывается некоторый зрительный образ ломаной. На втором уровне ученики должны воспринимать разницу между ломаной с самопересечениями, ломаной без самопересечений с совпадающими концами и простой ломаной с несовпадающими концами.

Однако к понятию ломаной можно подходить с более общей точки зрения. Часто ломаную определяют как последовательно соединенные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... , $A_{n-1}A_n$, такие, что никакие три соседние точки не лежат на прямой. При этом не исключается, что среди точек A_1, A_2, ... , A_n есть совпадающие. Такое определение соответствует тому, что ломаная моделирует непрерывный путь от одной точки до другой, проходимый по отрезкам. И оказывается, что при таком, оправданном с математической точки зрения, подходе к ломаной обнаруживаются совершенно неожиданные эффекты. На это в параграфе на третьем уровне обращается внимание. Несколько приведенных примеров демонстрируют, что ломаные, понимаемые как непрерывно проходимые по отрезкам пути от одной точки до другой, могут быть разными, а их наглядные геометрические образы могут совпадать.

Дополнительно на третьем уровне поясняется, что длина отрезка меньше длины любой ломаной, соединяющей его концы.

Для этого на конкретном примере приводятся все необходимые обоснования.

Новые математические понятия и свойства: ломаная; вершины ломаной; звенья ломаной; концы ломаной; простая ломаная; длина ломаной; свойство длины ломаной; периметр многоугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Чему равна длина ломаной, составленной из 20 равных звеньев длиной 5 см?

Ответ. 100 см.

4.2. В пункте рассмотрен четырехугольник, у которого найден периметр, равный 10 см. *Вопрос.* Чему равно значение периметра этого четырехугольника в миллиметрах?

Ответ. 100 мм.

4.3.** Какие ломаные из пяти звеньев можно изобразить, используя в качестве вершин четыре вершины квадрата?

Варианты ответа. Пусть $ABCD$ — квадрат. Несколько возможных вариантов пятизвенных ломаных: $ABCDBA$, $ABCADC$, $ADBCAD$, $ABADAC$. Они условно изображены соответственно на рис. 1, 2, 3, 4. Заметим, что рисунки далеко не полностью отражают особенности ломаных, потому что в каждом из приведенных случаев какие-то отрезки проводятся не по одному разу.

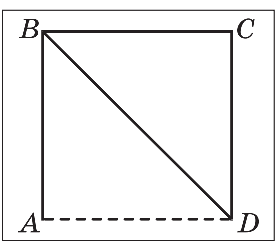


Рис. 1

4.4.* Почему из Москвы в Новосибирск нельзя попасть по самому короткому пути?

Вариант ответа. Самый короткий путь — это отрезок. На земном шаре от-

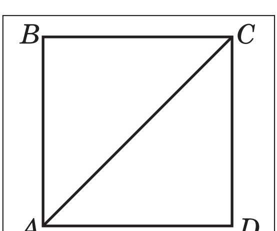


Рис. 2

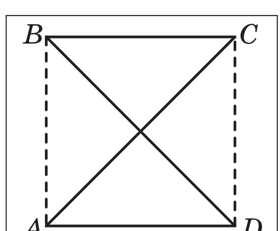


Рис. 3

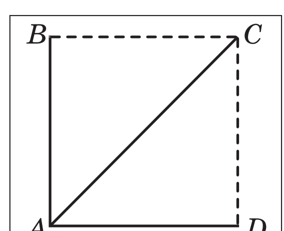


Рис. 4

резок, соединяющий Москву с Новосибирском, проходит под землей и достаточно глубоко от поверхности (в средней точке на глубине около 200 км).

Указания к решению наиболее трудных задач.

9.* Пусть точки A, B, C, D заданы, как на рис. 5. Нарисуйте все возможные простые ломаные из трех звеньев с концами в этих точках.

Указание. Всевозможными способами переставить буквы A, B, C, D и в соответствии с этими перестановками рисовать ломаные. После этого выбрать из них ломаные без самопересечений.

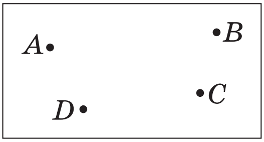


Рис. 5

20.** Нарисуйте ломаную длиной 9 см из 5 звеньев, расстояние между концами которой равно 8 см.

Указание. На клетчатой бумаге сначала можно нарисовать прямоугольник со сторонами 8 см и 5 мм, считая, что сторона клетки имеет длину 5 мм. Затем с помощью трех сторон этого прямоугольника можно нарисовать ломаную $ABCDEF$, у которой AB, CD, EF расположены горизонтально, BC, DE вертикально и $|AB| = |EF| = 3$ см, $|CD| = 2$ см, $|BC| = |DE| = 5$ мм.

22. Одна из сторон треугольника равна 30 см, а вторая равна 29 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое больше одной из данных сторон.

Указание. Если предположить, что третья сторона равна $30 \cdot 2 = 60$ см, то не будет выполнено неравенство треугольника. Поэтому надо в качестве третьей стороны рассмотреть отрезок в $29 \cdot 2 = 58$ см.

23. Решается аналогично задаче 22.

26.** На клетчатой бумаге в квадрате со стороной в 101 шаг сетки нарисован большой многоугольник по такому же принципу, по какому на рис. 6 нарисован многоугольник внутри квадрата со стороной в 7 шагов. Найдите периметр большого многоугольника в шагах сетки.

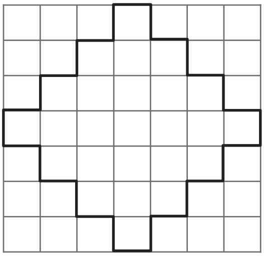


Рис. 6

Указание. Можно заметить, что периметр этого многоугольника равен периметру квадрата, содержащего этот многоугольник. Эта закономерность выполняется и в общем случае.

27.** в) Может ли внутри квадрата со стороной в 1 м уместиться ломаная без самопересечений длиной 100 км?

Указание. Может уместиться простая ломаная сколь угодно большой длины. Например, внутри квадрата параллельно одной из сторон можно провести 100 000 разных отрезков длиной в 1 м. Соединяя их «змейкой», получим ломаную, длина которой больше 100 км.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Известно, что существует четырехугольник $ABCD$, у которого $|AB| = 5$ см, $|BC| = 18$ см, $|CD| = 6$ см. Какие из указанных значений не могут быть длиной стороны AD?

1) 7 см; 2) 15 см; 3) 23 см; 4) 31 см.

Указание. Первое: длина стороны AD меньше суммы длин всех остальных сторон. Второе: сумма длин сторон AD, AB и CD должна быть больше длины стороны BC. Это позволяет в качестве ответов отобрать варианты 1 и 4.

2.3. Длины сторон треугольника — целые числа, причем две из них имеют длины 5 см и 2 см. Какие из указанных значений не могут быть длиной его третьей стороны?

1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см; 4) 6 см.

Указание. В каждом из вариантов проверить, выполняется ли неравенство треугольника или нет.

Глава 5
СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель главы — выработать и закрепить у учащихся навыки сложения и вычитания многозначных натуральных чисел, обратить внимание на основные законы сложения и вычитания.

Особенности главы. Изучение данной главы основывается на том, что с основными понятиями и примерами сложения и вычитания натуральных чисел учащиеся частично уже знакомились в начальной школе. Исходя из этого, рассматриваются алгоритмы сложения и вычитания многозначных чисел, которые частично отличаются от известных из младших классов, изучаются основные законы сложения и вычитания. На третьем уровне дополнительно рассматриваются алгоритмы сложения и вычитания в системах счисления с основаниями, отличными от 10.

§ 1. ЕЩЕ РАЗ О СЛОЖЕНИИ

Цель параграфа — рассмотреть алгоритмы сложения многозначных чисел; напомнить основное свойство длины отрезков и применить его для иллюстрации сложения и вычитания натуральных чисел с помощью прибора, составленного из двух линеек; сформулировать основные законы сложения.

Особенности параграфа. Главной особенностью является по-новому записываемый алгоритм сложения «столбиком» многозначных чисел. Этот способ записи состоит в том, что для получения итоговой суммы используются две вспомогательные строки. При сложении по столбцам цифр одного и того же разряда получается промежуточный результат в виде однозначного или двузначного числа. Когда промежуточный результат двузначный, цифра единиц записывается в том же разряде в первой вспомогательной строке, а цифра десятков записывается со смещением на разряд влево во второй вспомогательной строке. Проделав эту работу по всем столбцам разрядов, переходят к сложению цифр во вспомогательных строках по такому же алгоритму. Процесс сложения заканчивается, когда вторая вспомогательная строка оказывается пустой. Новый способ записи сложения многозначных чисел имеет определенные преимущества, поскольку не заставляет удерживать в памяти вспомогательные числа — они сразу же выписываются на бумаге. Более того, так как «все записано на бумаге», то на выработку необходимых навыков требуется не так много времени. На примере устройства из двух линеек иллюстрируется связь между сложением чисел и аддитивным свойством длины.

На третьем уровне рассматривается алгоритм сложения в недесятичных системах счисления. При изучении этого материала важно обратить внимание на то, что алгоритм сложения полностью копирует алгоритм сложения чисел в десятичной записи, с той лишь разницей, что используются новые таблицы сложения однозначных чисел.

Важно контролировать правильное усвоение учащимися изучаемого материала, который рассчитан на разъяснение механизмов, на которых основаны приемы счета с помощью действий сложения и вычитания.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сложение однозначных чисел; сложение двузначных чисел; умение пользоваться обыкновенной линейкой с миллиметровыми делениями.

Новые математические понятия и свойства: слагаемое; сумма; алгоритм сложения; переместительный закон сложения; сочетательный закон сложения.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: алгоритм.

Вспомогательные понятия: сложение чисел при помощи двух линеек.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как записать «столбиком» сложение трех однозначных чисел?

Варианты ответа. Первый вариант. Запишем три данных числа столбиком, подчеркнем их горизонтальной чертой и запишем под чертой сумму первых двух чисел, как это показано в пункте. Если при этом получится число, большее 10, то 1 напишем в разряде десятков, опустив ее строкой ниже цифры единиц. Далее к полученной цифре единиц прибавим третье число и запишем цифру единиц на строчку ниже предыдущей цифры единиц. Если при этом получится еще 1 в разряде десятков, то ее запишем левее и ниже. Остается теперь сложить цифры десятков и получить сумму, у которой цифра десятков либо отсутствует, либо равна 1, либо равна 2.

Второй вариант. Можно сначала сложить два числа, а затем к результату прибавить третье.

1.2. Чему равна сумма 600 и 800?

Ответ. Сумма 6 сотен и 8 сотен равна 14 сотням, то есть числу 1400.

1.3. Чему равна сумма 230 и 80?

Ответ. Сумма 23 десятков и 8 десятков равна $23 + 8 = 31$ десятку, то есть числу 310.

1.4. Чему равна сумма $20 + 40 + 70$?

Ответ. 130.

1.5.* Как вычислить столбиком сумму $37 + 45 + 53$?

Варианты ответа. Первый вариант. Найдем сначала сумму 37+45, а потом к результату «столбиком» прибавим число 53.

Второй вариант. Сложим три числа столбиком подобно тому, как это делалось при ответе на вопрос пункта 1.1.

Третий вариант. Сложим сначала цифры единиц, получим 15. Далее найдем сумму десятков: 12. Наконец, сложив 120 и 15, получим в результате 135.

1.6. В каком случае сумма двузначного и трехзначного чисел является четырехзначным числом?

Ответ. Первая слева цифра трехзначного числа должна быть 9, а следующие две цифры давать число, которое в сумме с данным двузначным числом составляет больше 100.

1.7.** По каким правилам составляется таблица сложения в системе счисления с основанием 4?

Варианты ответа. Первый вариант. Сложение цифр сначала произвести в десятичной системе, а затем полученные результаты записать в системе счисления с основанием 4.

Второй вариант. Перемещаясь по клеткам таблицы сложения слева направо с переходом на ниже расположенную строку, каждый раз увеличивать предыдущий результат на 1 и представлять в новой системе счисления.

1.8. Как вы подсчитываете общую стоимость покупок в магазине?

Вариант ответа. Складывая вместе стоимости каждой из покупок последовательно или группируя.

1.9.* Как с помощью двух линеек находить приближенные значения с недостатком и с избытком для суммы двух трехзначных чисел?

Ответ. Будем считать, что двухзначные числа можно точно сложить с помощью линеек. Тогда для вычисления с недостатком суммы двух трехзначных чисел находим их приближения с точностью до 10 с недостатком и складываем получающиеся двузначные количества десятков. Приписывая в конце этой суммы цифру 0, находим приближенное значение искомой суммы с недостатком. Аналогично находится приближенное значение суммы с избытком.

1.10. Какое число появится на пересечении 79-й строки и 146-го столбца, если все-таки продолжить составление таблицы сложения?

Ответ. Строка с номером 79 начинается с числа 80. Если по этой строке пройти до столбца с номером 146, то получим сумму $80 + 145 = 225$.

1.11. Какие законы сложения позволяют записать равенство: $(3 + 5) + (7 + 8) = (3 + 7) + (5 + 8)$?

Ответ. Сочетательный закон позволяет раскрыть скобки, переместительный закон позволяет переставить слагаемые, а после этого на основе сочетательного закона вновь поставить скобки.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9. Найдите сумму наибольшего пятизначного и наименьшего четырехзначного чисел.

Указание. В задаче требуется найти 99 999 + 1000.

12. После выполнения сложения на доске были стерты отмеченные звездочками цифры. Восстановите примеры:

а) 36*8 + 274* + 3*20 = **148; б) 56*7 + 9341 + *32 = 1518*.

Указание. а) Сначала удается восстановить второе слагаемое: 2740, затем первое слагаемое: 3688, после этого третье слагаемое: 3720, а в итоге и сумму: 10 148.

б) Сначала удается восстановить сумму: 15180.

21.** Найдите сумму всех чисел от 1 до 100.

Указание. $1 + 100 = 2 + 99 = ... = 50 + 51 = 101$. Поэтому $1 + 2 + ... + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Чему равна сумма чисел $(100110)_2$ и $(11010)_2$, записанных в двоичной системе?

1) $(111110)_2$; 2) $(1000000)_2$; 3) $(1011110)_2$; 4) $(1010100)_2$.

Указание. Правильная сумма получается по алгоритму сложения и равна $(1000000)_2$.

1.4.* Чему равна сумма чисел $(123)_4$ и $(321)_4$, записанных в системе счисления с основанием 4?

1) $(1010)_4$; 2) $(1110)_4$; 3) $(1120)_4$; 4) $(1220)_4$.

Указание. Правильная сумма получается по алгоритму сложения и равна $(1110)_4$.

2.2.* Складывая числа $(110)_2$ и $(101)_2$, записанные в двоичной системе, ученик ошибся и получил неверный результат $(1101)_2$. Цифры каких разрядов найдены неверно?

1) цифра единиц (первого разряда);

2) цифра второго разряда;

3) цифра третьего разряда;

4) цифра четвертого разряда.

Указание. Правильная сумма получается по алгоритму сложения и равна $(1011)_2$.

§ 2. ВЫЧИТАНИЕ. РАЗНОСТЬ

Цель параграфа — изучить операцию вычитания многозначных натуральных чисел, познакомиться с алгоритмами вычитания, рассмотреть основные законы сложения и вычитания для натуральных чисел. При изучении параграфа учащиеся должны выработать устойчивые навыки вычитания многозначных чисел.

Особенности параграфа. В параграфе напоминается определение разности двух натуральных чисел и разбирается алгоритм вычитания при записи чисел «столбиком».

На втором уровне в порядке ознакомления рассматриваются уравнения вида $a + x = b$ при $b < a$ и указывается на необходимость пополнения в этом случае натуральных чисел отрицательными. На третьем уровне рассматривается понятие «дополнение натурального числа до разрядной единицы» и с его помощью приводится новый способ вычитания, который в основном сводится к сложению многозначных чисел с последующим вычитанием разрядной единицы. В конце параграфа, также для третьего уровня, приводятся некоторые формулы, связанные с раскрытием скобок при вычитании.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: буквенное выражение; сумма натуральных чисел.

Новые математические понятия и свойства: уравнение; корень уравнения; уменьшаемое; вычитаемое; разность; вычитание; алгоритм вычитания; свойства нуля при сложении; свойства разности; дополнение до разрядной единицы.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: отрицательные целые числа.

Вспомогательные понятия: решение уравнения методом подбора корня; невыполнимость действия; вычитание чисел при помощи двух линеек.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как можно проверить правильность результата вычитания одного числа из другого?

Вариант ответа. Сложением разности и уменьшаемого.

2.2. Почему первый штрих на шкале линейки помечен нулем, а не единицей?

Вариант ответа. Шкалу линейки можно считать моделью числовой прямой, а начало на числовой прямой отмечается как 0.

2.3.* Как проверить правильность результата вычитания, выполненного с помощью линейки?

Вариант ответа. Представление разности с помощью прибора, состоящего из двух линеек, соответствует применению этого прибора к вычислению суммы разности и уменьшаемого, причем результат сложения расположен там, где находится уменьшаемое.

2.4. Сколько существует таких натуральных чисел a, что разность a — 5 не определена?

Ответ. Всего 4, это все натуральные числа, меньшие 5.

2.5.** Какую запись для суммы 100 + (–134) вы можете предложить?

Вариант ответа. $100 + (-134) = 100 - 134 = -34$.

2.6. Какое число является разностью чисел $n + 2$ и n для натурального числа n?

Ответ. Число 2.

2.7. Как убедиться в правильности вычитания, выполненного в пункте «столбиком»?

Вариант ответа. Сложением «столбиком» разности и уменьшаемого.

2.8. Как показать, что $((a + b + 1) - a) - b = 1$?

Вариант ответа. Используя сочетательный и переместительный законы сложения, в первых скобках получаем $(a + b + 1) - a = b + 1$. После этого получаем $(b + 1) - b = 1$.

2.9.** Чему равно дополнение натурального числа 53 до 1 000 000?

Ответ. 999 947.

2.10.** Как находить дополнения до разрядных единиц для чисел, записанных в двоичной системе счисления?

Вариант ответа. Находим самый младший разряд с цифрой 1, за которым справа записаны нули. Далее, под этой единицей ставим единицу, поставив под идущими справа нулями нули. В разрядах, расположенных левее указанной единицы, под нулями ставятся единицы, а под единицами ставятся нули. Например, $\dfrac{1001101110100}{110010001100}$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5. Какое число надо прибавить к 321, чтобы получилась сумма чисел 225 и 168?

Указание. Нужно найти $(225 + 168) - 321$.

6. Какое число надо прибавить к 123, чтобы получилась разность чисел 345 и 77?

Указание. Нужно найти $(345 - 77) - 123$.

7. Какое число надо вычесть из 543, чтобы получилась сумма чисел 98 и 325?

Указание. Нужно найти $543 - (98 + 325)$.

8. Какое число надо вычесть из 85, чтобы получилась разность чисел 122 и 98?

Указание. Нужно найти $85 - (122 - 98)$.

15. Матери было 25 лет, когда родилась дочь, и 28 лет, когда родился сын. Сколько лет каждому из них, если теперь всем троим вместе 46 лет?

Указание. Обозначив через x возраст сына, можно составить уравнение $x + (x + 3) + (x + 28) = 46$.

24.* Сколько дней прошло: а) от 1 апреля 2000 года до 21 сентября 2000 года включительно; б) от 21 сентября 2000 года до 1 апреля 2001 года включительно?

Указание. Для подсчета числа дней в задачах такого вида нужно научиться выделять целые года с учетом високосных, целые месяцы с учетом их дней и вычислять число дней в неполных месяцах. Проиллюстрируем это на примере пункта *б*. С 21 по 30 сентября проходит 10 дней; в октябре, ноябре и декабре всего $31 + 30 + 31 = 92$ дня; в январе, феврале и марте невисокосного 2001 года всего $31 + 28 + 31 = 90$ дней; итого с 21 сентября 2000 года до 1 апреля 2001 года прошло всего $10 + 92 + 90 = 192$ дня.

26. Записаны цифры 123456789. Между некоторыми из них поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы в результате получилось число 100.

Варианты решений. $12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$ или $12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89$.

27. Записаны цифры 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Между некоторыми из них поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы в результате получилось число 100.

Вариант решения. $98 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 - 1$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Какие из указанных выражений равны сумме $7214 + (871 - 214)$?

1) $214 + (7871 - 214)$; 2) $7000 + 871$;
3) $7000 + (657 - 214)$; 4) $7000 + (1085 - 214)$.

Указание. Легко проверяется, что подходят варианты 1, 2, 4. Вариант 3 можно сразу отбросить по той причине, что значение выражения заведомо меньше 7600, что меньше 7871.

2.4. Какие из записей являются верными равенствами?

1) $200 - (96 - 41) = (200 - 96) - 41$;
2) $200 - (96 - 41) = (200 - 96) + 41$;
3) $200 - (96 - 41) = 200 - 55$;
4) $200 - (96 - 41) = 200 + 55$.

Указание. Правильно раскрыты скобки во втором варианте, и правильно выполнено действие в скобках в третьем варианте.

Глава 6
ЛУЧ, ПРЯМАЯ

Цель главы — выработать у учащихся наглядные представления о неограниченных геометрических фигурах — луче и прямой, сформулировать основные свойства взаимного расположения точек и прямых, начать изучение числовой прямой с изображения на ней нуля и натуральных чисел.

Особенности главы. Основой при изучении данной главы является понятие отрезка. Поэтому вначале рекомендуется вспомнить известные сведения об отрезках. Дальнейшее изучение главы связано с воображаемым понятием неограниченного продолжения отрезка. Это может вызвать трудности при изучении теоретического материала, а поэтому на отмеченную особенность прямых и лучей на плоскости следует систематически обращать внимание.

§ 1. ЛУЧ

Цель параграфа — на основе интуитивного наглядного представления о луче придать понятию луча точный математический смысл описанием свойств точек, из которых состоит луч.

Особенности параграфа. В реальной жизни ученики неоднократно употребляли слово «луч», — например, луч света. Целесообразно обсудить, не давая никаких определений, что понимается под словом «луч», и после этого перейти от «житейского» понимания этого слова к математическому определению.

На основе воображаемого неограниченного продолжения отрезка AB за точку B формируется представление о луче и приводятся два свойства: на любом луче от его начала можно отложить отрезок любой заданной длины; если на луче AB взять две различные точки M и N, то все точки отрезка MN тоже будут расположены на луче AB. Следует иметь в виду, что понятие луча может оказаться непростым, так как это — вторая после плоскости неограниченная фигура, с которой знакомятся учащиеся. На чертежах изображают только часть луча, и ученик должен осознать главное — при необходимости эту часть можно дополнить. Далее рассматриваются свойства луча, которые можно охарактеризовать двумя словами — неограниченность и выпуклость.

На третьем уровне постулируются два свойства, которые можно считать как свойствами лучей, так и свойствами перемещений.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: понятие отрезка; длина отрезка; основные свойства длины; условие, при котором рассматриваемая точка лежит на заданном отрезке.

Новые математические понятия и свойства: луч; начало луча; стороны луча; основные свойства луча (возможность откладывания от его начала отрезков любой длины; если концы отрезка лежат на луче, то и весь отрезок целиком принадлежит лучу).

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: перемещение лучей; равенство лучей как геометрических фигур; неограниченная фигура.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какой отрезок является общим для лучей AB и BA?

Ответ. Общие для этих лучей точки — это только точки отрезка AB. При ответе на этот вопрос на третьем уровне можно обсудить, каким образом можно показать, что не лежащие на этом отрезке точки не могут быть общими для данных лучей.

1.2. Как один и тот же луч обозначить пятью разными способами?

Вариант ответа. Отметим на луче AB точки C, D, E, F, не совпадающие ни с точками A и B, ни друг с другом. Тогда AC, AD, AE, AF — это еще четыре обозначения того же самого луча.

1.3. Возьмем на луче произвольную точку M. Как отложить от этой точки отрезок данной длины, целиком лежащий на луче? Сколько может быть таких отрезков?

Вариант ответа. С помощью циркуля проведем окружность с центром в точке M и радиусом, равным данной длине. Окружность пересечет луч либо в одной точке (если начало луча окажется внутри круга), либо в двух точках (если начало луча окажется вне круга или на окружности). Это и есть вторые концы искомых отрезков, которых может быть либо один, либо два.

1.4.* Почему луч не может быть равен отрезку?

Вариант ответа. Предположим, что луч AB равен отрезку CD. На луче AB можно указать такую точку M, что $|AM| > |CD|$. Если некоторое перемещение переводит луч AB в отрезок CD, то это перемещение переведет точки A и M в некоторые точки P и Q отрезка CD, такие, что $|PQ| = |AM|$. Но этого не может быть, так как $|PQ| \le |CD|$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Какую геометрическую фигуру образуют точки всех отрезков длины 1 см: а) начинающихся в точке A; б) проходящих через точку A?

Указание. В случаях *а* и *б* получается круг с центром в точке A и радиусом 1 см. Чтобы объяснить ответ второго случая, можно самим рассмотреть указанный круг, выбрать в нем некоторую точку M и показать, как провести отрезок с концом в точке M длиной 1 см, чтобы он содержал точку A.

Деликатные моменты в данной задаче могут возникать по следующим причинам: включать в искомое множество точки границы круга или нет. А именно, если считать, что понятие «отрезок проходит через точку» означает, что эта точка не может быть концом отрезка, то тогда точки границы из круга нужно удалять; если данная точка может быть концом отрезка, то все точки границы круга нужно включать. Этой ситуации можно избежать, если в условии задачи слово «проходит» заменить на слово «содержит».

2. На отрезке AB выбрана точка C, не совпадающая с его концами. Сколько среди лучей AB, AC, CB, BA, BC, CA различных фигур?

Указание. Представить, что каждый из перечисленных лучей изображен на отдельной картинке. Тогда нетрудно понять, что всего среди них четыре различных луча.

5. Какую геометрическую фигуру образуют точки всех лучей: а) начинающихся в точке A; б) проходящих через точку A?

Указание. В обоих случаях получится вся плоскость, так как через любую точку плоскости можно провести луч с началом в точке A.

10. Расстояние между точками A и B равно 15 см. Сколько существует различных отрезков длины 12 см, лежащих на луче AB, один из концов которых совпадает с точкой B? Изменится ли ответ, если рассматривать отрезки длиной 20 см?

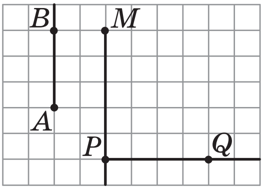


Рис. 1

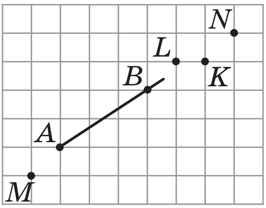


Рис. 2

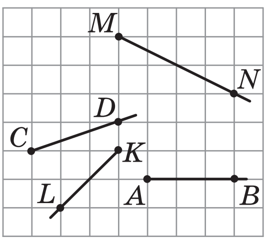


Рис. 3

Указание. Нужные отрезки следует находить с помощью циркуля. Тогда в первом случае получим две точки, а во втором — одну.

14*. Посмотрите на рис. 1. Какие перемещения копии этого рисунка переводят: а) копию луча AB в луч PQ; б) копию луча AB в луч MP; в) копию луча MP в луч PQ?

Указание. а) Сначала, не поворачивая копии, совместить точки A на копии и P на основном чертеже. Затем повернуть копию вокруг точки A. В остальных пунктах этой задачи можно поступать аналогично.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. На рис. 2 изображены четыре точки и отрезок AB, являющийся частью луча AB. Какие из указанных точек лежат на луче AB?

1) M; 2) N; 3) K; 4) L.

Указание. В неявной форме использовать то, что точка N находится от точки B на три клеточки вправо и на две клеточки вверх.

2.4. На рис. 3 изображены отрезки лучей AB, CD, MN, KL. Какие два из указанных лучей пересекаются?

1) AB и CD; 2) AB и MN;
3) CD и MN; 4) KL и CD.

Указание. Очевидно, что лучи AB и CD, KL и CD не пересекаются, так как «смотрят в разные стороны».

§ 2. ПРЯМАЯ

Цель параграфа — на основе интуитивного наглядного представления о прямой придать понятию прямой точный математический смысл описанием свойств точек, из которых состоит прямая; закрепить у учащихся интуитивное представление о прямой как о результате объединения двух лучей, служащих продолжениями (в разные стороны) данного отрезка.

Особенности параграфа. На основе наглядных представлений формируются представления еще об одной неограниченной фигуре — прямой, обсуждаются разные способы обозначения одной и той же прямой. Приводятся два свойства: через любые две различные точки можно провести единственную прямую; любая точка на прямой делит прямую на два луча с общим началом в этой точке. Эти свойства не доказываются (на самом деле, это аксиомы прямой), но на наглядном уровне воспринимаются совершенно естественно. Значительно сложнее воспринимается свойство прямой делить плоскость на две части, каждая из которых называется полуплоскостью. Рассмотрению полуплоскостей и их свойствам следует уделить основное внимание при изучении данного параграфа.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: отрезок; луч; начало луча.

Новые математические понятия и свойства: прямая; единственность прямой, проходящей через две различные точки; противоположные лучи; полуплоскость, основное свойство точек полуплоскости.

Вспомогательные понятия: граница.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: пучок лучей; граница полуплоскости; перемещение прямых на плоскости.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как вы понимаете неограниченность прямой?

Вариант ответа. Неограниченность луча обсуждалась в пункте 1.2 и означала, что от начала луча можно отложить отрезок любой длины. Подобно этому, под неограниченностью прямой будем понимать возможность отложить от любой точки прямой в любую сторону отрезок любой длины. Другими словами, можно сформулировать следующее свойство: для любого отрезка MN и любой точки A на обоих лучах данной прямой с началом в точке A найдутся точки B и C, такие, что отрезки AB и AC равны MN.

Это свойство и можно считать обоснованием неограниченности прямой.

2.2. Как при помощи линейки провести прямолинейный отрезок большей длины, чем длина линейки?

Вариант ответа. Проведем отрезок AB, равный длине линейки. На отрезке отмечаем точку M. Затем перемещаем линейку так, чтобы ее конец совпал с точкой M, а край линейки проходил через точку A, и проводим новый отрезок, равный длине линейки. Это построение можно повторить необходимое число раз.

2.3. На какие части делят прямую две ее различные точки?

Вариант ответа. Пусть на прямой взяты точки A и B. Они разбивают прямую на такие три не пересекающиеся части: отрезок AB, луч с началом в точке A, противоположный лучу AB, и луч с началом в точке B, противоположный лучу BA.

2.4. Что вы можете сказать о взаимном расположении треугольника и прямой?

Вариант ответа. Прямая может: а) проходить через вершину и не пересекать противолежащую сторону; б) проходить по стороне треугольника; в) проходить через вершину и одну из точек противолежащей стороны; г) пересекать две стороны в разных точках; д) не иметь ни одной общей точки со сторонами треугольника.

2.5.* Почему прямая и луч не равны как геометрические фигуры?

Вариант ответа. Следует ожидать, скорее, интуитивно мотивированного, нежели формально-логического ответа на данный вопрос. Например: луч имеет начало, а прямая — нет. Или: луч бесконечен только с одной стороны, а прямая — с двух сторон. Эти ответы на интуитивном уровне отражают фундаментальное различие между лучами и прямыми.

Приведем также соответствующее формальное рассуждение. Возьмем произвольный луч AB и любую прямую a. Пусть при некотором перемещении копии точек A и B совместились соответственно с точками C и D на прямой a. Так как при перемещении луч переходит в луч, то копия луча AB совместится с лучом CD. Лучу, противоположному CD на прямой a, не соответствуют никакие точки луча AB. Таким образом, копия данного луча никак не сможет совпасть целиком со всей данной прямой.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. б)* Сколько различных прямых можно провести через каждые две из выбранных 6 точек, если три из этих точек лежат на одной прямой, а три оставшиеся — на другой (рис. 1)?

Указание. Пусть точки A, B, C лежат на прямой a, точки D, E, F — на прямой b. Тогда условию задачи удовлетворяют различные прямые a, b, AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF.

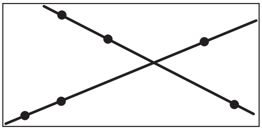


Рис. 1

4. Три прямые попарно пересекаются в точках A, B и C (рис. 2). Сколько лучей начинаются в этих точках и лежат на данных прямых?

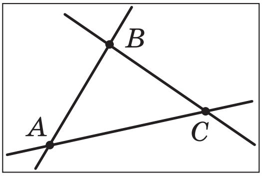


Рис. 2

Указание. Из каждой точки выходит четыре различных луча.

6. в)** На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость пять прямых?

Указание. Будем исходить из того, что задачи 6 а, 6 б* уже решены и установлено, что четыре прямые могут разделить плоскость самое большее на 11 частей. Добавление пятой прямой m приведет к наибольшему числу частей только в том случае, если прямая m пересечет четыре предыдущие прямые в четырех различных точках (рис. 3). Этими точками прямая m разделится на 5 частей. Каждая из таких пяти частей будет располагаться в какой-то одной области, которые получались при проведении четырех начальных прямых, и будет делить эту область на две части. В итоге вместо пяти областей, которые пересекает прямая m, станет 10 областей, то есть на 5 областей больше. Следовательно, наибольшее число частей, на которые могут разделить плоскость пять прямых, равно 16. Легко понять, что наименьшее число частей, на которые могут разделить плоскость пять различных прямых, равно 6.

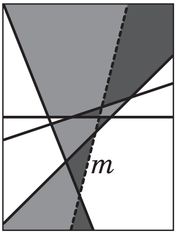


Рис. 3

7. На сколько частей делят клетчатую бумагу 4 вертикальные прямые и 5 горизонтальных прямых?

Указание. 5 горизонтальных прямых разделяют бумагу на 6 частей, а каждую из этих частей 4 вертикальные прямые делят на 5 частей.

9.* Придумайте четырехугольник, который можно разделить на три части одной прямой.

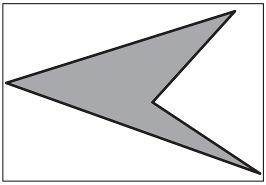


Рис. 4

Указание. Например, можно взять такой четырехугольник, как на рис. 4. Отметим, что в качестве примера подходит любой невыпуклый четырехугольник.

10.* Как двумя прямыми разделить четырехугольную область на рис. 4 на 6 частей?

Указание. Рассмотреть прямые, которые пересекают все четыре стороны четырехугольника, и из них выбрать две, которые пересекаются внутри заданной области.

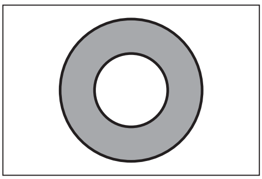


Рис. 5

11.* На какое наибольшее число частей можно разделить кольцо на рис. 5 двумя прямыми?

Указание. На 5 частей.

14.* Может ли прямая пересечь все стороны: а) треугольника; б) четырехугольника?

Указание. Может. Достаточно в случае треугольника взять прямую, проходящую через одну из вершин и пересекающую противоположную сторону, а в случае четырехугольника — взять продолжение одной из его диагоналей.

15.* Может ли прямая пересечь все стороны треугольника в точках, не совпадающих с его вершинами?

Указание. Нет, не может. Если прямая не проходит через вершины треугольника, то две из них обязательно лежат в одной из полуплоскостей, определяемых данной прямой. Но тогда сторона треугольника, соединяющая эти вершины, с данной прямой не пересекается.

16.* Может ли прямая пересечь все стороны четырехугольника в точках, не совпадающих с его вершинами?

Указание. В качестве примера можно рассмотреть четырехугольник, изображенный на рис. 4.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость три прямые?

1) На три; 2) на пять;
3) на семь; 4) на девять.

Указание. Две прямые могут разделить на 4 части. Третья проведенная прямая может делиться первыми двумя на три части, а каждая из этих частей будет делить некоторую из предыдущих частей плоскости на две части. Поэтому к четырем частям добавится еще три.

§ 3. ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ

Цель параграфа — выработать начальные представления о направлении, числовом луче и числовой прямой, научиться изображать натуральные числа, по изображению определять соответствующее число и сравнивать числа по их изображениям.

Особенности параграфа. Числовая прямая является математическим объектом, который отражает связи между геометрией и алгеброй (арифметикой). К понятию числовой прямой ученик будет возвращаться в течение всего школьного курса. Отметим, что в параграфе подчеркивается явная «незавершенность» числовой прямой, если ограничиваться натуральными числами и нулем, что наглядно бросается в глаза. Поэтому в порядке ознакомления рассказывается о том, как на числовой прямой должны изображаться отрицательные и дробные числа.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: отрезок; прямая; луч.

Новые математические понятия и свойства: числовая прямая; числовая ось; числовой луч; единичный отрезок числовой прямой; положительное направление на числовой прямой; изображение числа; сравнение чисел по их изображениям на числовой прямой.

Вспомогательные математические понятия: целые числа; дробные числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. На числовой прямой единичный отрезок обозначен через OE. *Вопрос*. На каком расстоянии от 1 на числовой прямой будет изображено число 1000, если отрезок OE имеет длину 1 см?

Ответ. На расстоянии 999 см.

3.2. Как из одной и той же прямой получить две различные числовые прямые?

Варианты ответа. а) Можно изменить начало отсчета; б) можно изменить масштаб, то есть длину единичного отрезка; в) можно изменить направление.

3.3. Как из нескольких чисел, изображенных на горизонтальной числовой прямой с положительным направлением вправо, выбрать самое большое и самое малое?

Ответ. При положительном направлении вправо наибольшее из чисел — это самое правое число, наименьшее из чисел — самое левое число.

3.4.** На числовой прямой единичный отрезок обозначен через OE. *Вопрос.* В каком месте числовой прямой вы изобразили бы половину единицы?

Ответ. В середине отрезка OE, так как середина разбивает отрезок на два равных отрезка, на «две половины».

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. На числовой прямой с началом отсчета O число 1 изображается точкой E, для которой $|OE| = 1$ мм. На каком расстоянии от точки M, изображающей число 100, находятся изображения чисел: б) 37; д) 123?

Указание. В пункте б) имеем: $|OM| = 100$ мм, $|OK| = 37$ мм, и точка K лежит на отрезке OM. Поэтому $|OK| + |KM| = |OM|$, откуда $|KM| = |OM| - |OK|$.

В пункте д) получается чуть иначе: $|OM| = 100$ мм, $|OK| = 123$ мм, и точка M лежит на отрезке OK. Поэтому $|OM| + |MK| = |OK|$, откуда $|MK| = |OK| - |OM|$.

3. в)* Какое число на числовой прямой изображает середина C отрезка AB, если точки A и B изображают числа 1995 и 1991?

Указание. Если точка C изображает число x, то $1995 - x = x - 1991$.

4.* Точки A и B на числовой прямой изображают числа 127 и 139. Точки C и D делят отрезок AB на три равные части. Какие числа изображают точки C и D?

Указание. Если точка C изображает число x, причем $|AC| < |CB|$, то $139 - x = 2 \cdot (x - 127)$.

8. На числовом луче с началом отсчета O число 1 изображается точкой E, для которой $|OE| = 1$ *см*. Сколько точек, изображающих целые числа, может находиться на отрезке длины 15 см, лежащем на этом луче?

Указание. Может быть 16 точек, когда концы отрезка — изображения целых чисел. Если концы отрезка не являются изображениями целых чисел, то будет 15 точек. Больше 16 или меньше 15 точек не может быть. Если представить, например, что на отрезке всего 14 целых точек, то его длина обязательно меньше 15 см.

11.** На числовой оси из точки 1995 кузнечик прыгает либо на 5 единиц вправо, либо на 3 единицы влево. И так он прыгает из каждой точки, в которой находится. Сможет ли кузнечик через несколько прыжков попасть в точку 1994?

Указание. Достаточно сделать два прыжка влево и один прыжок вправо.

12.** За день улитка поднимается по столбу на 4 м, а за ночь опускается на 2 м. За какое время улитка поднимется от основания до вершины столба высотой 8 м?

Указание. За двое суток улитка поднимется на 4 м, после чего за день, то есть за половину суток, достигнет вершины столба. Если предполагать, как иногда считают, что сутки — это «день и ночь», то ответ можно сформулировать и так: «К концу третьего дня».

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. На числовой прямой расстояние между изображениями чисел 0 и 1 равно 1 см, точка A изображает число 36. Изображения каких из указанных чисел расположены ближе к началу отсчета, чем к точке A?

1) 13;   2) 15;   3) 17;   4)19.

Указание. Ближе к началу отсчета расположены изображения чисел, которые меньше половины от 36.

2.3. На числовой прямой расстояние между изображениями чисел 0 и 1 равно 1 см, точка A изображает число 27, точка B изображает число 59. Изображения каких из указанных чисел расположены ближе к точке A, чем к точке B?

1) 40;   2) 42;   3) 44;   4) 46.

Указание. При заданных вариантах ближе к точке A расположены изображения чисел, которые больше 27 и меньше 43.

2.4. На числовой прямой расстояние между изображениями чисел 0 и 1 равно 1 см, точка A изображает число 25. При каких из указанных значений a и b точка A является серединой отрезка, изображающего числа a и b?

1) $a = 17$, $b = 33$;   2) $a = 9$, $b = 41$;

3) $a = 21$, $b = 39$;   4) $a = 14$, $b = 36$.

Указание. Для середины, равной 25, должно выполняться равенство $b - 25 = 25 - a$.

Глава 7
УМНОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель главы — напомнить определение умножения натуральных чисел, обратить внимание на основные законы умножения, рассмотреть алгоритм умножения многозначных чисел, рассмотреть примеры преобразования числовых и буквенных выражений, содержащих скобки.

Особенности главы. Изучение данной главы в значительной степени опирается на то, что учащиеся в младших классах уже знакомились с умножением натуральных чисел и приобрели определенные навыки. Поэтому сначала напоминается определение умножения и указывается на индуктивную основу этого определения. Затем рассматриваются основные законы умножения и только после изучается алгоритм умножения, как следствие применения основных законов умножения. В конце главы рассматривается преобразование выражений со скобками.

§ 1. ЗАКОНЫ УМНОЖЕНИЯ

Цель параграфа — напомнить определение умножения натуральных чисел, рассмотреть основные законы умножения.

Особенности параграфа. Ввиду того что на школьном уровне обоснование законов сложения и умножения можно частично рассматривать только в старших классах на специализированном уровне, в данном параграфе справедливость переместительного и сочетательного законов умножения и распределительного закона сначала опирается на рассмотрение примеров, после чего приводится общая формулировка. Точно так же рассматриваются свойства нуля и единицы при умножении. На третьем уровне рекомендуется провести обоснование некоторых общих правил. В частности, проверить выполнение распределительного закона для случая, когда некоторые числа равны нулю, свойства нуля и единицы для законов умножения.

Ввиду важности законов для арифметических операций, которые будут впоследствии распространяться на рациональные, действительные и комплексные числа, на третьем уровне рассматриваются и другие названия законов: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сложение и умножение натуральных чисел; таблица умножения.

Новые математические понятия и свойства: переместительный закон умножения; сочетательный закон умножения; распределительный закон, свойства нуля при умножении.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. В пункте рассматривается индуктивный подход к определению умножения натуральных чисел и указывается на то, что с применением этого подхода может быть составлена таблица умножения однозначных чисел. Однако на основе этого подхода составленную таблицу нетрудно расширять и на произведения многозначных чисел. В связи с этим задается следующий вопрос к пункту: «Какое число появится на пересечении 12-й строки и 16-го столбца этой таблицы, если продолжить ее составление для чисел, больших девяти?»

Ответ. В первом столбце (на первом месте) в 12-й строке будет стоять число 12, во втором столбце $12 + 12 = 24$ и т.д. Когда доберемся таким образом до 16-го столбца, то получим 192.

1.2.* По какому свойству длин отрезков мы попадаем в точку, изображающую произведение ab, когда откладываем b раз отрезок длины a?

Указание. Используется свойство: если отрезок AB составлен из двух отрезков AC и CB, то длина AB равна сумме длин $AC + CB$. По этому свойству, отложив отрезок длины a два раза, получим отрезок длины $2a$, отложив еще один отрезок длины a, получим отрезок длины $2a + a = 3a$, и т. д. Если отрезок длины a отложить b раз, то получим отрезок длины

$$\underbrace{a + a + a + \ldots.. + a}_{b \text{ слагаемых}} = ab.$$

1.3. Почему для любых натуральных чисел a и b выполняется равенство $(a \cdot b) \cdot b = b \cdot (b \cdot a)$?

Ответ. Используя дважды переместительный закон, получаем: $(a \cdot b) \cdot b = b \cdot (a \cdot b) = b \cdot (b \cdot a)$.

1.4. В пункте рассматривается задача: «В параде участвуют 11 батальонов, каждый из которых построен в 2 колонны. В каждой колонне 12 рядов, а в каждом ряду 16 солдат. Спрашивается, сколько всего солдат участвует в параде?» *Вопрос.* Какому числу равен ответ в рассмотренной задаче?

Ответ. В пункте получено выражение в виде произведения четырех сомножителей. Чтобы ответить на поставленный вопрос, достаточно выполнить действия и получить 4224.

1.5. Какие законы умножения позволяют записать равенство $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$?

Ответ. Равенство выполняется в силу переместительного закона умножения. Более глубокое понимание существа дела демонстрирует ответ: «И еще в силу сочетательного закона», так как сама запись пяти сомножителей без скобок предполагает его использование. Следовательно, полный вывод может быть таким:

$$(((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5) \cdot 6 = 6 \cdot (((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 5) = 6 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 4)) =$$
$$= (6 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3) \cdot 4) = (6 \cdot 5) \cdot (4 \cdot (2 \cdot 3)) = (6 \cdot 5) \cdot 4 \cdot (2 \cdot 3) =$$
$$= (6 \cdot 5) \cdot 4 \cdot (3 \cdot 2) = (((6 \cdot 5) \cdot 4) \cdot 3) \cdot 2.$$

1.6. Как раскрыть скобки в выражении $(a + b) \cdot (c + d)$?

Ответ. Используя законы умножения, последовательно получаем: $(a + b)(c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = c \cdot (a + b) + d \cdot (a + b) = (ca + cb)(da + db) = ac + ad + bc + bd$.

1.7. Каково числовое значение выражения $3 \cdot (1 + a \cdot 0)$?

Ответ. При любом значении a равно 3.

1.8. Как объяснить, что справедливо равенство $a \cdot (b - 0) = a \cdot b - a \cdot 0$?

Вариант ответа. Заметим, что

$m - 0 = m + 0$, $n \cdot 0 = 0$ при любых m и n. Поэтому $a \cdot (b - 0) = a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0 = a \cdot b + 0 = a \cdot b - 0 = a \cdot b - a \cdot 0$.

1.9.** В пункте приведена цепочка равенств: $a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + x$, из которой делается вывод, что $x = 0$. *Вопрос.* Какие свойства нуля и единицы использованы в этом рассуждении?

Ответ. В первом равенстве определение умножения на 1; во втором равенстве свойство нуля при сложении; в третьем равенстве распределительный закон.

1.10.** Сколько решений имеет уравнений $0 \cdot x = 2$?

Ответ. Решений нет совсем, потому что $0 \cdot x = 0$ при любом целом значении. В дальнейшем будет показано, что и в других числовых системах данное уравнение решений не имеет.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.** В одной упаковке помещаются 10 пачек печенья. В картонной коробке в один ряд помещается 4 упаковки печенья, в одном слое — 5 рядов, в коробке — 7 слоев. В вагон помещается 10 слоев коробок, в одном слое — 15 рядов, в одном ряду — 30 коробок. Сколько пачек печенья входит в один железнодорожный состав из 50 вагонов?

Указание. Нужно вычислить произведение

$$10 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 50.$$

6.** Каково число всех четырехзначных чисел, записываемых только цифрами 1 и 7?

Указание. Это число равно произведению $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

7*, 8, 9**.** Решаются аналогично задаче 6.**

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Чему равно произведение $5 \cdot 423 \cdot 4$?

1) 8230; 2) 8260; 3) 8460; 4) 8640.

Указание. Умножение легче производить в другом порядке: $5 \cdot 423 \cdot 4 = 423 \cdot (5 \cdot 4) = 423 \cdot 20$.

1.3. Чему равно значение выражения $28 \cdot 7129 - 28 \cdot 7124$?

1) 140; 2) 196; 3) 280; 4) 560.

Указание. Полезно воспользоваться распределительным законом и получить, что $28 \cdot 7129 - 28 \cdot 7124 = 28 \cdot (7129 - 7124)$.

1.4. Чему равно значение выражения $19 \cdot 20 \cdot 21 - 18 \cdot 19 \cdot 20$?

1) 1100; 2) 1140; 3) 1180; 4) 1220.

Указание. Также полезно воспользоваться распределительным законом: $19 \cdot 20 \cdot 21 - 18 \cdot 19 \cdot 20 = 19 \cdot 20 \cdot (21 - 18)$.

2.2. Каким из приведенных сумм равно произведение $102 \cdot 103$?

1) 10 000 + 6; 2) 10 200 + 306;

3) 10 300 + 206; 4) 10 000 + 500 + 6.

Указание. С использованием законов умножения можно быстро получить, что заданное произведение равно 10 000 + 500 + 6.

§ 2. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Цель параграфа — изучить алгоритм умножения многозначных чисел.

Особенности параграфа. Основы алгоритма умножения натуральных чисел рассматривались в младших классах. Новым является рассмотрение двух подходов к умножению. Первый подход — это традиционное умножение первого сомножителя на цифры второго сомножителя с соответствующим сдвигом записи результатов. Известно, что при этом часть действий приходится выполнять, сохраняя отдельные результаты «в уме». Поэтому наряду с данным алгоритмом предлагается рассмотреть модифицированный алгоритм, в котором для записи результата умножения многозначного числа на однозначное предлагается использовать две строки. Новый способ чуть более громоздкий, чем первый, тем не менее может оказаться более полезным при работе, и в особенности для тех детей, у которых изучение математики вызывает затруднения.

Для второго и третьего уровня предлагается рассмотреть умножение чисел в недесятичной системе счисления по тому же алгоритму, что и в десятичной системе. Для примера рассмотрена система счисления с основанием 4. Показано, как составить таблицу умножения в этой системе, и рассмотрен пример на умножение чисел в четверичной системе.

Умножение чисел в разных системах счисления может стать одной из тем занятий школьного математического кружка в 5 классе.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сложение натуральных чисел; таблица умножения; умножение двузначных чисел; понятие многозначного числа и разряда.

Новые математические понятия и свойства: алгоритм умножения; алгоритм умножения в системе счисления с основаниями 4 и 2.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Чему равно произведение $8000 \cdot 5$?

Вариант ответа. 8 тысяч умножить на 5, это будет 40 тысяч, то есть 40 000.

2.2. Чему равно значение $2^6 \cdot 5^4$?

Вариант ответа. Можно вычислить $2^6 \cdot 5^4$ и перемножить их по правилу умножения многозначных чисел. Но проще поступить так:

$$2^6 \cdot 5^4 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 2^2 \cdot 10^4 = 40\,000.$$

2.3. В пункте рассматривается алгоритм умножения «столбиком» одного многозначного числа на другое на примере вычисления произведения 86·74. *Вопрос.* Какие законы сложения и умножения использованы в рассмотренном примере?

Ответ. Сначала распределительный закон, когда умножается 86 на 4, затем еще раз распределительный закон, когда умножается 86 на 7, а при сложении в «столбиках» переместительный и сочетательный законы.

2.4. Чему равно произведение $7321 \cdot 10\,001$?

Вариант ответа. Действуя по правилу, очень легко ошибиться, на сколько разрядов влево перенести 7321. Проще так: $7321 \cdot 10\,000 = 73\,210\,000$. А теперь к этому числу следует прибавить 7321. Получим 73 217 321.

2.5.* Как сформулировать общее правило умножения натуральных чисел, оканчивающихся нулями?

Вариант ответа. Нужно выделить число нулей в конце записи каждого из сомножителей, перемножить получающиеся натуральные числа и в конце этой записи добавить столько нулей, сколько в сумме выделялось во всех сомножителях.

2.6.** Как в двоичной системе счисления умножить число на 2^{10}?

Ответ. К числу, записанному в двоичной системе счисления, приписать 10 нулей справа. Получим результат умножения, записанный также в двоичной системе счисления.

Обратим внимание на то, что поскольку речь идет об умножении числа, записанного в двоичной системе, то число 2^{10} логичнее было бы записать в двоичной системе: $((10)_2)^{(1010)_2}$. Но, конечно, запись в десятичной системе привычнее и легче воспринимается.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.** Выполните умножение в двоичной системе:

а) $(101)_2 \cdot (11)_2$; б) $(10100)_2 \cdot (11)_2$;

в) $(101101)_2 \cdot (10101)_2$; г) $(100111)_2 \cdot (111001)_2$.

Указание. В двоичной системе умножение на $(10)_2$ соответствует переписыванию нуля в конце записи первого сомножителя. Поэтому все задачи можно свести к сложению. Например, в пункте *в* это будет выглядеть так:

$(101101)_2 \cdot (10101)_2 = (101101)_2 + (10110100)_2 + (1011010000)_2$

7.** Выполните умножение в четверичной системе:

а) $(23)_4 \cdot (321)_4$; б) $(101)_4 \cdot (11)_4$;

в) $(10100)_4 \cdot (11)_4$; г) $(23)_4 \cdot (33)_4$.

Указание. Первый способ. Перевести все в десятичную систему, выполнить действия, а затем результат представить в системе счисления с основанием 4.

Второй способ. Применить алгоритм умножения, используя таблицы сложения и умножения в системе счисления с основанием 4.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных сумм равны произведению $123 \cdot 12$?

1) $1230 + 123 + 143$; 2) $1230 + 246$;

3) $1200 + 240 + 36$; 4) $1200 + 480 + 36$.

Указание. Заметив, что $123 \cdot 12 = 123 \cdot (10 + 2)$ и $123 \cdot 12 = (100 + 20 + 3) \cdot 12$, получаем правильные ответы 2 и 3.

2.4. Известно, что $253 \cdot 42 = 10\ 626$. Какие из приведенных равенств являются верными?

1) $253 \cdot 41 = 10\ 373$; 2) $253 \cdot 43 = 10\ 879$;

3) $253 \cdot 40 = 10\ 120$; 4) $253 \cdot 44 = 11\ 122$.

Указание. В первом варианте должно быть на 253 меньше заданного числа 10 626, во втором — на 253 больше, в третьем — на 506 меньше, в четвертом — на 506 больше.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ С ЧИСЛОВЫМИ И БУКВЕННЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

Цель параграфа — рассмотреть правила выполнения арифметических действий в выражениях со скобками.

Особенности параграфа. В параграфе изучаются простейшие правила преобразования выражений со скобками, разъясняется понятие общего множителя, рассматриваются примеры вынесения общего множителя за скобки.

На втором уровне изучаемые преобразования применяются к выражениям $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, в результате чего в порядке ознакомления возникают формулы, которые известны как формулы сокращенного умножения.

На третьем уровне рекомендуется также использовать формулу разности квадратов для проверки следующего интересного свойства натурального ряда. Возьмем произвольное натуральное число $n > 1$ и составим произведение двух соседних с ним чисел $n - 1$ и $n + 1$. Тогда

$$(n - 1)(n + 1) = n^2 - 1,$$

то есть произведение двух соседних с n чисел всегда на единицу меньше, чем квадрат выбранного числа.

В будущем формулу для разности квадратов полезно использовать также в устных вычислениях типа

$$5{,}2 \cdot 4{,}8 = \left(5 + \frac{1}{5}\right)\left(5 - \frac{1}{5}\right) = 25 - \frac{1}{25} = 24\frac{24}{25} = 24{,}96.$$

Полезно рассмотреть также геометрическую иллюстрацию формулы квадрата суммы двух чисел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: сложение, вычитание и умножение натуральных чисел; алгоритм умножения натуральных чисел; законы сложения и умножения.

Новые математические понятия и свойства: вынесение множителя за скобки; квадрат суммы $(a + b)^2$; квадрат разности $(a - b)^2$; разность квадратов $a^2 - b^2$.

Вспомогательные понятия: числовые и буквенные выражения; скобки; раскрытие и расстановка скобок; формула.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Каким выражением без скобок можно заменить $2(a + b)$, где a и b — числа?

Ответ. В силу распределительного закона $2(a + b) = 2a + 2b$.

3.2. Почему для любых чисел a и b справедливо равенство: $(a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = (a + b) \cdot (a + b)$?

Ответ. По распределительному закону $c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b)$. Взяв $c = a + b$, получим требуемое равенство.

3.3. Какой множитель можно вынести за скобки в выражении $6a + 12b + 3$?

Ответ. $6a + 12b + 3 = 3 \cdot (2a + 4b + 1)$.

3.4.* Чему равно значение $102^2 - 2^2$?

Ответ. По формуле разности квадратов имеем: $102^2 - 2^2 = (102 + 2)(102 - 2) = 104 \cdot 100 = 10\,400$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.** Произведение трех последовательных натуральных чисел равно 1320. Найдите эти числа.

Указание. Первый способ. Наибольшее из этих чисел больше 11, так как произведение $9 \cdot 10 \cdot 11$ меньше 1320. Наибольшее из чисел меньше 14, так как даже $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728 > 1320$. Остается рассмотреть два варианта: $10 \cdot 11 \cdot 12$ и $11 \cdot 12 \cdot 13$.

Второй способ. $1320 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. После этого можно перебрать комбинации сомножителей.

$$\begin{array}{r} \times\ 72 \\ ** \\ \hline +\ 21* \\ ** \\ \hline *** \end{array}$$

Рис. 1

$$\begin{array}{r} \times\ 45 \\ ** \\ \hline ** \\ +\ 135 \\ \hline ***0 \end{array}$$

Рис. 2

$$\begin{array}{r} \times\ 52 \\ ** \\ \hline ** \\ +\ 2*8 \\ \hline **** \end{array}$$

Рис. 3

5.** На рисунках 1—3 замените звездочки цифрами так, чтобы умножение «столбиком» было правильным.

Указание. На всех рисунках можно сразу найти второй множитель. На первом рисунке — число 13; на втором рисунке — число 32; на третьем рисунке — число 41.

6.** Замените звездочки знаками сложения «+», вычитания «−», умножения «×» и расставьте скобки так, чтобы при выполнении действий получилась указанная справа величина:

а) 3*6*12 = 6; б) 24*36*12*12*36 = 0;
в) 36*6*25*5 = 600; г) 6*6*6*6*6 = 66;
д) 121*19*2*50 = 5000; е) 24*4*10 = 200.

Указание. а) $3 \cdot 6 - 12 = 6$; б) например, $24 \cdot 36 \cdot (12 - 12) \cdot 36 = 0$; $(24 + 36) - (12 + 12 + 36) = 0$; в) $(36 - 6) \cdot (25 - 5) = 600$; г) например, $6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 - 6 = 66$; д) $(121 - 19 - 2) \cdot 50 = 5000$; е) $(24 - 4) \cdot 10 = 200$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из приведенных сумм равны 45^2?

1) $1600 + 200 + 25$; 2) $1600 + 400 + 25$;
3) $2500 - 500 + 25$; 4) $2500 - 250 + 25$.

Заметим, что $1600 + 400 + 25 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 25 = (40 + 5)^2$, $2500 - 500 + 25 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 5 + 25 = (50 - 5)^2$. Конечно, можно произвести непосредственно сложения и вычитания и сравнить результаты с числом $45^2 = 2025$.

Глава 8
УГЛЫ

Цель главы — выработать у учащихся правильные представления об углах в соответствии с теми задачами, которые возникают при рассмотрении многоугольников и других геометрических фигур, рассмотреть измерение углов, основное свойство градусной меры и его приложения, изучить свойства смежных и вертикальных углов.

Особенности главы. В учебной литературе на начальной стадии изучения углов часто ограничиваются рассмотрением угла как фигуры, образованной двумя различными лучами с общим началом. В принципе, в этом нет ничего неверного, однако при переходе к изучению многоугольников или тригонометрии возникают трудности из-за необходимости частично изменять подходы к понятию угла. С учетом этих обстоятельств в главе сразу намечается два подхода к понятию угла, которые различаются и по терминологии. А именно: одновременно рассматриваются углы как фигуры, образованные лучами, и как части плоскости, на которые два различных луча с общим началом разбивают всю плоскость. В связи с этим вводится понятие плоского угла, которое зрительно воспринимать даже проще, чем геометрическую фигуру, составленную из лучей.

После введения углов рассматривается процедура измерения углов, мера и градусная мера угла, основное свойство градусной меры, изучаются отдельные виды углов. В целях обеспечения учащихся набором содержательных задач рассматриваются свойства смежных и вертикальных углов.

§ 1. УГЛЫ. РАВЕНСТВО УГЛОВ

Цель параграфа. Рассмотреть два подхода к определению понятия угла.

Особенности параграфа. В параграфе закладываются основы для введения в геометрию понятия угла и его применения к решению разнообразных задач.

Сначала угол определяется как геометрическая фигура, образованная двумя различными лучами с общим началом. Это позволяет сформулировать легко воспринимаемый наглядный образ, естественным образом дополняя множество неограниченных фигур, таких, как прямые и лучи.

Однако такого восприятия угла недостаточно, чтобы в дальнейшем однозначно представлять углы многоугольника, сумму углов и т.д. В связи с этим сразу же вводится понятие плоского угла как части плоскости, ограниченной двумя различными лучами с общей вершиной. На ранней стадии изучения геометрии такой подход представляется более естественным, чем весьма распространенный первый подход к определению угла. В частности, плоский угол можно естественным образом представлять как часть, вырезанную из листа бумаги.

Трудности, которые могут возникать при изучении плоских углов, связаны с тем, что два луча с общим началом определяют две части плоскости, а потому при рассмотрении плоских углов всегда приходится уточнять, какая из этих двух частей выбирается. В 5 и 6 классах основное внимание обращается на плоские углы, которые можно разместить в некоторой полуплоскости.

В конце параграфа в очередной раз особое внимание обращается на равенство углов.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: отрезок; луч; полуплоскость; равенство геометрических фигур; примеры углов.

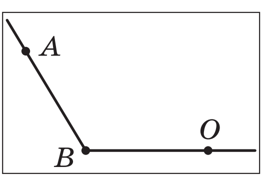


Рис. 1

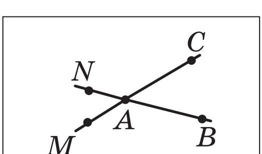


Рис. 2

Новые математические понятия и свойства: угол между лучами; плоский угол; развернутый угол; вершина угла; сторона угла; равенство углов; равенство плоских углов.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как называется и обозначается изображенная на рис. 1 фигура, образованная вершиной B и лучами BA и BO?

Вариант ответа. Угол OBA, обозначается как $\angle OBA$.

1.2. Точка M лежит на прямой AC, точка N — на прямой AB, как на рис. 2. Как обозначить углы, которые образуются при пересечении прямых AB и AC?

Ответ. Пусть точка M лежит на луче, противоположном AC, а точка N — на луче, противоположном AB. Тогда образуются углы: $\angle BAC$, $\angle BAM$, $\angle MAN$, $\angle CAN$.

1.3. Как можно представить плоский развернутый угол?

Ответ. Как полуплоскость, на границе которой отмечена точка, являющаяся вершиной этого угла.

1.4. Сколько углов образуют диагонали квадрата с его сторонами?

Ответ. При каждой вершине образуется по два угла, всего 8 углов.

1.5. На рис. 3 изображены равные углы AOB и BOC. Какие вы можете предложить перемещения, при которых копия угла AOB совместится с углом BOC?

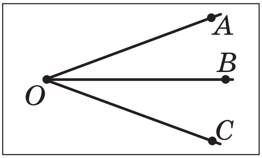


Рис. 3

Ответ. Первое перемещение: поворот копии вокруг точки O, который луч OA переводит в луч OB.

Второе перемещение: перевернуть копию другой стороной так, чтобы сторона OB осталась на месте.

1.6. Вы знаете, что два луча на плоскости определяют два плоских угла. В каких случаях эти плоские углы равны?

Ответ. Только тогда, когда это плоские развернутые углы.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.* Сколько плоских углов с вершиной O вы можете указать на рис. 4?

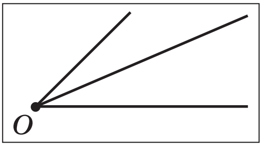


Рис. 4

Указание. Сначала можно подсчитать число углов, образованных двумя лучами, то есть число пар лучей. После этого учитываем, что каждой паре лучей соответствует два плоских угла. В итоге получится 6 плоских углов.

10.* Сколько всего плоских углов можно указать на рис. 5?

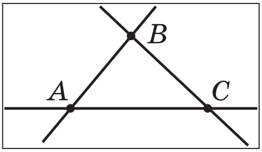


Рис. 5

Указание. С вершиной в каждой из отмеченных точек образуется по 6 углов, включая развернутые углы, а каждый из перечисленных углов определяет по два плоских угла. В итоге получается $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ плоских углов.

12., 13.**** Решаются аналогично задаче 10*.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

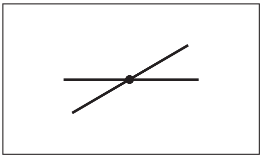


Рис. 6

1.2. На рис. 6 изображены две пересекающиеся прямые. Сколько неразвернутых плоских углов можно указать на этом рисунке?

1) 4; 2) 8; 3) 10; 4) 12.

Указание. Всего можно выбрать четыре пары лучей и для каждой из них определить два плоских угла.

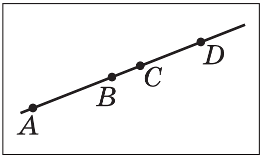


Рис. 7

2.3. На рис. 7 изображен плоский угол с вершиной B. Какие из приведенных записей являются обозначениями этого угла?

1) $\angle ABC$; 2) $\angle ACB$; 3) $\angle BCD$; 4) $\angle ABD$.

Указание. На рисунке изображен развернутый плоский угол. Он отличается от полуплоскости тем, что дополнительно указывается и его вершина, в данном случае точка B, которая при обозначении должна указываться в промежутке между точками, указываемыми на лучах.

§ 2. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Цель параграфа. Дать начальные представления об измерении углов с помощью эталонного плоского угла и с помощью транспортира.

Особенности параграфа. Предполагаемая процедура измерения рассматривается для плоских углов, которые можно разместить в некоторой полуплоскости, и во многом аналогична процедуре измерения отрезков. Поэтому на интуитивном уровне вводится понятие: «Плоский угол составлен из двух плоских углов». Это позволяет естественным образом рассматривать плоские углы, составленные из нескольких плоских углов, равных некоторому плоскому углу, который выбран в качестве единицы измерения углов.

После рассмотрения общей процедуры измерения углов дальнейшее изучение сводится к измерению углов в градусах.

Для практических приложений рассматривается измерение углов с помощью транспортира. С целью упрощения терминологии градусная мера угла называется величиной угла и обозначается с помощью знака °.

Далее формулируются начальные свойства градусной меры.

1. Каждому углу соответствует его градусная мера от 0° до 180°.

2. Если два угла равны, то они имеют одну и ту же градусную меру.

3. Если два угла имеют равную меру, то эти углы равны.

4. От любого луча можно отложить плоский угол любой заданной величины от 0° до 180°.

Для того чтобы можно было говорить о мере углов, начиная с 0° рассматривают угол, стороны которого совпадают.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: угол; плоский угол; равенство углов; развернутый угол.

Новые математические понятия и свойства: плоский угол, составленный из нескольких плоских углов; эталонный плоский угол; измерение углов с помощью эталонного угла; начальные свойства меры углов; величина угла; градус; градусная мера угла; угол величиной 180°; угол величиной 0°.

Вспомогательные понятия: транспортир.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. В каком направлении станет двигаться корабль, если после движения на зюйд-зюйд-вест он повернул на 6 румбов вправо (по часовой стрелке)?

Ответ. Румб — это восьмая часть от одной четверти окружности. Поэтому 6 румбов — это три четверти от промежутка между направлениями на зюйд и на вест. Так как направление зюйд-зюйд-вест соответствует четверти промежутка между зюйд и вест, то после поворота по часовой стрелке на 6 румбов получится направление на вест. Решение станет гораздо понятнее, если нарисовать шкалу компаса (круг) и отметить на ней все румбы и указанные в условии направления.

2.2. Чему равна градусная мера плоского угла, составленного из двух плоских углов, градусная мера каждого из которых равна 30°?

Ответ. 60°.

2.3. Чем отличается угол от величины угла?

Ответ. Хотя угол и его величину часто обозначают одинаково, это совершенно различные понятия. Угол — это геометрическая фигура, а величина угла — это число единиц измерения (эталонных углов), которыми измеряется угол.

2.4.* Почему от любого луча можно отложить только два различных угла величиной 90°?

Вариант ответа. Прямая, на которой лежит луч, делит плоскость на две полуплоскости. По свойству, сформулированному в пункте, от данного луча в данной полуплоскости можно отложить только один угол в 90°, так как разным лучам соответствуют углы с разными градусными мерами. Так как полуплоскостей две, то и прямых углов можно отложить только два.

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.* Какой угол образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают: а) 2 часа; б) 4 часа?

Указание. Когда минутная стрелка направлена на число 12, а часовая — на число 1, угол между стрелками равен 30°.

8.* Решается аналогично задаче 7*.

9.** Какой угол образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают: а) 12 часов 30 минут; б) 3 часа 30 минут; в) 6 часов 30 минут?

Указание. Когда минутная стрелка направлена на число 6, часовая стрелка находится посередине между ближайшими отметками, указывающими целое число часов.

10.** Какой угол образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают 12 часов 20 минут?

Указание. После того как часы показывают 12 часов, при смещении минутной стрелки к числу 4 часовая стрелка повернется на 10°.

11.** Какой угол образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают 3 часа 40 минут?

Указание. После того как часы показывают 3 часа, при смещении минутной стрелки к числу 8 часовая стрелка повернется на 20°.

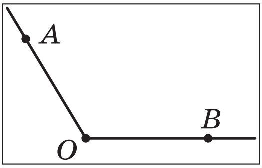


Рис. 1

15.** Даны два луча OA и OB с общей вершиной O (рис. 1). Найдите общую часть всех полуплоскостей, содержащих оба эти луча.

Указание. Общая часть всех таких полуплоскостей — это плоский угол AOB, меньший 180°.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Пусть за единицу измерения углов выбран плоский угол, градусная мера которого равна 3°. Какую меру в новых единицах имеет угол в 105°?

1) 35; 2) 45; 3) 55; 4) 65.

Указание. В каждом из вариантов указанное число умножить на 3 и сравнить с числом 105.

2.1. При измерении плоских углов, которые можно разместить в полуплоскости, используется эталонный угол величиной 16°. Какие из указанных значений могут быть мерой таких углов в новых единицах измерения?

1) 8; 2) 10; 3) 12; 4) 14.

Указание. Подходят только первые два варианта, в остальных градусная мера будет больше 180°.

2.2. При измерении некоторого угла эталонным углом величиной 15° получили, что в новых единицах измерения мера угла больше 10 и меньше 11. Какие из указанных значений не могут быть величиной заданного угла?

1) 150°; 2) 160°; 3) 170°; 4) 180°.

Указание. Приведенные значения сравнить со значениями 150° и 165°.

2.3. При измерении некоторого угла эталонным углом величиной 7° получили, что в новых единицах измерения мера угла больше 22 и меньше 23. Какие из указанных значений не могут быть величиной заданного угла?

1) 150°; 2) 155°; 3) 160°; 4) 165°.

Указание. Приведенные значения сравнить со значениями 154° и 161°.

§ 3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ГРАДУСНОЙ МЕРЫ

Цель параграфа — изучить основное свойство градусной меры и рассмотреть примеры задач на его применение.

Особенности параграфа. В параграфе на примере еще раз разъясняется понятие суммы плоских углов и аддитивное свойство градусной меры, то есть если плоский угол ABC равен сумме плоских углов ABD и DBC, то градусная мера угла ABC равна сумме градусных мер углов ABD и DBC. Для того чтобы в дальнейшем возникало поменьше недоразумений, целесообразно сопровождать изучение этого свойства содержательными иллюстрациями. Например, можно сделать из картона заготовки нескольких плоских углов и разъяснить, что сумму двух углов можно представлять как тот угол, который получается при прикладывании заготовок друг к другу.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: угол; плоский угол; плоский угол, составленный из нескольких плоских углов; мера угла; градусная мера угла.

Новые математические понятия и свойства: сумма плоских углов; основное свойство градусной меры; биссектриса угла.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Чему равна величина плоского угла, составленного из двух плоских углов величиной 60° и 120°?

Ответ. 180°.

3.2. Как представить развернутый угол в виде суммы двух равных углов?

Вариант ответа. Пусть $\angle AOB = 180°$. Отложим от луча OA угол AOC в 90°. По основному свойству градусной меры $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$. Отсюда $\angle BOC = 90°$ и $\angle AOC = \angle BOC$.

3.3.** Какие свойства градусной меры вы знаете?

Ответ. 1. Каждому углу соответствует его градусная мера от 0° до 180°.

2. Если два угла равны, то они имеют одну и ту же градусную меру.

3. Если два угла имеют равную меру, то эти углы равны.

4. От любого луча можно отложить плоский угол любой заданной величины от 0° до 180°.

5. Градусная мера суммы углов равна сумме градусных мер этих углов.

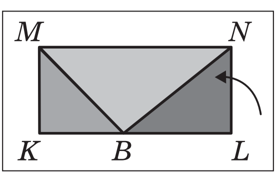


Рис. 1

3.4.* Чему равна сумма градусных мер углов четырехугольника $KMNL$ на рис. 1?

Ответ. 360°.

Указания к решению наиболее трудных задач.

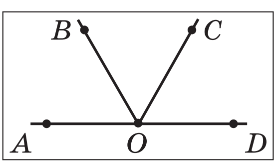


Рис. 2

6. На рис. 2 точки A, O, D расположены на прямой. Известно, что углы AOB, BOC и COD равны. Чему равна градусная мера каждого из углов с вершиной O, которые можно отыскать на этом рисунке?

Указание. Обозначим $\angle AOB = x^\circ$. Тогда $3x = 180$, откуда $\angle AOB = 60^\circ$. Это позволяет вычислить градусные меры пяти углов (включая развернутый), которые можно указать на этом рисунке: $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$, $\angle BOD = 120^\circ$, $\angle COD = 60^\circ$, $\angle AOD = 180^\circ$.

14. Дан угольник, углы которого равны 45°, 45° и 90°. Углы какой величины можно изобразить с помощью этого угольника?

Указание. Рисуя угольником лучи по нескольку раз, можно получить углы в 45°, 90°, 135°, 180°.

15. Дан угольник, углы которого равны 30°, 60° и 90°. Углы какой величины можно изобразить с помощью такого угольника?

Указание. Можно получить углы в 30°, в 60°, в 90°, в 120°, в 150°, в 180°.

17.** Два угольника, какие указаны в задачах 14 и 15, приложены к прямой так, как показано на рис. 3. Углы какой величины можно найти на этом рисунке?

Указание. С вершинами в концах общего катета этих угольников можно указать углы величиной 30°, 45°, 60°, 75°, 90°. С вершиной в точке пересечения гипотенуз — углы величиной 75°, 105° и 180°.

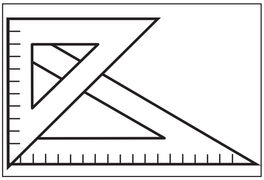


Рис. 3

18.** Вырежьте из бумаги два треугольника с углами 90°, 43°, 47° и 90°, 40°, 50° соответственно. Какие углы можно нарисовать при помощи этих треугольников?

Указание. Заметим следующие закономерности.

1. Используя треугольники один раз, можно нарисовать угол только в целое число градусов.

2. Прикладывая треугольники к какому-нибудь углу в целое число градусов, мы можем получить новые углы тоже только в целое число градусов.

3. Если можно нарисовать угол в x°, то тогда нетрудно нарисовать углы в $(2x)^\circ$, в $(3x)^\circ$ и т.д.

Для ответа на вопрос задачи остается придумать процедуру, которая позволяет нарисовать угол в 1°.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Известно, что $\angle AOB = 20°$, $\angle BOC = 30°$. Какие из приведенных значений может иметь величина угла AOC?

1) 10°; 2) 20°; 3) 40°; 4) 50°.

Указание. Может получиться либо сумма, либо разность величин заданных углов.

2.2. Известно, что $\angle AOB = 67°$, $\angle BOC = 24°$. Какие из приведенных значений может иметь величина угла AOC?

1) 33°; 2) 43°; 3) 81°; 4) 91°.

Указание. Может получиться либо сумма, либо разность величин заданных углов.

2.3. Известно, что $\angle AOB = 10°$, $\angle BOC = 20°$, $\angle COD = 40°$. Какие из приведенных значений может иметь величина угла AOD?

1) 10°; 2) 30°; 3) 50°; 4) 70°.

Указание. Подходят все варианты, кроме варианта 3.

2.4. В полуплоскости α проведен некоторый луч AB, и в этой полуплоскости нужно изобразить угол CAB величиной от 0° до 180°. Сколько может быть таких углов в зависимости от положения луча AB и от заданной величины угла?

1) ни одного; 2) один; 3) два; 4) три.

Указание. От луча можно отложить только два угла заданной величины, поэтому четвертый вариант не подходит, а остальные могут реализоваться.

§ 4. ПРЯМОЙ УГОЛ. КВАДРАТ. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Цель параграфа — без обоснования сформулировать избыточное определение прямоугольника и постулировать существование прямоугольника со сторонами заданной длины.

Особенности параграфа. Избыточное определение прямоугольника формулируется для того, чтобы заложить содержательные основы, на которых, начиная с 5 класса, можно приучать школьников к логическим рассуждениям. При изучении параграфа следует стремиться к тому, чтобы ученики могли перечислять известные им свойства прямоугольника и с помощью клетчатой бумаги изображать прямоугольник со сторонами заданной длины. Приводимые в параграфе определения в дальнейшем будут встречаться еще, и в 7 классе после изучения параллельности прямых на плоскости будет приведено более экономное (не избыточное) определение прямоугольника как параллелограмма с прямым углом.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: равенство углов; основное свойство градусной меры, примеры прямоугольников.

Новые математические понятия и свойства: прямой угол; прямоугольник; существование прямоугольника с заданными сторонами.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Почему все прямые углы равны как геометрические фигуры?

Ответ. Все прямые углы имеют градусную меру 90°, а углы, имеющие одинаковую градусную меру, равны в силу свойств градусной меры.

4.2. Как на клетчатой бумаге изобразить прямоугольник, одна сторона которого равна 12 шагам сетки, а другая — в 4 раза короче?

Вариант ответа. Разметить прямоугольник размером 5×10. Затем согнуть пополам так, чтобы совместились длинные стороны прямоугольника. Линия сгиба делит исходный прямоугольник на два с требуемыми длинами сторон.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3.** Вне плоского прямого угла MNK из вершины N проведен луч NP так, что $\angle MNP = 120°$. Найдите все значения, какие может иметь величина угла PNK.

Указание. Делая рисунок к задаче, нужно отыскать два различных варианта, приводящих к разным ответам.

12. Проверьте измерениями, что изображенный на рис. 1 четырехугольник $ABCD$ не является: а) ромбом; б) прямоугольником.

Указание. Можно привести даже формальное обоснование. Сместим точку A на один шаг сетки вправо и обозначим полученную точку буквой P. Тогда $BP = BC$ и $\angle PBC = 90$.

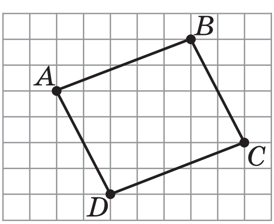


Рис. 1

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Лучи AB, AC, AD проведены так, что точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB и $\angle BAC = 36°$, $\angle BAD = 126°$. Чему равна величина угла CAD?

1) 42°; 2) 90°; 3) 126°; 4) 162°.

Указание. Нужно представить чертеж, а затем вычислить сумму заданных значений.

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

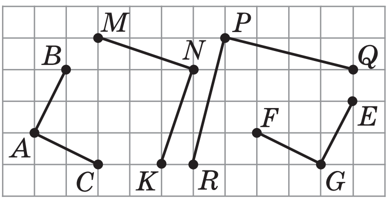


Рис. 2

2.2. Какие из углов на рис. 2 являются прямыми?

1) $\angle BAC$; 2) $\angle MNK$;

3) $\angle QPR$; 4) $\angle FGE$.

Указание. Для каждого из приведенных углов можно нарисовать такой квадрат, у которого рассматриваемый угол является углом.

2.3. Луч делит прямой угол на два неравных угла. Измеряя меньший из полученных углов, ученик установил, что величина этого угла больше 23° и меньше 28°. Какие из указанных значений не могут быть величиной другого из полученных углов?

1) 62°; 2) 64°; 3) 66°; 4) 68°.

Указание. Величина другого острого угла больше 62° и меньше 67°.

2.4. Луч делит прямой угол на два неравных угла. Измеряя больший угол прямоугольного треугольника, ученик установил, что величина этого угла больше 77° и меньше 81°. Какие из указанных значений разумно принять за приближенное значение другого из полученных углов?

1) 9°; 2) 10°; 3) 11°; 4) 12°.

Указание. Величина другого острого угла больше 9° и меньше 13°.

§ 5. ВИДЫ УГЛОВ. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Цель параграфа — определить острый угол, тупой угол, смежные углы и вертикальные углы, изучить свойства смежных и вертикальных углов.

Особенности параграфа. Понятия острого и тупого углов вводятся для сравнения углов с прямым углом. В большинстве случаев это можно сделать на основе зрительных восприятий.

В тех случаях, когда это сделать не удается, задача чаще всего становится достаточно сложной. Примером может служить задача 12 из предыдущего параграфа (см. указание к ее решению).

Вывод свойства смежных углов и свойства вертикальных углов является полноценными логическими рассуждениями, которые могут оказаться сложными, а поэтому требуют особого внимания со стороны учителя.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: прямой угол; равенство углов; основное свойство градусной меры.

Новые математические понятия и свойства: острый угол; тупой угол; смежные углы; сумма смежных углов; вертикальные углы; равенство вертикальных углов.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Какой из углов на рис. 1 острый, а какой — тупой?

Ответ. Угол ABC — острый, угол MNK — тупой.

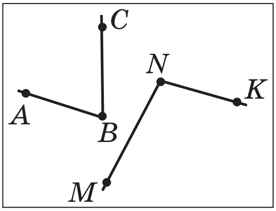


Рис. 1

5.2. На рис. 2 в учебнике изображены прямые AC и BD, пересекающиеся в точке O. В тексте указана пара смежных углов AOB и BOC. *Вопрос.* Какие еще три пары смежных углов можно отыскать на рис. 2?

Ответ. Пары углов AOD и DOC, BOC и COD, AOB и AOD.

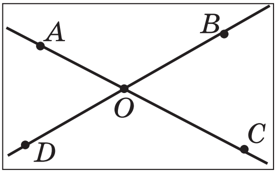


Рис. 2

5.3. Существуют ли два равных угла с общей вершиной, которые не являются вертикальными?

Варианты ответа. Существуют. Например, если взять два угла по 30°, которые в сумме составляют угол в 60°, то такие два угла равны, но не являются вертикальными. Или, например, два прямых угла с общей вершиной, повернутые относительно друг друга не на прямой угол.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1.* В каждом горизонтальном и вертикальном ряду на рис. 3 выполняются некоторые закономерности. Какой угол следует поставить на рис. 3 вместо знака вопроса?

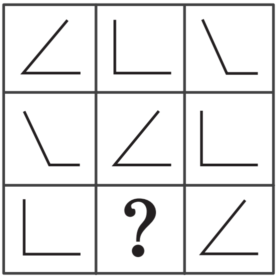


Рис. 3

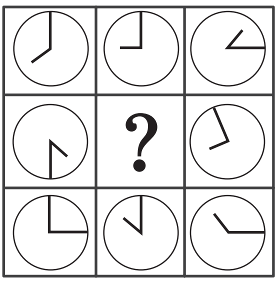


Рис. 4

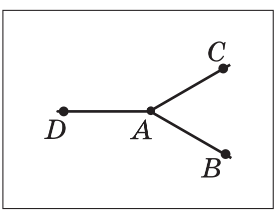


Рис. 5

Указание. В задачах такого вида обычно предполагается, что после помещения некоторой фигуры в каждой строке и каждом столбце выполняется общая закономерность. Если в этой задаче вместо вопроса поместить тупой угол, то в каждой строке и каждом столбце будут стоять острый, прямой и тупой углы.

5.* Что вы поместили бы в среднюю клетку на рис. 4?

Указание. Циферблат с углом между стрелками в 135°.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. На плоскости заданы лучи AB и AC. Луч AD проведен так, как указано на рис. 5. Известно, что $\angle BAC = 60°$, а величины углов BAD и CAD равны. Чему равна величина угла CAD? 1) 120°; 2) 130°; 3) 140°; 4) 150°.

Указание. Добавить биссектрису плоского угла ACB, который меньше 180°, и тогда заданный угол будет смежным к углу в 30°.

2.3. Известно, что углы AOB и COD являются смежными с углом BOC, а величина BOC меньше 60°. Какие из приведенных значений не могут быть суммой величин углов AOB и COD?

1) 240°; 2) 250°; 3) 260°; 4) 270°.

Указание. Углы AOB и COD равны, и величина каждого из них больше 120°.

Глава 9
ДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель главы — разъяснить учащимся различие между делением нацело одного натурального числа на другое и делением с остатком, выработать навыки деления с остатком, ознакомить с некоторыми признаками делимости.

Особенности главы. В главе рассматриваются две операции: деления нацело и деления с остатком, каждая из которых называется делением. Это может создавать объективные сложности при изучении данной главы, и для того, чтобы добиться четкого понимания каждой из изучаемых операций, следует обратить особое внимание на то, что деление нацело для натуральных чисел выполнимо не всегда, а деление с остатком — это универсальная операция, выполнимая всегда при делении на ненулевое число. То общее, что имеют рассматриваемые операции, удается выявить тогда, когда рассматривается алгоритм деления с остатком, приводящий в отдельных случаях к остатку, равному нулю.

§ 1. КАК НАЙТИ НЕИЗВЕСТНЫЙ СОМНОЖИТЕЛЬ

Цель параграфа — определить для натуральных чисел операцию деления нацело и рассмотреть ее свойства.

Особенности параграфа. В начале параграфа на простых примерах напоминается операция деления нацело одного натурального числа на другое. Затем частное от деления числа a на число b определяется как корень уравнения $bx = a$ и для частного сразу же вводятся два обозначения $a : b$ и $\frac{a}{b}$. С помощью числовой прямой операции деления чисел нацело придается наглядный геометрический смысл как операции деления отрезка на соответствующее число равных частей. Особо рассматриваются два случая: деление числа 0 на натуральное число и деление на число 0. В итоге записывается правило, что деление на 0 запрещено. После этого разъясняется основное свойство частного, связанное с умножением делимого и делителя на одно и то же число. Запись этого свойства при помощи дробной черты позволяет придать ему легко запоминающуюся форму. При изучении данного параграфа главное внимание следует обратить на примеры, иллюстрирующие основные понятия и свойства.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: натуральные числа; сложение, вычитание и умножение натуральных чисел; уравнение, корень уравнения; числовая прямая (с изображенными на ней числом 0 и натуральными числами).

Новые математические понятия и свойства: частное; делимое; делитель; деление нацело; основное свойство частного; свойства делимости.

Вспомогательные понятия: геометрический смысл деления нацело; выражение, не имеющее смысла.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как разместить 42 ребенка за 6 столами, чтобы за каждым столом сидело одинаковое число детей?

Ответ. Составим уравнение $6 \cdot x = 42$ и найдем его корень $x = 7$ с помощью таблицы умножения.

1.2. Как понимать выражение «четверть часа»?

Ответ. Четверть, то есть четвертая часть, получается при делении целого на четыре равные части. В часе 60 минут, значит, четверть часа составит $60 : 4 = 15$ минут.

1.3. Где делимые и делители в записи $\dfrac{24 : 4}{3}$?

Вариант ответа. Здесь два действия деления. Для первого деления $24 : 4$ число 24 является делимым, а число 4 — делителем. Для второго деления $(24 : 4) : 3$, то есть $6 : 3$, число $24 : 4 = 6$ является делимым, а число 3 — делителем.

1.4. В пункте рассматривается пример представления на числовой прямой деления числа $a = 54$ на число $b = 9$ путем откладывания отрезков длины b. При этом получается $m = 6$ целым частям. *Вопрос.* Какое свойство длины позволяет сделать вывод, что в рассмотренном примере $b \cdot 6 = a$?

Ответ. Для точки C, лежащей на отрезке AB, выполняется равенство $|AB| = |AC| + |CB|$. Применение этого свойства несколько раз подряд и позволяет сделать данный вывод.

1.5. Какое из чисел делится нацело на любое натуральное число?

Ответ. Число 0, так как $0 \cdot m = 0$ при любом натуральном m.

1.6. Почему выражение $(3^4 - 4^3) : (2^4 - 4^2)$ не имеет смысла?

Ответ. Потому что $2^4 - 4^2 = 16 - 16 = 0$, а на нуль делить нельзя.

1.7. Что произойдет с частным при делении числа a на число b, если делимое умножить на число 5?

Ответ. Частное увеличится в 5 раз. Если $a : b = x$, то $a = bx$. Умножим обе части равенства на 5 и получим: $5a = 5bx$. Последнее равенство перепишем как: $5a = b(5x)$, откуда $(5a) : b = 5x$.

Понимания подобного доказательства можно требовать только от занимающихся на третьем уровне.

1.8. Почему при делении числа, оканчивающегося нулем, на число, оканчивающееся нулем, эти нули можно вычеркивать?

Ответ. Вычеркивание нуля в конце записи делимого и в конце записи делителя соответствует делению этих чисел на одно и то же число 10. При этом частное не изменится.

1.9.* Как объяснить, что число 625 625 625 625 делится на 11?

Ответ.

$625\,625\,625\,625 = 625 \cdot 1\,001\,001\,001 = 625 \cdot 1001 \cdot 1\,000\,001.$

Так как число 1001 делится на 11 (это следует из текста), то данное число также делится на 11.

1.10.* Какие еще делители есть у числа 1001?

Ответ. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Делители 11, 13, $7 \cdot 11 = 77$ и $7 \cdot 13 = 91$. Можно привести еще два несобственных делителя 1 и 1001.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. Чему равно частное от деления $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$?

Указание. Делимое можно представить в виде $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \times \times (5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)$.

4. Делится ли число $12 + 1212 + 121\,212$ на 12?

Указание. $12 + 1212 + 121\,212 = 12 \cdot (1 + 101 + 10101)$.

5*. Проверьте, что число 531 531 делится на 1001. Верно ли, что 531 531 делится: а) на 7; б) на 11; в) на 13?

Указание. $531\,531 = 531 \cdot 1001$, а число 1001 делится на 7, на 11, на 13.

6**. Запись шестизначного числа в десятичной системе имеет вид *ABC ABC*, где буквами *A, B, C* обозначены некоторые цифры. Покажите, что такое число делится: а) на 7; б) на 11; в) на 13.

Указание. Обозначим через M натуральное число, которое записывается как *ABC*. Тогда заданное в задаче число равно $M \cdot 1001$, а ранее было показано, что число 1001 делится на 7, на 11 и на 13.

21.** Обозначим частное $\frac{a}{b}$ буквой x. Покажите, что при любом натуральном k выполняются равенства $a \cdot k = (x \cdot b) \cdot k =$ $= x \cdot (b \cdot k)$.

Указание. Приведенные в задаче равенства являются доказательством утверждений из пунктов 1.7 и 1.8.

22.* На сколько равных квадратов можно разрезать прямоугольник, нарисованный на клетчатой бумаге, одна из сторон которого содержит 10 шагов сетки, а другая — 30 шагов, если резать можно только по линиям сетки?

Указание. К каждой стороне прямоугольника должно примыкать целое число квадратов. Если сторона квадрата равна x шагов сетки, то числа 30 и 10 оба должны делиться нацело на число x. Отсюда для x получаются значения: 1, 2, 5, 10.

23.* На сколько равных отрезков длиной в целое число сантиметров можно разрезать отрезок длиной в 60 см?

Указание. Если длина отрезка равна x см, то число 60 делится нацело на число x. Отсюда для x можно получить значения: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. В каких случаях указанное частное равно 333 : 37?

1) $\frac{54}{6}$; 2) $\frac{56}{7}$; 3) $\frac{96}{12}$; 4) $\frac{126}{14}$.

Указание. Заданное в условии теста частное равно 9.

2.3*. Известно, что число a делится на 6, число b делится на 2 и не делится на 3. Какие из указанных чисел не делятся на 6?

1) $a + b$; 2) $2a + b$; 3) $a + 2b$; 4) $2a + 3b$.

Указание. В суммах из вариантов ответов первое слагаемое всегда делится на 6. Поэтому нужно выбрать варианты, в которых вторые слагаемые на 6 не делятся.

2.4. На какие из указанных чисел деление запрещено?

1) $3^4 - 4^3$; 2) $4^3 - 8^2$; 3) $5^2 - 4^2 - 3^2$; 4) $6^2 - 5^2 - 4^2$.

Указание. Ни одно из чисел нельзя делить на 0.

§ 2. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Цель параграфа — ознакомиться с наиболее известными признаками делимости, рассмотреть понятия простого и составного числа.

Особенности параграфа. В параграфе приводятся формулировки признаков делимости на 10, на 5, на 2, на 9 и на 3. При изучении этих признаков делимости следует обратить внимание на само слово «признак». Как правило, это слово употребляется тогда, когда по наличию или отсутствию одного какого-то свойства мы можем судить о наличии или отсутствии другого свойства. Например, возьмем признак делимости на 3. При условии делимости суммы цифр числа на 3 можно сделать вывод о делимости самого числа на 3, а если сумма цифр не делится на 3, то можно сделать вывод, что и само число не делится на 3. На третьем уровне эти разъяснения можно сделать более подробными и даже уточнить и расширить формулировки признаков делимости. Например, признак делимости на 2 можно сформулировать так: число делится на 2 только в том случае, когда оно оканчивается на одну из цифр — 0, 2, 4, 6, 8.

Обучение на первом уровне опирается на интуицию и наблюдения. На втором уровне рассматриваются два важных для дальнейшего понятия: простого и составного числа. Описан замечательный прием отыскания простых чисел — «решето» Эратосфена. Качественный скачок происходит на третьем уровне, где даны доказательства признаков делимости на 3 и на 9, а также сделано замечание, что все признаки являются не только достаточными, но и необходимыми условиями делимости.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: деление нацело; делитель; представление натурального числа в виде произведения делителей; свойства делимости нацело.

Новые математические понятия и свойства: признак делимости; признаки делимости на 10, на 5, на 2, на 3 и на 9; простое число; составное число.

Математические понятия, употребляемые в порядке ознакомления: решето Эратосфена.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какой признак делимости на 100 можно предложить?

Вариант ответа. Число делится на 100 тогда и только тогда, когда оно заканчивается двумя нулями.

2.2. Сколько двузначных чисел делится на 5?

Вариант ответа. Из признака делимости на 5 вытекает, что в каждом десятке на 5 делятся по два числа, оканчивающиеся на 0 и 5, то есть в промежутке от 10 до 19 только два числа делятся на 5, в промежутке от 20 до 29 только два числа делятся на 5, и т.д. Всего получается $2 \cdot 9 = 18$ чисел.

2.3. Почему из двух последовательных натуральных чисел одно обязательно делится на 2?

Вариант ответа. Если первое из чисел оканчивается на одну из цифр — 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2. Если же первое число оканчивается на одну из цифр — 1, 3, 5, 7, 9, то следующее за ним число оканчивается на одну из цифр — 2, 4, 6, 8, 0, а значит, второе число будет делиться на 2.

2.4. Почему самое большое 20-значное число делится на 9?

Варианты ответа. Это число записывается 20-тью девятками — 99…9. Сумма его цифр равна $9 + 9 + \ldots + 9 = 20 \cdot 9$, то есть она делится на 9.

Можно рассуждать иначе. Представим это число в виде $\underbrace{11\ldots1}_{20\text{ раз}} \cdot 9$. Выделился множитель 9, значит, число делится на 9.

2.5.* Как проверить справедливость признака делимости на 3?

Ответ. Справедливость признака делимости на 3 показывается точно так же, как и справедливость признака делимости на 9 в данном пункте. Так же нужно отметить, что числа 9, 99, 999 и т.д. делятся на 3. Затем число, имеющее запись $ab\ldots cd$, представляется в виде суммы:

$a \cdot 10^n + b \cdot 10^{n-1} + \ldots + c \cdot 10 + d = a \cdot (99\ldots9 + 1) + b \cdot (99\ldots9 + 1) + \ldots + c \cdot (9 + 1) + d = M + (a + b + .. + c + d)$, где M — число, делящееся на 3.

Конечно, школьники смогут провести подобное доказательство только для конкретного числа.

2.6.* Если $a = b \cdot c$, то всегда ли число a составное?

Ответ. Нет. Например, $3 = 1 \cdot 3$, но само число 3 является простым.

2.7.** Простым или составным является число 101?

Вариант ответа. Будем проверять делимость числа 101 последовательно на простые числа 2, 3, 5, 7... . Заметим, что проверять делимость на простые числа, которые больше 11, не обязательно. Если предположить, что число 101 имеет какой-то делитель m, больший 10, то после деления 101 на этот делитель получим частное n, которое меньше 10. Но тогда можно записать равенство $101 = m \cdot n$, и число 101 должно делиться на число n. Итак, остается проверить делимость числа 101 на числа 2, 3, 5, 7. Число 101 не делится на 2, так как его последняя цифра 1; число 101 не делится на 3, так как сумма его цифр не делится на 3; число 101 не делится на 5, так как последняя цифра не равна 0 или 5; число 101 не делится на 7, так как $7 \cdot 14 = 98 < 101$, а $7 \cdot 15 = 105 > 101$. Значит, число 101 — простое.

Указания к контрольным вопросам.

6.** Какой признак делимости на 6 вы можете предложить?

Ответ. Число делится на 6 только в том случае, когда оно делится на 2 и делится на 3.

Для пояснения этого признака проведем два рассуждения.

1. Пусть число a делится на 6, то есть $a = 6m$, где m — целое число. Но тогда можно написать равенства: $a = 2 \cdot (3m)$, $a = 3 \cdot (2m)$. Поэтому число a делится на 2 и делится на 3.

2. Пусть число a делится на 2 и делится на 3. Так как a делится на 3, то $a = 3k$, где k — целое число. Если предположить, что число k не делится на 2, то последней цифрой числа k может быть только одна из цифр — 1, 3, 5, 7, 9. Но тогда произведение $3k$ должно оканчиваться либо на 3, либо на 9, либо на 5, либо на 1, либо на 7. Но этого не может быть, так как число a по условию делится на 2. Итак, число k делится на 2. Поэтому $k = 2m$, а значит, $a = 3 \cdot (2m) = 6m$, где m — целое число.

Заметим, что привычное для многих рассуждение типа: «Пусть число a делится на 2 и на 3. Тогда $a = 3k$, $3k$ делится на 2, следовательно, k делится на 2» — на самом деле использует лемму Евклида, утверждение сложное и предполагающее знание определенной теории делимости, чего нельзя требовать от пятиклассника. Впрочем, в конкретном случае, если изучен § 5, это рассуждение можно завершить так: «Если бы число k было нечетно, то оно имело бы вид $k = 2l + 1$, но тогда $a = 6l + 3$ не делится на 6».

С другой стороны, сформулировать указанный признак делимости на 6 могут многие пятиклассники.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6. в) Какую цифру нужно поставить вместо звездочки, чтобы полученное число 7*2 делилось на 9?

Указание. Так как $7 + 2 = 9$, то вместо звездочки можно поставить такую цифру, которая делится на 9. Это можно сделать двумя способами: поставить либо цифру 0, либо цифру 9.

7. Как определить, делится ли число на 18?

Указание. С помощью признаков проверить делимость на 2 и на 9. Если оба условия выполняются, то число делится на 18.

8.* Проверьте, что числа 108, 1008, 10 008, 100 008 делятся на 18. Почему числа вида 10...08 при любом числе нулей делятся на 18?

Указание. По признакам делимости устанавливается, что рассматриваемые числа всегда делятся на 2 и на 9.

14.** Возьмем число 782 и число 287, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Проверьте, что их разность делится на 9 и на 11. Верно ли это утверждение для разности любого трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке?

Указание. Для проверки утверждения в общем случае трехзначное число с цифрами a, b, c представим в виде $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$. Тогда при перестановке цифр получим число, равное $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$. Для записи разности удобно считать, что $a > c$. Тогда $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) - (c \cdot 100 + b \cdot 10 + a) = 99a - 99c = 9 \cdot 11 \cdot (a - b)$.

17.* Покажите, что если две последние цифры числа образуют число, делящееся на 4, то исходное число также делится на 4.

Указание. Возьмем, например, число 231 824, которое удовлетворяет перечисленным условиям. Тогда $231\,824 = 231\,800 + 24 = 2318 \cdot 100 + 24 = 2318 \cdot 25 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = (2318 \cdot 25 + 8) \cdot 4$.

Отсюда следует делимость исходного числа на 4.

18.** Какой признак делимости на 8 вы можете сформулировать?

Указание. Так как число 1000 делится на 8, то с учетом решения предыдущей задачи можно сформулировать признак: число делится на 8 только в том случае, если три последние цифры числа образуют число, делящееся на 8.

22.** Какой признак делимости на 125 вы можете сформулировать?

Указание. Признак такой: число делится на 125 только в том случае, если оно оканчивается тремя цифрами, которые образуют число, делящееся на 125.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Какое из указанных чисел нужно прибавить к 21 969, чтобы получившееся число делилось на 5?

1) 15; 2) 16; 3) 17; 4) 18.

Указание. Чтобы сумма заканчивалась на цифру 0 либо 5, к данному числу нужно прибавить число, последняя цифра которого либо 1, либо 6.

1.4. Какое из указанных чисел нужно прибавить к 123 456, чтобы получившееся число делилось на 9?

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8.

Указание. Найдем сумму цифр $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. При прибавлении одного из указанных в тесте чисел предпоследняя цифра суммы будет 6, и для делимости суммы на 9 нужно, чтобы последняя цифра суммы оказалась равной $2 = 18 - (15 + 1)$.

2.4. Какие из указанных чисел делятся на 4?

1) 154; 2) 164; 3) 174; 4) 184.

Указание. Чтобы число делилось на 4, нужно, чтобы число, составленное из двух последних цифр, делилось на 4.

§ 3. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Цель параграфа — рассмотреть деление с остатком одного натурального числа на другое, изучить алгоритм деления с остатком.

Особенности параграфа. В начале параграфа на примерах разъясняется смысл деления с остатком одного натурального числа на другое. Затем приводится общее определение, рассматривается алгоритм деления с остатком и его запись в виде «уголка». Указывается, что алгоритм деления с остатком основан на вычитаниях. Самое сложное в изучаемом материале — это правильное представление результата деления с остатком, так как одно записываемое равенство содержит сразу две искомые величины: неполное частное и остаток. На это следует обратить особое внимание.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: геометрическое представление натуральных чисел на числовой прямой; таблица умножения; сравнение натуральных чисел.

Новые математические понятия и свойства: деление с остатком; неполное частное; остаток; делимое и делитель при делении с остатком; алгоритм деления «уголком».

Вспомогательные понятия: геометрический смысл деления с остатком.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как поделить с остатком 15 тетрадей на четверых?

Варианты ответа.

1. Уберем три тетради, а оставшиеся 12 поделим на четверых по 3 тетради.

2. Дадим каждому по одной тетради, затем еще по одной тетради, затем еще по одной тетради. После этого останется 3 тетради на четверых — меньше, чем по одной каждому.

3.2. Как найти остаток при делении числа 1994 на 6, используя равенство $1994 = 330 \cdot 6 + 14$?

Вариант ответа. Так как $14 = 12 + 2 = 2 \cdot 6 + 2$, то

$1994 = 330 \cdot 6 + (2 \cdot 6 + 2) = (330 \cdot 6 + 2 \cdot 6) + 2 = 332 \cdot 6 + 2$. Последняя запись соответствует определению деления с остатком числа 1994 на 6. Из этого следует, что неполное частное — 332, а остаток — 2.

3.3. Чему равны неполное частное и остаток при делении числа 45 на 6?

Вариант ответа. Так как $45 = 6 \cdot 7 + 3$, то неполное частное 7, а остаток 3.

3.4. Как показать, что число 100 делится без остатка на 4?

Вариант ответа. $100 = 4 \cdot 25 = 4 \cdot 25 + 0$.

3.5. Чему равен остаток от деления числа 87 001 на 87?

Вариант ответа. Число 87 001 на 1 больше числа, которое делится на 87. Поэтому остаток равен 1.

3.6. Какое число, большее 5000 и делящееся на 87 без остатка, вы можете указать?

Вариант ответа. Таких чисел много. Сразу можно назвать 8700, 87 000 и т.д. Чтобы найти наименьшее из чисел, больших 5000 и делящихся на 87 без остатка, разделим уголком 5000 на 87. Получим:

$5000 = 57 \cdot 87 + 41$. Поэтому $5046 = 57 \cdot 87 + 41 + 46 = 57 \cdot 88$.

3.7. Чему равно приближенное значение неполного частного при делении числа 4147 на 19 с недостатком с точностью до 100?

Ответ. 200. Очевидно, что $3800 = 19 \cdot 200$, $5700 = 19 \cdot 300$. Поэтому неполное частное от деления числа 4147, заключенного между 3800 и 5700, на 19 лежит между 200 и 300.

3.8.* Может ли при делении с остатком некоторого натурального числа на $11 \cdot 12$ получиться остаток 134?

Ответ. Не может, потому что 134 больше, чем $11 \cdot 12 = 132$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. б)* Чему равен остаток при делении произвольного натурального числа на 10?

Указание. Вопрос предполагает нахождение свойства, связывающего остаток с самим числом: остаток равен последней цифре в записи числа.

6.* Верно ли, что среди 11 натуральных чисел найдутся 2 числа, имеющие две одинаковые последние цифры?

Ответ. Верно, так как число всех цифр равно 10, а чисел дано больше 10.

7.** Верно ли, что среди 11 натуральных чисел найдутся 2 числа, разность которых делится на 10?

Указание. Начнем распределять числа по группам, объединяя в одну группу все числа, оканчивающиеся на одинаковую цифру. Таких групп не может быть больше 10, а данных чисел больше десяти. Значит, в какой-то группе окажется больше одного числа. Тогда разность любых двух чисел из этой группы будет делиться на 10.

11.* Какой остаток получается при делении на 6 числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 1$?

Указание. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 6) + 5$. Так как стоящее в скобках число делится на 6, а число 5 меньше 6, то остаток равен 5.

12.** Приведите пример числа, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, при делении на 5 — остаток 4, а при делении на 6 — остаток 5.

Указание. Обозначим через N искомое число. Тогда из условия следует, что число $M = N + 1$ делится на 2, на 3, на 5, на 6. Наименьшее число M, которое обладает указанными свойствами, это число $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, все остальные числа M имеют вид $30 \cdot n$, где n — натуральное число. Отсюда $N = 30n - 1$.

14.* При делении числа a на 2 получился остаток 1, а при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток дает число a при делении на 6?

Указание. Так как число a при делении на 3 дает остаток 2, то $a = 3m + 2$, где m — целое. Так как число a не делится на 2, то число m не может делиться на 2. Поэтому $m = 2k + 1$, где k — целое. Но тогда $a = 3m + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 5$, откуда следует, что искомый остаток равен 5.

21.* Сколько непересекающихся отрезков длиной 14 см можно отложить на отрезке длиной 54 дм?

Указание. Ответ к задаче равен неполному частному при делении с остатком числа 540 на 14.

22.* Из двух городов, расстояние между которыми равно 687 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля; один едет со скоростью 55 км/ч, а другой — со скоростью 48 км/ч. На каком расстоянии друг от друга будут автомобили: а) через 4 часа; б) через 5 часов; в) через 6 часов; г) через 7 часов?

Указание. Скорость сближения автомобилей равна $(55 + 48) = 103$ (км/ч). После этого ответ в случаях *а*, *б*, *в* получается достаточно просто. В случае *г* произведение $(103 \cdot 7)$ равно 721 и больше, чем 687. Здесь нужно понять, что, проехав вместе 687 км, автомобили встретятся, а после этого начнут удаляться друг от друга, проехав еще $(721 - 687)$ км.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. Какие из приведенных чисел при делении на 9 дают остаток 4?

1) 481; 2) 356; 3) 733; 4) 955.

Указание. Проще не делить на 9, а вычесть из данного числа 4 и найти сумму цифр полученной разности, которая должна делиться на 9.

Если нужно найти остаток от деления на 9 числа с большим числом знаков, то можно воспользоваться таким утверждением: *остаток от деления числа на* 9 *равен остатку от деления на* 9 *суммы цифр его десятичной записи.*

Продемонстрируем доказательство этого утверждения на конкретном примере.

$$955 = 9 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 5 = 9 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 5 = \\ = (9 \cdot 99 + 5 \cdot 9) + (9 + 5 + 5).$$

Первое слагаемое делится на 9, а второе равно сумме цифр данного числа. Остаток при делении 955 на 9 равен остатку при делении суммы цифр $9 + 5 + 5$ на 9:

$$955 = 9 \cdot (9 \cdot 11 + 5 \cdot 1) + 9 \cdot 2 + 1.$$

2.4. Известно, что $1000 = 27 \cdot 37 + 1$. Какие из указанных чисел делятся на 37 (без остатка)?

1) 5032; 2) 6371; 3) 7067; 4) 8029.

Указание. Из первого числа вычтем $5 \cdot (1000 - 1)$, то есть вычтем 5000 и прибавим 5, получим 37; из второго вычтем $6 \cdot (1000 - 1)$; из третьего вычтем $7 \cdot (1000 - 1)$; из четвертого вычтем $8 \cdot (1000 - 1)$.

§ 4. НА КАКУЮ ЦИФРУ ОКАНЧИВАЕТСЯ 2^{100}?

Цель параграфа — обратить внимание на правила, которые позволяют находить последнюю цифру для сумм и произведений натуральных чисел.

Особенности параграфа. Деление с остатком позволяет представить последнюю цифру в записи натурального числа как остаток при его делении на 10. С учетом этого на примерах удается пояснить рассматриваемые в параграфах правила нахождения последней цифры в записи суммы и произведения натуральных чисел.

На третьем уровне рассматривается закономерность в последовательности последних цифр степеней натурального числа в натуральной степени. В качестве примера берется последовательность степеней числа 2. В связи с наблюдающейся закономерностью можно использовать термин «периодичность».

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: законы сложения и умножения натуральных чисел; деление с остатком; степень числа.

Новые математические понятия и свойства: последняя цифра суммы и произведения натуральных чисел.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: повторяемость последних цифр степеней числа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Чему равна последняя цифра числа $10^{10} + 836\,412$?

Ответ. Последняя цифра у первого слагаемого равна 0, у второго равна 2. По правилу вычисления последней цифры суммы двух чисел последней цифрой суммы будет 2.

4.2. Чему равна последняя цифра числа $135\,497 \cdot 563\,084 + 836\,412$?

Ответ. Сначала по правилу вычисления последней цифры произведения находим последнюю цифру первого слагаемого, которая равна 8. Затем по правилу вычисления последней цифры суммы получаем, что последняя цифра заданного числа равна 0.

4.3.** Какой цифрой оканчивается число 2^{100}?

Ответ. Установив периодическую повторяемость последних цифр степеней числа 2 через четыре шага, получаем, что числа 2^{100}, 2^{96}, 2^{92}, 2^8, 2^4 оканчиваются на одинаковую цифру. Так как $2^4 = 16$, то 2^{100} оканчивается на 6.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. в)* Для натуральных k и l найдите остатки при делении на 10 суммы и произведения натуральных чисел вида: $10k - 8$ и $10l + 2$.

Указание. Последняя цифра числа $10k - 8$ равна 2.

4.** Делится ли на 10: а) число $9^{1995} + 1$; б) число $9^{1996} - 1$?

Указание. Сначала устанавливается периодическая повторяемость степеней 9^k через каждые 2 шага: при k, делящихся на 2, число 9^k оканчивается на 1, при k, не делящихся на 2, число 9^k оканчивается на 9. Это свойство позволяет найти последние цифры чисел, заданных в условии.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Известно, что у чисел 4^1 и 4^3 одинаковые цифры единиц в десятичной записи. На какую цифру оканчивается число 4^{1000}?

1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

Указание. Числа 4^1 и 4^3 оканчиваются на одну цифру, поэтому произведения этих чисел на 4^2, равные 4^3 и 4^5, тоже оканчиваются на одну цифру, причем на ту же, что и предыдущая пара степеней, и т.д., на одну цифру оканчиваются числа 4^1, 4^3, 4^5, ..., 4^{99}, и это цифра 4. Поэтому $4^{100} = 4^{99} \cdot 4$ оканчивается на последнюю цифру числа $4 \cdot 4$, равную 6.

1.3. Известно, что число 7^4 оканчивается на цифру 1. На какую цифру оканчивается число 7^{11}?

1) 1; 2) 3; 3) 7; 4) 9.

Указание. $7^{11} = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7)$, $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$, поэтому последняя цифра числа 7^{11} равна произведению $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$.

1.4. На какую цифру оканчивается число $(573)^3$?

1) 1; 2) 3; 3) 7; 4) 9.

Указание. Данное число оканчивается на туже цифру, что и число $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

2.3. Какие остатки могут получаться при делении квадратов натуральных чисел на 4?

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Указание. Всякое натуральное число при делении на 2 дает остатки 0 или 1, то есть может быть записано как $2k$ или $2k + 1$. Но $(2k)^2 = 4 \cdot k^2$ либо $(2k + 1)^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$. То есть квадрат всякого натурального числа дает при делении на 4 либо остаток 0, либо 1.

2.4. Какие остатки из приведенных не могут получаться при делении квадратов натуральных чисел на 5?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Указание. Возводя в квадрат числа первого десятка, получим, что их последние цифры 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 0. Такие же последние цифры имеют квадраты чисел второго десятка, третьего и т.д. При делении на 5 не может получиться остаток 2 и 3.

§ 5. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ЧИСЛА

Цель параграфа — для четных чисел получить представление в виде $2m$, где m — натуральное число, а для нечетных — в виде $2k + 1$, где k либо 0, либо натуральное число.

Особенности параграфа. Теоретическая часть параграфа очень небольшая, содержит определения четных и нечетных чисел и их представления в виде, соответствующем делению с остатком натуральных чисел на число 2. Переходя к решению задач, следует обратить внимание на правила определения четности и нечетности для суммы и произведения двух натуральных чисел. Применение этих правил позволяет устанавливать четность или нечетность многих числовых выражений, не выполняя самих действий.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: признак делимости на 2; деление с остатком.

Новые математические понятия и свойства: четное число; нечетное число.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Какой цифрой может оканчиваться нечетное число в десятичной системе счисления?

Ответ. Нечетное число не делится на 2. Поэтому из признака делимости на 2 вытекает, что нечетное число может оканчиваться на 1, на 3, на 5, на 7 и на 9.

5.2. Как показать, что сумма двух нечетных чисел всегда четна?

Вариант ответа. Два нечетных числа можно представить в виде $2m + 1$ и $2n + 1$, где m, n — целые неотрицательные числа. Тогда $(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1) = 2k$, где k — натуральное число.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Почему произведение любого натурального числа на четное число будет четным?

Указание. Рассмотрим произведение числа m и четного числа n. Так как n делится на 2, то по определению делимости нацело $n = 2k$, где k натуральное. Поэтому $mn = m \cdot (2k) = 2 \cdot (mk)$.

4.** Каждый из людей, когда-либо живших на Земле, сделал определенное число рукопожатий. Покажите, что число людей, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

Указание. Каждое рукопожатие засчитывается сразу двум людям. Поэтому подсчитанное по всем людям общее число рукопожатий четко. Далее — рассуждение от противного.

7.** Лист бумаги разрезали на три части, некоторые из полученных частей снова разрезали на три части, и так несколько раз. Объясните, почему при подсчете нельзя получить в точности 256 частей.

Указание. Разрезание произвольной части на 3 части увеличивает общее количество частей на 2. Многократное разрезание некоторых частей на 3 части увеличивает общее количество частей на число вида $2m$, где m — натуральное число. Следовательно, из одного листа указанными разрезаниями можно получить только $(1 + 2m)$ частей, то есть нечетное число частей.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Сколько всего четных двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

1) 20; 2) 25; 3) 30; 4) 35.

Указание. Первой цифрой этого числа могут быть 2, 4, 6, 8. В каждом из этих четырех случаев может быть пять вариантов последней цифры числа: 0, 2, 4, 6, 8.

2.2. Какие из указанных чисел могут быть остатками при делении нечетного числа на 6?

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

2.3. Какие из указанных чисел могут быть остатками при делении четного числа на 6?

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

Указание. Всякое натуральное число при делении на 6 может давать остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, то есть представимо в виде $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$. Из них четными являются только числа вида $6k$, $6k + 2$, $6k + 4$, а нечетными — числа вида $6k + 1, 6k + 3$, $6k + 5$.

2.4.* Рассматриваются суммы $1 + 2 + \ldots + n$ всех натуральных чисел от 1 до n включительно. При каких из приведенных значений n такие суммы нечетны?

1) $n = 12$; 2) $n = 18$; 3) $n = 26$; 4) $n = 40$.

Указание. Рассмотрим для примера сумму натуральных чисел от 1 до 12. Объединим слагаемые попарно: $(1 + 2) + (3 + 4) + + (5 + 6) + (7 + 8) + (9 + 10) + (11 + 12)$.

В каждой скобке сумма двух чисел нечетна, количество пар — четно, поэтому сумма всех чисел от 1 до 12 четна.

Ответ. 2, 3.

§ 6. ЗАПИСЬ ЧИСЕЛ В НЕДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Цель параграфа — рассмотреть общий алгоритм записи натуральных чисел в позиционной системе счисления с выбранным основанием.

Особенности параграфа. В параграфе устанавливается способ получения цифр числа в десятичной записи последовательным делением на 10 с остатком самого числа и получающихся неполных частных. Аналогичные способы рассматриваются для записи чисел и в других системах счисления.

Весь материал параграфа предназначен для изучения на третьем уровне, так как слишком сложен для первых двух уровней. Но и на третьем уровне не приводятся никакие доказательства. Алгоритм записи числа в произвольной системе счисления строится по аналогии с десятичной записью, а проверяется на примерах.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: деление с остатком; позиционные системы счисления.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

6.1.** Какая связь имеется между двумя последними цифрами числа и его остатком при делении на 100?

Ответ. Остаток равен числу, образованному двумя последними цифрами данного числа. Отметим, что если предпоследняя цифра 0, то остаток — однозначное число.

6.2.** Как получить цифры числа $(1234)_5$ с помощью деления с остатком?

Ответ. Представим число $(1234)_5$ в десятичной записи:

$$(1234)_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 = 194.$$

Последовательно делим на 5 с остатком число 194 и получающиеся частные: $194 = 5 \cdot 38 + 4$, $38 = 5 \cdot 7 + 3$, $7 = 5 \cdot 1 + 2$, $1 = 5 \cdot 0 + 1$. Получившиеся остатки выписываем слева направо в виде цифр системы счисления с основанием 5 и получаем исходное число.

Можно также последовательное деление с остатком выполнить в системе счисления с основанием 5:

$(1234)_5 = (10)_5 \cdot (123)_5 + 4;$ $(123)_5 = (10)_5 \cdot (12)_5 + 3;$

$(12)_5 = (10)_5 \cdot 1 + 2;$ $1 = (10)_5 \cdot 0 + 1.$

6.3.** Как представить число 2000 в двоичной системе счисления?

Вариант ответа. Последовательно делим на 2 с остатком число 2000 и получающиеся частные. Этот процесс оформляем в виде приведенной в учебнике схемы. Получившиеся остатки выписываем слева направо в виде цифр двоичной записи числа и получаем: $2000 = (11111010000)_2$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5.** Найдите остаток от деления числа $(3233)_4$ на $(13)_4$.

Указание. Можно перевести числа в десятичную систему, выполнить деление с остатком, а затем получившееся неполное частное и остаток перевести в четверичную систему.

В четверичной системе алгоритм деления с остатком аналогичен соответствующему алгоритму в десятичной системе. Чтобы выполнить деление с остатком в четверичной записи, целесообразно заготовить следующие произведения: $(13)_4 \cdot 1 = (13)_4$; $(13)_4 \cdot 2 = (32)_4$; $(13)_4 \cdot 3 = (111)_4$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

Общее указание. В принципе, со всеми тестами можно справиться, если каждый из вопросов перевести в десятичную запись.

1.1.** Какое из указанных чисел имеет запись $(10101)_2$ в двоичной системе?

1) 13; 2) 21; 3) 37; 4) 69.

Указание. Нужно вычислить $1 + 4 + 16$.

1.2.** Какое из указанных чисел имеет запись $(323)_4$ в системе счисления с основанием 4?

1) 19; 2) 39; 3) 59; 4) 75.

Указание. Нужно вычислить $3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 16$.

1.3.** Какую запись имеет число 14 в двоичной системе счисления?

1) $(1010)_2$; 2) $(1100)_2$; 3) $(1110)_2$; 4) $(10010)_2$.

Указание. $14 = 8 + 4 + 2$.

1.4.** Какую запись имеет число 31 в системе счисления с основанием 4?

1) $(113)_4$; 2) $(121)_4$; 3) $(123)_4$; 4) $(133)_4$.

Указание. $31 = 16 + 12 + 3 = 1 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1$.

2.4.** Какие из равенств между числами, записанными в системах счисления с основанием 2 и основанием 4, являются верными?

1) $(12)_4 = (110)_2$; 2) $(21)_4 = (1001)_2$;
3) $(13)_4 = (111)_2$; 4) $(22)_4 = (1010)_2$.

Указание. Если каждую из цифр записи числа в четверичной системе записать в том же порядке в двоичной системе, то сразу получаем двоичную запись всего числа.

Глава 10
ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Цель главы — познакомить учащихся с прямоугольными треугольниками и их элементами, сформулировать признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам и привести примеры его использования для обоснования некоторых геометрических утверждений.

Особенности главы. В начале главы изложение материала в значительной степени опирается на наглядность: изображаются геометрические фигуры, описывается изготовление копий фигур и их перемещения, измерение и сравнение элементов прямоугольных треугольников. Этот процесс можно сопровождать реальным изготовлением копий и их реальным перемещением. На последующих занятиях изложение резко меняется, потому что формулируется признак равенства прямоугольных треугольников по равенству их соответствующих катетов, и последующие геометрические факты этой главы обосновываются с помощью данного признака равенства, то есть с помощью дедуктивных рассуждений.

Предполагается, что учащиеся знают определения равенства отрезков и углов, умеют устанавливать равенство отрезков и углов с помощью измерений и перемещений.

§ 1. РАВЕНСТВО ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Цель параграфа — дать определения прямоугольного треугольника, катетов, гипотенузы; объяснить с помощью наглядных соображений и сформулировать признак равенства прямоугольных треугольников.

Особенности параграфа. Сначала определяются прямоугольный треугольник, его гипотенуза и катеты. Затем на основе наглядных соображений обсуждаются свойства равных прямоугольных треугольников и указывается на равенство соответственных катетов. После этого формулируется признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам, записывается равенство соответственных сторон и соответственных углов у равных прямоугольных треугольников. Следует подчеркнуть, что сформулированный признак принимается как основа для использования в дальнейшем. Особое внимание нужно уделить тому, чтобы учащиеся на наглядном уровне научились распознавать соответственные стороны и углы по рисункам равных прямоугольных треугольников. Можно также особо обратить внимание на соответствие между элементами двух равных прямоугольных треугольников, у каждого из которых катеты равны, потому что в этом случае соответствие можно установить двумя способами.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: понятие равенства фигур; прямой угол.

Новые математические понятия и свойства: прямоугольный треугольник; катет, гипотенуза; признак равенства прямоугольных треугольников.

Вспомогательные понятия: копия треугольника; совмещение фигур.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: соответствие; соответственные элементы равных треугольников.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Почему длина гипотенузы прямоугольного треугольника не может равняться сумме длин его катетов?

Ответ. Вследствие неравенства треугольника сумма двух сторон — катетов больше третьей стороны — гипотенузы.

1.2. Какие способы проверки — равны или не равны треугольники — вы можете предложить?

Вариант ответа. Сначала сравнить одну сторону первого треугольника с каждой из сторон второго треугольника. Если ни в одном случае совпадения не будет, то треугольники не равны. При совпадении сравнить один из прилежащих к выбранной стороне углов с углами второго треугольника, прилежащими к такой же стороне. Снова, если ни в одном случае совпадения не будет, то треугольники не равны. При совпадении первых углов сравнить вторые углы, принадлежащие к рассматриваемым сторонам.

1.3. Какие перемещения могут перевести ΔABC в ΔDEF на рис. 1?

Вариант ответа. Проще всего сначала треугольник ABC перевести в треугольник CTS (рис. 2), повернув копию рисунка вокруг точки C на 90° против хода часовой стрелки, далее этот треугольник CTS смещаем влево на одну клеточку и вниз на одну клеточку, чтобы его вертикальный катет совпал с катетом EF треугольника EDF, а потом переворачиваем полученный треугольник вокруг прямой EF (переложим на другую сторону от прямой EF).

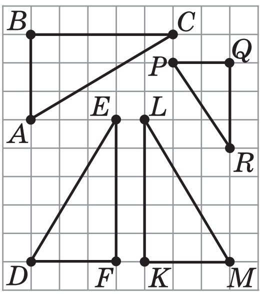


Рис. 1

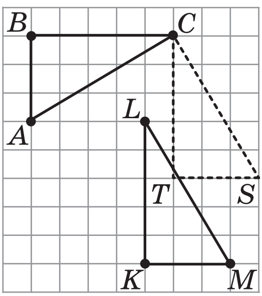


Рис. 2

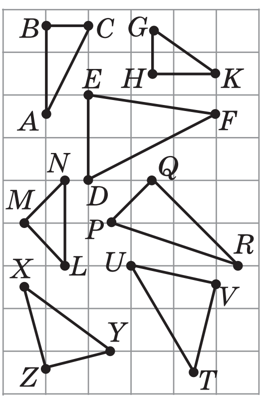


Рис. 3

1.4. Как объяснить, что два прямоугольных треугольника с катетами 23 м и 32 м и с катетами 22 м и 33 м не равны?

Вариант ответа. У равных прямоугольных треугольников катеты попарно равны. Для заданных треугольников невозможно установить соответствие между катетами так, чтобы они попарно были равны.

1.5. Диагональ AC квадрата $ABCD$ делит его на два прямоугольных треугольника. Сколькими способами можно совместить копию треугольника ABC с треугольником ACD?

Вариант ответа. Нетрудно указать два способа совмещения. При одном из них надо перегнуть чертеж пополам вдоль диагонали AC, а при другом — повернуть копию треугольника ABC на 180° вокруг центра квадрата.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. а) Можно ли на рис. 3 найти два равных прямоугольных треугольника?

Указание. В треугольниках, у которых есть угол, похожий на прямой, измерить стороны и сравнить. Треугольники подобраны так, что на основе измерений можно сделать вывод, что равных прямоугольных треугольников на рисунке нет.

2. Разрежьте четырехугольники, изображенные на рис. 4, на несколько прямоугольных треугольников.

Указание. Основная часть разрезаний на рисунке намечена линиями.

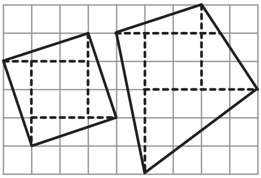


Рис. 4

4.* Может ли гипотенуза одного прямоугольного треугольника быть катетом другого прямоугольного треугольника?

Указание. Может. Например, рассмотрим квадрат с проведенными в нем диагоналями. Тогда сторону квадрата следует считать гипотенузой в одном из треугольников с вершиной в центре квадрата и катетом в другом треугольнике, где гипотенузой является диагональ квадрата.

7. Разрежьте квадрат на шесть равных прямоугольных треугольников.

Указание. Сначала разрежьте квадрат на три равных прямоугольника.

8.* Существует ли прямоугольный треугольник, все стороны которого равны?

Указание. Допустим, что такой треугольник существует, и обозначим его через ΔABC. Не уменьшая общности, будем считать точку C вершиной прямого угла. На продолжении отрезка AC за точку C отложим отрезок CD, равный отрезку AC. По признаку равенства прямоугольных треугольников имеем $\Delta ABC = \Delta DBC$, значит, $AB = BC = DC = CA$. Но тогда в треугольнике ABD сторона AD будет равна сумме сторон AB и BD, а этого не может быть в силу основного свойства длины.

9. а) Проверьте измерениями, что на рис. 5 нет пары равных треугольников. б**) Найдите среди них прямоугольный треугольник.

Указание. а) Достаточно сравнить попарно самые длинные стороны в треугольниках. Если они не равны, то и треугольники не могут быть равными.

б)** Средний треугольник можно дорисовать до прямоугольника (пунктирная линия на рис. 5).

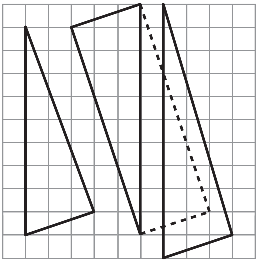


Рис. 5

10.** На рис. 6 изображены девять точек. Сколько можно указать прямоугольных треугольников, имеющих три вершины в этих точках?

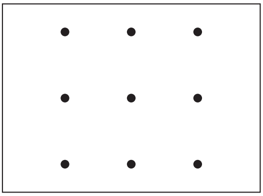


Рис. 6

Указание. Треугольников, у которых вершина прямого угла расположена в вершине квадрата, — четыре; треугольников, у которых вершина прямого угла находится в середине стороны этого квадрата, — пять; треугольников, у которых вершина прямого угла в центре квадрата, — восемь. Это позволяет получить окончательный ответ: 44.

11. Равны ли два прямоугольных треугольника, если их гипотенузы совпадают?

Указание. Могут быть как равными, так и неравными. Можно построить сколько угодно разных прямоугольных треугольников с одинаковыми гипотенузами. Достаточно изобразить прямой угол, поставить ножку циркуля на одну из сторон угла и раствором, равным данной гипотенузе, сделать отсечку на другой стороне угла.

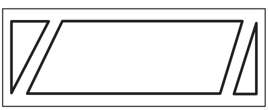


Рис. 7

12. У доски отпилили две части в виде прямоугольных треугольников (рис. 7). Как проверить, равны отпиленные части или нет?

Указание. Катеты этих треугольников, совпадающие с короткими ребрами доски, заведомо равны. Остается сравнить другую пару катетов. Если они также равны, то равны и прямоугольные треугольники.

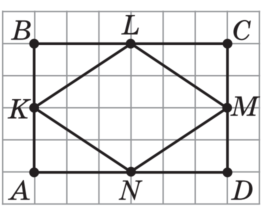


Рис. 8

16. Какие перемещения могут перевести на рис. 8: а) ΔBKL в ΔCLM?

Указание. Если перегнуть лист вдоль вертикальной прямой, проходящей через точку L, то изображения треугольников совместятся.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Сколько на рис. 9 изображено прямоугольных треугольников, равных треугольнику ABC и не совпадающих с ним?

1) три; 2) четыре;

3) семь; 4) восемь.

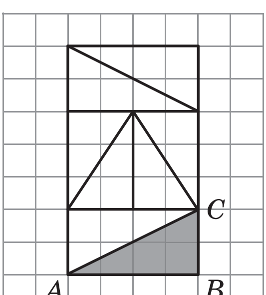


Рис. 9

Указание: Нужно искать треугольники с катетами 2 и 4.

2.3. На рис. 10 стороны треугольников образуют много отрезков. Какие из указанных отрезков равны отрезку MN?

1) BC; 2) PT; 3) KL; 4) TM.

Указание. Можно искать прямоугольные треугольники, равные прямоугольному треугольнику MNK.

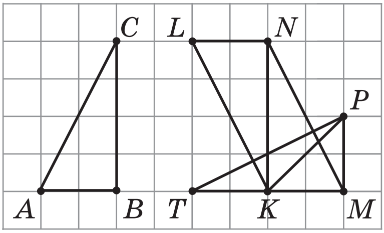


Рис. 10

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА

Цель параграфа — показать, как применяется признак равенства прямоугольных треугольников, рассмотренный в § 1, для обоснования важных и основополагающих свойств прямоугольника и квадрата.

Особенности параграфа. Избыточное определение прямоугольника и рассмотренный признак равенства прямоугольных треугольников позволяют продемонстрировать учащимся примеры математических доказательств и получить содержательные геометрические результаты. Тем самым учащиеся заметно расширяют свои представления о свойствах геометрических фигур, начинают знакомиться с принципами логических рассуждений, основанных на выводе новых свойств, исходя из известных утверждений.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: прямоугольник; квадрат; прямоугольный треугольник; признак равенства прямоугольных треугольников по равенству соответственных катетов.

Новые математические понятия и свойства: диагональ прямоугольника; диагональ квадрата; равенство диагоналей прямоугольника; свойство диагонали квадрата делить угол пополам; сумма острых углов прямоугольного треугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как сложить треугольник из двух фигур, на которые прямоугольник делится диагональю?

Вариант ответа. Эти фигуры — равные прямоугольные треугольники. Надо совместить вершины прямых углов и пару равных катетов этих треугольников, а оставшиеся катеты направить в противоположные стороны.

2.2. Может ли треугольник иметь два прямых угла?

Вариант ответа. Если предположить, что такой треугольник существует, то тогда он прямоугольный. Если выделить этот прямой угол, то сумма величин оставшихся двух углов в сумме больше $90°$, потому что один из углов прямой. Однако в прямоугольном треугольнике сумма этих углов должна равняться $90°$. Следовательно, сделанное предположение было неверным, то есть треугольника с указанным свойством углов не существует.

2.3. В пункте получено свойство: диагонали прямоугольника равны. *Вопрос*. Как использовать это свойство прямоугольника для разметки прямоугольной площади на местности?

Вариант ответа. Площадку $ABCD$ размечаем так, чтобы выполнялись равенства $AB = CD$ и $BC = AD$. После этого измеряем длины диагоналей AC и BD и сравниваем. Пусть оказалось, что $AC > BD$. Тогда получается не прямоугольник и нужно поправить разметку, сместив вершины B и C так, чтобы уменьшить длину AC. После этого снова сравниваем диагонали. Так повторяем несколько раз, пока длины диагоналей не совпадут с достаточной для нас точностью.

2.4. Какие свойства квадрата вы знаете?

Вариант ответа. У квадрата все углы прямые; все стороны квадрата равны; диагонали квадрата равны; диагональ делит квадрат на два равных треугольника; диагонали квадрата делят его углы пополам.

Возможно, будет указано и еще одно свойство, что диагонали делят квадрат на четыре равных треугольника.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Даны четыре точки. Как проверить, могут ли они быть вершинами: а) ромба; б) прямоугольника; в) квадрата?

Указание. Сначала нарисовать четырехугольник с вершинами в этих точках. Затем измерить стороны и углы. Если все стороны равны, то четырехугольник — ромб. Если все углы прямые и противоположные стороны попарно равны, то четырехугольник — прямоугольник, а если, кроме того, все стороны равны, то это квадрат. В принципе, возможны и более экономные способы проверки, однако на настоящий момент не хватает утверждений, с помощью которых можно провести доказательство. Например, если у четырехугольника попарно равны противоположные стороны и равны диагонали, то такой четырехугольник — прямоугольник, но доказать это на данном этапе не представляется возможным.

3. Почему четырехугольник $ABCD$ на рис. 1 является ромбом?

Указание. Отметить точку O пересечения диагоналей и показать равенство треугольников AOB, BOC, COD, AOD.

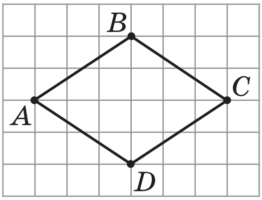


Рис. 1

5. Можно ли из отрезков в 4 см, 5 см, 6 см и 7 см составить два отрезка, равные диагоналям некоторого квадрата?

Указание. Заметить, что $4 + 7 = 5 + 6$.

7. Какие прямоугольники естественно считать равными?

Указание. По определению два прямоугольника равны, если копию одного из них можно совместить с другим. Заметим, что для равных прямоугольников можно установить соответствие сторон так, что соответствующие друг другу стороны равны.

10.* Сумма двух углов прямоугольного треугольника равна $91°$. Найдите все его углы.

Указание. Один из углов, указанных в сумме, должен быть прямым.

14.* Как сложить прямоугольный треугольник из трех равных прямоугольных треугольников, один из углов которых равен $30°$?

Указание. Совместить гипотенузы двух треугольников так, чтобы получился четырехугольник с двумя прямыми углами, острым углом в $60°$ и тупым углом в $120°$, а затем совместить короткий катет третьего треугольника с короткой стороной полученного четырехугольника.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. В прямоугольном треугольнике один из острых углов в четыре раза больше другого острого угла этого треугольника. Чему равна величина наименьшего угла этого треугольника?

1) $18°$; 2) $22°$; 3) $26°$; 4) $30°$.

Указание. Нужно $90°$ разделить на 5.

§ 3. ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Цель параграфа — показать, как применяются признак равенства прямоугольных треугольников и изученные свойства прямоугольника и квадрата при решении геометрических задач.

Особенности параграфа. В параграфе рассматриваются решения задач повышенного уровня сложности с использованием признака равенства прямоугольных треугольников по двум катетам. Весь параграф рассчитан на второй и третий уровень обучения. Одна из рассмотренных задач рекомендуется для изучения на втором уровне, а другая — на третьем уровне.

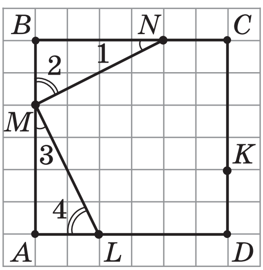


Рис. 1

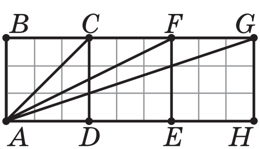


Рис. 2

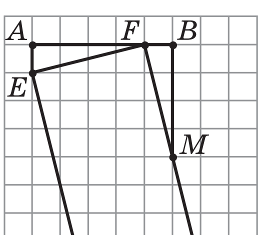


Рис. 3

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1.* В пункте рассматривается задача, в которой на сторонах квадрата $ABCD$ ставится точка M на AB, точка N на BC, точка K на CD, точка L на AD так, что $AM = BN = CK = DL$ (рис. 1). *Вопрос.* Почему в рассмотренном примере $\angle 3 + \angle 4 =$ $= 90°$?

Вариант ответа. По свойству углов прямоугольного треугольника, прилежащих к гипотенузе.

3.2.** Почему на рис. 2 углы GAH и CAF равны?

Вариант ответа. В пункте доказывается, что $\angle FAE + \angle GAH = 45°$, $\angle CAF +$ $+ \angle FAH = 45°$. Из двух полученных равенств следует, что $\angle CAF = 45° - \angle FAH =$ $= \angle GAH$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1.* Почему четырехугольник $EFGH$ на рис. 3 — прямоугольник?

Указание. Сделаем дополнительные построения. Отметим середину M стороны FG и построим прямоугольные треугольники EAF и FBM, как указано на рисунке. Из равенства этих треугольников удается получить, что $\angle EFM = 90^\circ$ и $EF = FM$.

5.** Дан квадрат $ABCD$ на рис. 4. Точка K — середина стороны AB, точка L на диагонали AC расположена так, что $AL = 3LC$. Покажите, что угол KLD — прямой.

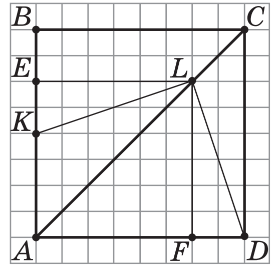


Рис. 4

Указание. Рассмотрите вспомогательные треугольники KEL и DFL, построенные на этом рисунке.

6.** На рис. 5 через точки P, Q, R, S проведена окружность. Какие еще точки этой окружности являются узлами сетки?

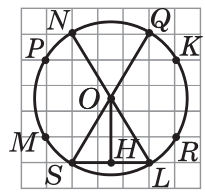


Рис. 5

Указание. Эти точки M, N, K, L на рисунке уже отмечены. Для пояснения того, что, например, точка L лежит на окружности, можно рассмотреть равные прямоугольные треугольники SOH и LOH.

7.** Покажите, что сумма углов AOB и AOC на рис. 6 равна 45°.

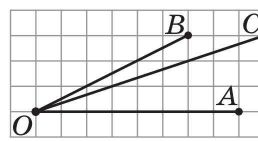


Рис. 6

Указание. Эта задача мало чем не отличается от задачи, разобранной в пункте 3.2. Поэтому для заданной задачи можно повторить все рассуждения, которые выполнялись ранее.

9.* Зная одну вершину A некоторого квадрата и точку O пересечения его диагоналей на рис. 7, укажите на клетчатой бумаге все остальные вершины.

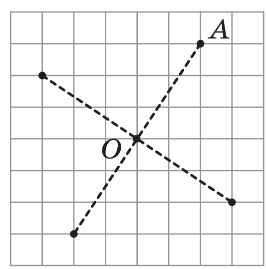


Рис. 7

Указание. На рисунке пунктиром показано, как изобразить оставшиеся вершины.

11. Известно, что сумма углов треугольника равна 180°, а один из его углов равен разности двух других. Чему равен наибольший угол такого треугольника?

Указание. Обозначим величины углов через x°, y°, z°. Тогда из условий $x + y + z = 180$ и $x - y = z$ можно получить, что $2x = 180$, $x = 90$ и $y + z = 90$.

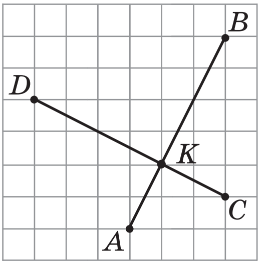


Рис. 8

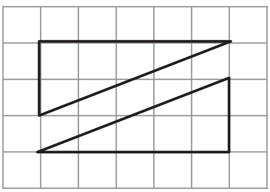


Рис. 9

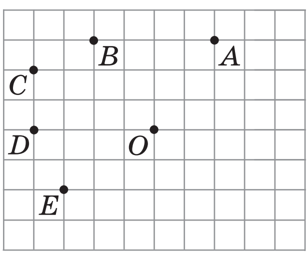


Рис. 10

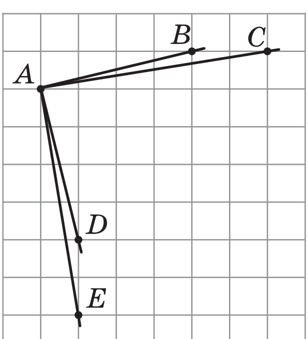


Рис. 11

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Изображенные на рис. 8 отрезки AB и CD пересекаются в точке K. Чему равна величина угла BAC?

1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.

Указание. На рисунке нужно найти равнобедренный прямоугольный треугольник.

1.3. Какое наибольшее число не равных между собой треугольников можно составить, по-разному приставляя друг к другу изображенные на рис. 9 треугольники?

1) Два; 2) три; 3) четыре; 4) пять.

Указание. Всего два.

1.4. Какое наибольшее число различных четырехугольников можно составить, по-разному приставляя друг к другу изображенные на рис. 9 треугольники?

1) Два; 2) три; 3) четыре; 4) пять.

Указание. Совмещать равные стороны попарно можно двумя способами, при этом получается шесть вариантов, но среди них два — это треугольники.

2.2. На рис. 10 изображены шесть точек. Через какие из указанных точек проходит окружность с центром O и радиусом OE?

1) точка A; 2) точка B;
3) точка C; 4) точка D.

Указание. На рисунке нужно найти гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами 2 и 3.

2.3. На рис. 11 изображено несколько лучей с началом в точке A. Какие из указанных углов прямые?

1) $\angle BAD$; 2) $\angle CAD$;
3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAE$.

Указание. На рисунке угол BAD можно сделать углом квадрата и угол CAE можно сделать углом другого квадрата. Это позволяет выбрать нужные варианты.

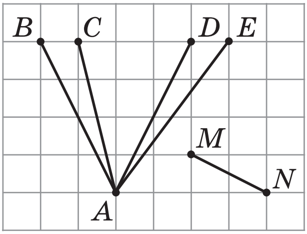


Рис. 12

2.4. На рис. 12 изображено несколько отрезков. Длина каких из указанных отрезков в два раза больше длины отрезка MN?

1) AB; 2) AC; 3) AD; 4) AE.

Указание. Рассматривая данные отрезки как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами, идущими по линиям сетки, на рисунке нужно искать прямоугольные треугольники с катетами 2 и 4 шагов сетки.

Глава 11
ДРОБИ

Цель главы — ввести обыкновенные дроби (дробные числа), определить условия равенства дробей, операции умножения, сложения и обратные к ним, рассмотреть правила сравнения дробей и представление дробных чисел в виде смешанной дроби.

Особенности главы. Необходимость расширения системы натуральных чисел ощущается учащимися уже в младших классах. Целых чисел недостаточно для выполнения операции деления, измерения таких величин, как длины, массы, объемы и т.д. Фактически дети с малых лет встречаются с дробными числами, оперируя такими понятиями, как половина, треть, четверть и др. В этой главе они познакомятся с систематической теорией обыкновенных дробей, узнают общие правила сравнения, сложения, вычитания и умножения дробей.

Также данная глава предполагает определенную тренировку логики ребенка, если использовать материал главы в достаточно полном объеме. Для этого изложение выполнено логически связанным. Однако при необходимости можно обойтись и просто «запоминанием правил».

§ 1. РАВНЫЕ ЧАСТИ ВЕЛИЧИНЫ

Цель параграфа — ввести понятие обыкновенной дроби.

Особенности параграфа. Введение дробей мотивируется обращением к интуитивным представлениям об измерении величин, обладающих двумя особыми свойствами. Во-первых, каждую из них можно делить на любое число равных частей. А во-вторых, если из нескольких однородных величин данного типа определенным образом составить новую величину, то ее численное значение будет равно сумме численных значений составных частей при условии, что все они измеряются в одинаковых единицах. Последнее свойство называется в математике *аддитивностью* (разумеется, этого слова нет в учебнике).

Типичными примерами таких величин являются длина, площадь, объем, время, масса и др.

Как было показано в главе 2, точные числовые значения измеряемых величин удается найти очень редко. Обычно приходится обходиться теми или иными приближениями. Для повышения точности измерений используют «более мелкие» эталоны: вместо метров — миллиметры, вместо килограммов — граммы, вместо минут — секунды. Однако применение «штатных» единиц, имеющих специальные названия, не всегда удобно. Во многих случаях целесообразно разделить уже имеющийся эталон на равные части и эти части использовать в качестве новых единиц измерения.

Длину можно выражать в метрах, половинах метра, четвертях метра, десятых долях метра. Время — в часах, четвертях часа, двенадцатых долях часа. И так далее. Например, длина одной и той же доски с недостатком может приближенно равняться двум с половиной метрам, двум целым и пяти восьмым частям метра, двум целым и одиннадцати шестнадцатым частям метра. Здесь каждое последующее значение точнее предыдущего. Так мы приходим к понятию *дробей*, или *дробных чисел*, необходимых для выражения результатов измерений в равных частях целого. В приведенном примере дробными числами являются два с половиной, две целых и пять восьмых, две целых и одиннадцать шестнадцатых. Как правило, слово «частей» для краткости опускают, подразумевая, что речь идет о равных частях некоторого эталона.

С математической точки зрения происхождение того или иного эталона не имеет принципиального значения. Поэтому о дробных числах говорят как о значениях, выраженных в равных долях числа 1, не уточняя, какая именно единица имеется в виду. Это может быть единица длины, единица массы или какая-нибудь еще.

Пусть n — произвольное натуральное число. Разделив единицу на n равных частей, получим так называемую *простейшую* дробь, которая обозначается символом $\frac{1}{n}$. Число n называется *знаменателем* данной дроби.

Простейшие дроби с одинаковыми знаменателями легко складывать. Если из k штук однородных величин, имеющих одинаковые числовые значения $\frac{1}{n}$, составить новую величину, то ее значение будет в k раз больше, чем у каждой из составных частей. Иными словами,

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k} = \frac{1}{n} \cdot k.$$

В частности, n одинаковых величин, равных $\frac{1}{n}$, составляют вместе исходную единицу измерения, поэтому $\frac{1}{n} \cdot n = 1$.

Нетрудно проверить, что для любых натуральных p и q справедливы равенства

$$\frac{1}{n} \cdot (p + q) = \frac{1}{n} \cdot p + \frac{1}{n} \cdot q, \qquad \left(\frac{1}{n} \cdot p\right) \cdot q = \frac{1}{n} \cdot (pq),$$

которые непосредственно вытекают из аддитивного свойства. В тексте учебника они проверяются на конкретных примерах.

На n равных частей можно разделить не только единицу измерения, но и любую величину, измеряемую целым числом m единиц. Значение одной такой части обозначается *обыкновенной дробью* общего вида $\frac{m}{n}$. Число над чертой называется *числителем* данной дроби, а число под чертой, как и ранее, — знаменателем. Для дробей общего вида справедливы те же свойства, что и выше:

$$\frac{m}{n} \cdot (p + q) = \frac{m}{n} \cdot p + \frac{m}{n} \cdot q, \qquad \left(\frac{m}{n} \cdot p\right) \cdot q = \frac{m}{n} \cdot (pq).$$

Наконец, отметим важную связь между простейшими дробями и дробями общего вида, а именно: $\frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$. Для доказательства достаточно проверить, что n значений, равных $\frac{1}{n} \cdot m$, составляют вместе целое число m. Это вытекает из цепочки равенств:

$$\left(\frac{1}{n} \cdot m\right) \cdot n = \frac{1}{n} \cdot (nm) = \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) \cdot m = 1 \cdot m = m.$$

Строгое доказательство в тексте учебника не приводится. Нужный факт опять проверяется на примерах.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: действия с натуральными числами; сравнение натуральных чисел; изображение натуральных чисел на числовой прямой; единицы измерения длин, объемов, масс и т.д.

Новые математические понятия и свойства: простейшая дробь; обыкновенная дробь; знаменатель; числитель.

Вспомогательные понятия: измеряемые величины; единицы измерения; числовые значения величин; часть величины; суммы равных частей единицы измерения; свойства длины.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Во сколько раз расстояние от Северного полюса до экватора больше линейки длиной 40 см?

Указание. Известно, что длина экватора примерно равна 40 000 км. Значит, расстояние от Северного полюса до экватора ориентировочно составляет 10 000 км или один миллиард сантиметров.

Ответ. Расстояние от Северного полюса до экватора больше линейки длиной 40 см в 25 миллионов раз.

1.2. Как объяснить, что 1 т цемента можно расфасовать в 20 мешков так, что в каждом мешке будет по 50 кг цемента?

Ответ. Одна тонна равна тысяче килограммов. Тысяча нацело делится на 50 и получается 20.

1.3. Как объяснить, что на числовой прямой длина отрезка от точки $\frac{1}{2}$ до точки 1 также равна $\frac{1}{2}$?

Ответ содержится в тексте пункта: точка с координатой $\frac{1}{2}$ является серединой отрезка [0; 1], поэтому расстояния от нуля до $\frac{1}{2}$ и от $\frac{1}{2}$ до 1 равны.

1.4. Какие обозначения середины отрезка [0; 100] вы можете предложить?

Ответ. 50 или $\frac{1}{2} \cdot 100$.

1.5. Какие точки из обозначенных натуральными числами являются ближайшими к точке $\frac{11}{2}$?

Ответ. Данная точка — середина отрезка [5; 6], поэтому ближайшая слева целая точка равна пяти, а справа — шести.

1.6. Как на числовой прямой можно обозначить середину отрезка [3; 4]?

Ответ. $\frac{7}{2}$.

1.7. Как объяснить, что на числовой прямой длина отрезка от точки $\frac{1}{3}$ до точки 1 равна $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$?

Ответ. Длина отрезка [0; 1] равна $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. По основному свойству длины эта величина равна также сумме расстояний от нуля до точки $\frac{1}{3}$ и от точки $\frac{1}{3}$ до единицы. Расстояние от нуля до точки $\frac{1}{3}$ по определению равно $\frac{1}{3}$. Значит, расстояние от точки $\frac{1}{3}$ до единицы равно $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

1.8. Какие точки на числовой прямой делят отрезок $\left[0; \frac{1}{2}\cdot 6\right]$ на 6 равных частей?

Ответ. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\cdot 2$, $\frac{1}{2}\cdot 3$, $\frac{1}{2}\cdot 4$, $\frac{1}{2}\cdot 5$.

1.9. Какие обозначения для точек деления отрезка [0; k] на три равные части вы можете предложить?

Ответ. Например, $\frac{k}{3}$ и $\frac{k}{3}\cdot 2$.

1.10. Как объяснить, что на числовой прямой длина отрезка $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$ будет равна $4\cdot\frac{1}{5}$?

Ответ. См. ответ на вопрос к пункту 1.7.

1.11. В каких единицах измерения вы можете выразить $\frac{6}{10}$ от 1 кг и получить дробь $\frac{6}{1000}$?

Ответ. В центнерах.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. г)* Какая часть суток прошла, если сейчас 36 мин первого ночи?

Указание. Выразим все данные величины в минутах. В сутках 1440 минут, а прошло 36 минут. Разделив 36 на 1440, получим *ответ:* 1/40.

8.* На сколько равных частей нужно разделить час, чтобы получилось столько же минут, сколько при делении четверти часа на 5 равных частей?

Указание. Представим час как сумму четырех четвертей, и каждую четверть разделим на 5 равных частей. Всего получится 20 частей.

9. д)* Какую часть суток составляют двадцать минут?

Указание. Мысленно поделив каждый из 24 часов, составляющих сутки, на 3 части, сможем ответить на поставленный вопрос: 1/72.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1.* Пирог разрезали на 16 равных частей. Каждый из 4 гостей съел не менее 2 частей пирога. Какую часть пирога съел тот, кто съел не меньше каждого из остальных?

1) $\frac{7}{16}$; 2) $\frac{9}{16}$; 3) $\frac{11}{16}$; 4) $\frac{13}{16}$.

Указание. Каждый из остальных съел не менее двух частей пирога, то втроем вместе гости съели не менее 6 частей. На долю последнего остается не более 10 частей.

Ответы. 1 и 2.

§ 2. РАВЕНСТВО ДРОБЕЙ

Цель параграфа — сформулировать *признак равенства* дробей и вывести из него *основное свойство* дроби; дать наглядное представление об *общих знаменателях* и способах приведения дробей к общему знаменателю, что является основой для дальнейшего определения арифметических операций с дробями.

Особенности параграфа. Изложение учебного материала основано на обращении к наглядному изображению дробей точками числовой прямой и рассмотрении конкретных примеров. Доказательные рассуждения пока не используются. Соображения, связанные с изображениями на числовой прямой, имеют нестрогий характер и не всегда могут удовлетворить как учащихся, так и преподавателей. Приведем здесь формальные пояснения, вытекающие из материала предыдущего параграфа.

Пусть m, n, p и q — произвольные натуральные числа. Рассмотрим дробь $\frac{m}{nq}$. По определению сумма nq штук таких дробей равна m, значит,

$$m = \frac{m}{nq} \cdot nq = \left(\frac{m}{nq} \cdot q\right) \cdot n = \underbrace{\frac{m}{nq} \cdot q + \frac{m}{nq} \cdot q + \ldots + \frac{m}{nq} \cdot q}_{n}.$$

Таким образом, число m представлено суммой n штук одинаковых слагаемых, равных $\frac{m}{nq} \cdot q$. Поэтому

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{nq} \cdot q = \left(\frac{1}{nq} \cdot m\right) \cdot q = \frac{1}{nq} \cdot (mq).$$

Аналогично, $\frac{p}{q} = \frac{1}{nq} \cdot (pn)$. Если теперь $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то

$$\frac{1}{nq} \cdot (mq) = \frac{1}{nq} \cdot (pn),$$

откуда $mq = pn$. Повторяя рассуждения в обратном порядке, получим, что из условия $mq = pn$ вытекает равенство $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Основное свойство дроби и правило *сокращения* дробей являются непосредственным следствием признака равенства.

Заметим, наконец, что понятие общего знаменателя двух дробей и алгоритм приведения дробей к общему знаменателю только продемонстрированы на конкретных примерах. Эту демонстрацию желательно подкрепить рассмотрением как можно большего количества задач и примеров.

Особенностью изложения является также тот факт, что мы не требуем обязательных поисков наименьшего общего знаменателя, как во многих учебниках. Достаточно найти хоть какой-нибудь общий знаменатель. Проще всего взять произведение знаменателей исходных дробей.

Новые математические понятия и свойства: равенство дробей; признак равенства; основное свойство дроби; сокращение дробей; общий знаменатель двух дробей; приведение к общему знаменателю.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как объяснить равенство дробей $\frac{55}{66}$ и $\frac{555}{666}$?

Ответ. Воспользоваться признаком равенства дробей.

2.2. Могут ли быть равными две дроби, одна из которых имеет четные числитель и знаменатель, а вторая имеет нечетные числитель и знаменатель?

Ответ. Могут, например, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{6}$.

2.3. Как привести к общему знаменателю три дроби?

Ответ. Числитель и знаменатель каждой дроби умножить на произведение знаменателей двух других дробей.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Какой наименьший знаменатель может иметь дробь, равная дроби $\frac{156}{288}$?

1) 6; 2) 12; 3) 24; 4) 48.

Указание. Разложить числитель и знаменатель на простые множители и сократить все общие множители в числителе и знаменателе.

2.4. Какие из приведенных дробей можно сократить?

1) $\frac{13}{69}$; 2) $\frac{13}{65}$; 3) $\frac{102}{17}$; 4) $\frac{37}{111}$.

Указание. Заметим, что в каждой из данных дробей либо числитель, либо знаменатель — простое число. Поэтому сокращение возможно только на это число.

§ 3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ

Цель параграфа — сформулировать правила арифметических действий с дробями и выработать навыки практического выполнения этих операций.

Особенности параграфа. В параграфе проводится формальная аналогия с арифметикой натуральных чисел. Правила сложения и вычитания дробей имеют естественное и простое объяснение, основанное на приведении к общему знаменателю и дальнейших действиях с равными долями целого. Правила умножения и деления дробей не столь очевидны. Поэтому они даны на формальном уровне и поясняются специфическими примерами типа умножения или деления на целое число. Как уже отмечалось, правила сложения и вычитания дробей, основанные на приведении к общему знаменателю, понятны для пятиклассников и обычно не вызывают недоразумений. Иное дело — правила умножения. Их строгое обоснование в 5 классе доступно далеко не для всех учащихся. Поэтому правила умножения попросту заучивают наизусть, откладывая «на потом» соответствующие объяснения. Со временем ученики привыкают выполнять эти правила, но даже в старших классах не могут объяснить их происхождение. Приведем здесь необходимые пояснения к умножению дробей.

Заметим, что умножать дроби на натуральные числа мы уже умеем — эта операция сводится к сложению одинаковых частей целого. Распространим понятие произведения на случай любых дробных сомножителей. Естественно предположить, что при этом должны выполняться два условия:

а) для дробей справедливы те же законы умножения, что и для натуральных чисел, то есть коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность;

б) если дроби равны натуральным числам, то их произведение совпадает с произведением соответствующих натуральных чисел.

Из этих условий с необходимостью вытекает, что дроби можно умножать только по общеизвестному правилу, и никак иначе. В самом деле, пусть произведение дробей уже определено так, что выполнены условия *а* и *б*. Тогда для любых натуральных чисел n, q имеем цепочку равенств:

$$1=\frac{n}{n}\cdot\frac{q}{q}=\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\cdot q\right)=\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot(nq)=\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}}_{nq}.$$

Здесь первое равенство очевидно, так как всякая дробь с числителем, равным знаменателю, равняется единице. Второе равенство вытекает из формулы $\frac{m}{n}=\frac{1}{n}\cdot m$, установленной в первом параграфе. Третье — следствие коммутативности и ассоциативности. Наконец, четвертое означает, что умножение на целое число равносильно сложению нескольких равных слагаемых.

Таким образом, единица представлена как сумма nq штук одинаковых слагаемых, равных произведению $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}$. Поэтому

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{nq}.$$

Отсюда и из условий *а*, *б* легко получается общее правило умножения любых дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{n}\cdot m\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\cdot p\right)=\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}\right)\cdot(mp)=\frac{1}{nq}\cdot(mp)=\frac{mp}{nq}.$$

Теперь уже нетрудно проверить, что умножение, определенное по этому правилу, действительно удовлетворяет условиям *а* и *б*, а также определить деление как операцию, обратную умножению.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: законы сложения и умножения натуральных чисел; представление о дробях как о долях, возникающих при делении целого на равные части; сложение одинаковых долей и умножение их на натуральные числа; простейшие дроби и их связь с дробями общего вида; равенство дробей; приведение к общему знаменателю; сокращение дробей.

Новые математические понятия и свойства: умножение дробей; сложение дробей; вычитание дробей; обратные дроби; деление дробей; законы сложения и умножения.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Как вы можете записать результат умножения дробей $\frac{5}{5}$ и $\frac{9}{3}$?

Ответ: $\frac{9}{3}$ или 3 (после сокращения).

3.2. Чему равно произведение $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}$?

Ответ. По правилу умножения дробей $\frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$.

3.3. Чему равно $56 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{3} \cdot 56$?

Применив правило умножения и дважды сократив на 56, получим *ответ*: $\frac{1}{9}$.

3.4. Почему дроби $\frac{2m}{2n}$ и $\frac{5n}{5m}$ являются взаимно обратными?

Ответ. Сократив первую дробь на 2, а вторую — на 5, получим дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$, которые являются обратными по определению.

3.5. Как вы понимаете слова «увеличить 1000 в $\frac{3}{2}$ раза»?

Ответ. Это означает «умножить 1000 на $\frac{3}{2}$». В результате получится 1500.

3.6. Чему равно $\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \frac{5}{1}$?

Ответ. По правилу сложения дробей с равными знаменателями получаем $\frac{15}{1} = 15$. Можно было сразу заметить, что все дроби — целые числа, и складывать эти целые числа.

3.7. Чему равно $\frac{5}{6} - \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$?

Ответ. По правилу вычитания дробей с равными знаменателями имеем $\frac{5 - 4 + 3 - 2 + 1}{6} = \frac{3}{6} = 2$.

3.8. Может ли разность двух дробей с разными знаменателями быть равной $\frac{1}{2}$?

Ответ. Может. Например, $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3.9. Чему равно $\left(\frac{2}{5} : \frac{4}{5}\right) : \left(\frac{3}{2} : \frac{5}{2}\right)$?

Ответ. Вычисления должны быть проведены в соответствии с правилом скобок. Далее ответ $\frac{5}{2}$ получается просто.

3.10. Почему произведение нескольких ненулевых дробей никогда не равно 0?

Ответ. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда равен нулю ее числитель. При умножении нескольких дробей с ненулевыми числителями получится дробь, числитель которой также отличен от нуля.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.* Во сколько раз нужно увеличить дробь $\frac{3}{25}$, чтобы получить дробь $\frac{3}{5}$?

Решение. Вопрос можно сформулировать иначе: на что надо умножить $\frac{3}{25}$, чтобы получить $\frac{3}{5}$? Для ответа на него составим уравнение $\frac{3}{25} \cdot x = \frac{3}{5}$, решение которого легко находится по правилу деления дробей:

$$x = \frac{3}{5} : \frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 25}{5 \cdot 3} = 5.$$

22.* Для сплава меди, цинка и олова нужно $\frac{204}{5}$ кг меди, 5 кг цинка и некоторое количество олова. Известно, что олово составляет $\frac{4}{9}$ общей массы сплава. Какова общая масса сплава?

Решение. $\frac{204}{5} + 5 = \frac{229}{5}$ (кг), что составляет $\frac{5}{9}$ общей массы сплава. Поэтому общая масса равна $\frac{229}{5} : \frac{5}{9} = \frac{229 \cdot 9}{5 \cdot 5} = \frac{2061}{25}$ (кг).

25.* Первый рабочий сделает всю работу за 12 часов, второй — за 15 часов, третий — за 10 часов, четвертый — за 9 часов. Какую часть работы сделают вместе 4 рабочих за 1 час?

Указание. За час первый рабочий способен выполнить $\frac{1}{12}$

всей работы, второй — $\frac{1}{15}$, третий — $\frac{1}{10}$, четвертый — $\frac{1}{9}$. Вместе за час они могут выполнить $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}$ всей работы.

36.** Расставьте скобки так, чтобы вычитание было возможно: $\frac{117}{56}-\frac{38}{56}-\frac{17}{56}-\frac{29}{56}$. Сколько вариантов можно предложить?

Указание. Для первого действия следует выбирать из скобок, заключающих либо первую и вторую дробь, либо вторую и третью дробь, либо третью и четвертую дробь. По условиям задачи последний вариант не подходит. Если первые две дроби заключены в скобки, то для второго действия невозможно взять третью и четвертую дробь, поэтому остается вариант $\left(\left(\frac{117}{56}-\frac{38}{56}\right)-\frac{17}{56}\right)-\frac{29}{56}$. Если на первом шаге выбраны вторая и третья дробь, то на втором шаге остается только вариант $\left(\frac{117}{56}-\left(\frac{38}{56}-\frac{17}{56}\right)\right)-\frac{29}{56}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Чему равно $\left(\frac{4}{15}:\frac{2}{5}\right):\frac{2}{5}$?

1) $\frac{4}{15}$;   2) $\frac{5}{3}$;   3) $\frac{3}{5}$;   4) $\frac{4\cdot 5}{3\cdot 4}$.

Указание. В этом тесте может показаться, что деление дроби дважды подряд на одну и ту же дробь не изменяет первоначальную дробь.

2.4. Какие из указанных дробей не равны разности $\frac{5}{6}-\frac{3}{10}$?

1) $\frac{2}{5}$;   2) $\frac{7}{15}$;   3) $\frac{3}{5}$;   4) $\frac{2}{3}$.

Указание. Разность равна $\frac{32}{60}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$.

§ 4. ЦЕЛАЯ И ДРОБНАЯ ЧАСТИ ЧИСЛА

Цель параграфа — ввести целые и дробные части числа, смешанные дроби; научить переводить неправильную дробь в смешанную и наоборот, а также выработать соответствующие технические навыки для операций над такими дробями.

Особенности параграфа. Параграф носит сравнительно несложный технический характер. Основное положение, которое нужно усвоить обучаемым, — представление дробного числа в виде смешанной дроби напрямую зависит от алгоритма деления с остатком для натуральных чисел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным деление с остатком для целых чисел.

Новые математические понятия и свойства: целая часть дробного числа; дробная часть дробного числа; смешанная дробь; сумма и разность смешанных дробей; произведение и частное смешанных дробей.

Вспомогательные понятия: обозначение целой и дробной частей.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Почему запись $14\frac{12}{3}$ не является смешанной дробью?

Ответ. У дробной части числитель должен быть меньше знаменателя. Для правильного представления нужно найти целую часть данного числа, которая равна 18, а затем и дробную часть.

4.2. В каких случаях сумма двух дробей равна сумме их целых частей?

Ответ. Это возможно только в том случае, когда каждое из слагаемых является либо нулем, либо натуральным числом.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5. Лодка проплыла за первый час $6\frac{3}{4}$ километра. За второй час лодка проплыла на $1\frac{1}{2}$ км больше, чем за первый, а за третий час — на $\frac{5}{8}$ км больше, чем за второй. Какое расстояние проплыла лодка за 3 часа?

Указание. Отдельно выписать — сколько за первый час $\left(6\frac{3}{4}\right)$; сколько за второй $\left(6\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}\right)$, сколько за третий $\left(6\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$. Затем результаты сложить. В результате получается $23\frac{7}{8}$ (км).

14.* Может ли дробная часть числа быть больше его целой части?

Указание. Целая часть может быть равна 0.

26.* У мальчика спросили: «Сколько весит пойманная тобой рыба?» Он ответил: «Три четверти килограмма и еще три четверти всего веса». Сколько весит рыба?

Указание. Первый способ. Из условия следует, что $\frac{1}{4}$ всего веса рыбы составляет $\frac{3}{4}$ кг. Поэтому вес рыбы равен $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ (кг).

Второй способ. Если за x (кг) обозначить вес рыбы, то из условия $\frac{3}{4} + \frac{4}{3}x = x$.

27.* В трех гаражах помещается 460 машин. Число машин в первом гараже составляет $\frac{3}{4}$ от числа машин во втором гараже. В третьем гараже в $1\frac{1}{2}$ раза больше машин, чем в первом. Сколько машин в каждом гараже?

Указание. Проще всего ввести неизвестную и составить уравнение. Пусть x — число машин во втором гараже, тогда в первом их $\frac{3}{4}x$, а в третьем $\left(\frac{3}{4}x\right) \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{9}{8}x$. Далее из условия получаем уравнение $\frac{3}{4}x + x + \frac{9}{8}x = 460$, откуда $\frac{23}{8}x = 460$, $x = 160$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Чему равна дробная часть числа $\frac{738}{5}$?

1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{4}{5}$.

Указание: Остаток от деления 738 на 5 равен остатку от деления 8 на 5.

2.1. Какие из указанных натуральных чисел меньше $\frac{67}{13}$?
1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

Указание. Сначала найти целую часть дроби $\frac{67}{13}$.

§ 5. СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

Цель параграфа — ввести упорядочение в систему дробных чисел, освоить правила сравнения дробей и рассмотреть простейшие свойства сравнения дробей.

Особенности параграфа. Задачи на сравнение дробных чисел в конечном итоге приводятся к сравнению некоторых натуральных чисел. Свойства сравнения дробей аналогичны свойствам сравнения для натуральных чисел. В большинстве пунктов результаты получаются на основе строгих логических рассуждений, использующих ранее полученные или известные результаты. В примерах в основном иллюстрируется применение общих правил в конкретных ситуациях.

На первом уровне главное внимание нужно сосредоточить на изучении и применении правила сравнения двух дробей. Остальные правила сравнения рассчитаны преимущественно на второй и третий уровень обучения.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: арифметические операции над дробями; деление целых чисел с остатком; сравнение натуральных чисел; правила работы с неравенствами для натуральных чисел.

Новые математические понятия и свойства: сравнение дробей; свойства сравнения дробей; сравнение смешанных дробей.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Какое из чисел — 1 и $\frac{19}{17}$ — больше другого?

Вариант ответа. По правилу сравнения дробей с равными знаменателями имеем $1 = \frac{17}{17} < \frac{19}{17}$.

5.2. Может ли дробь со знаменателем 5 быть меньше дроби со знаменателем 5^2?

Ответ. Может. Например, $\frac{1}{5}$ и $\frac{6}{5^2}$. Вообще $\frac{n}{5} < \frac{k \cdot n}{5^2}$, если $k > 5$, потому что $\frac{n}{5} = \frac{5n}{5^2} < \frac{kn}{5^2}$.

5.3.** Какой признак сравнения дробей с одинаковыми числителями вы можете предложить?

Вариант ответа. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой меньше знаменатель. Доказательство непосредственно следует из признака сравнения дробей, и мы его опускаем. При обсуждении ответа на данный вопрос следует отметить, что в будущем, когда появятся и отрицательные числа, соответствующее правило сравнения будет значительно сложнее.

5.4. Как расположить числа $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{3}$ и $\frac{4}{6}$ в порядке возрастания?

Варианты ответа. Первый способ. Привести все дроби к общему знаменателю, после этого сравнить числители и расставить дроби в соответствии с возрастанием числителей.

Второй способ. Установить, что $\frac{4}{6} < \frac{5}{7}$, а после этого заметить, что $\frac{5}{7} < \frac{5}{6} < \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

5.5. Как вы можете объяснить, что если a и b являются ненулевыми дробями, то $a + b > b$?

Вариант ответа. Понятно, что $b > 0$, так как отрицательных дробей мы пока не рассматриваем. Прибавив b к обеим частям этого неравенства, получим требуемое объяснение.

5.6. Как объяснить, что если для дробей a, b, c, d справедливы неравенства: $a < b$, $c < d$, то $a + c < b + d$?

Вариант ответа. Из неравенства $a < b$ следует неравенство $a + c < b + c$, а из неравенства $c < d$ следует неравенство $b + c < b + d$. Поэтому $a + c < b + c < b + d$, откуда $a + c < b + d$.

5.7.** Что произойдет с неравенством, если обе его части умножить на число 0?

Ответ. Обе части после умножения станут равными, и между ними невозможно поставить ни знак «больше», ни знак «меньше», а нужно ставить знак равенства.

Указания к решению наиболее трудных задач.

9. Через первую трубу за 3 ч наполняется $\frac{1}{5}$ бассейна, а через вторую за 5 ч наполняется $\frac{1}{4}$ бассейна. Через какую трубу за 1 ч вливается больше воды?

Указание. Для ответа нужно сравнить числа $\frac{1}{4} : 5$ и $\frac{1}{5} : 3$, что сводится к сравнению дробей $\frac{1}{20}$ и $\frac{1}{15}$.

14. Комбайнер убрал урожай с участка за 3 дня. В первый день он убрал урожай с $\frac{5}{18}$ площади участка, во второй — с $\frac{7}{13}$ оставшейся площади, а в третий — с $30\frac{1}{2}$ га. Определите площадь участка. Оцените площадь в гектарах с избытком и недостатком.

Указание. После того как комбайнер убрал $\frac{5}{18}$ площади участка, остается $\frac{13}{18}$ площади участка, а $\frac{7}{13}$ от этого составляет $\frac{13}{18} \cdot \frac{7}{13} = \frac{7}{18}$ площади участка. Так как $\frac{5}{18} + \frac{7}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, то на третий день остается $\frac{1}{3}$ площади участка, что по условию равно $30\frac{1}{2}$ га. Отсюда площадь участка равна $\left(30\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = 91\frac{1}{2}$ (га).

15.** Целая часть числа a больше целой части числа b. Покажите, что тогда $a > b$.

Указание. Если $a = m + r$, $b = n + s$, где m и n — целые числа чисел a и b соответственно, то $s < 1$, а потому $b = n + s < n + 1$. Так как m, n — целые числа и $n < m$, то $n + 1 \leq m$, а $m \leq a$. Отсюда $b < n + 1 \leq m \leq a$, а поэтому $b < a$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных дробей больше $\frac{1}{2}$ и меньше $\frac{2}{3}$?

1) $\frac{10}{21}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{4}{7}$; 4) $\frac{5}{7}$.

Указание. Для сравнения дроби из вариантов с дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ удобно все три приводить к общему знаменателю. Например, для дроби $\frac{5}{7}$ представляем: $\frac{5}{7} = \frac{30}{6 \cdot 7}$, $\frac{1}{2} = \frac{21}{6 \cdot 7}$, $\frac{2}{3} = \frac{28}{6 \cdot 7}$, а тогда все сразу становится понятным.

2.4. Какие из указанных дробей больше 2 и меньше 3?

1) $\frac{11}{6}$; 2) $\frac{23}{12}$; 3) $\frac{31}{14}$; 4) $\frac{53}{18}$.

Указание. В каждом из вариантов достаточно найти целую часть.

Глава 12
ПЛОЩАДЬ

Цель главы — изучить основные свойства площади, ввести формулы для вычисления площади прямоугольника и площади прямоугольного треугольника, выработать у учащихся начальные навыки применения понятия равносоставленности фигур при решении задач на вычисление площадей.

Особенности главы. Глава посвящена важному понятию площади, имеющему большое практическое значение. Приводятся основные свойства площади, вычисляются площади фигур, составленных из квадратиков на клетчатой бумаге, и на основе этого приводится общий способ приближенного вычисления площади фигур достаточно произвольной формы. Затем установленная в частных случаях формула площади прямоугольника обобщается (без обоснования, вводится как аксиома), и из этой формулы получается формула для вычисления площади прямоугольного треугольника через катеты. В результате учащиеся получают возможность решать разнообразные задачи на вычисление площадей фигур, составленных из многоугольных областей.

В конце главы рассматривается понятие равносоставленности, которое расширяет возможности в вычислении площадей. Понятие равносоставленности применяется для ознакомления с теоремой Пифагора.

§ 1. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ

Цель параграфа — ввести понятие площади, рассмотреть примеры на вычисление площадей простейших фигур.

Особенности параграфа. Весь параграф изучается на первом уровне. Точного определения площади не дается, а углубляется и развивается то представление о площади, которое имеется у каждого ученика на бытовом уровне. На простых наглядных примерах объясняются свойства площади и способы ее измерения. Затем формулируются четыре основных свойства площади:

1. Если одна фигура содержится внутри другой, то площадь внутренней фигуры не больше площади внешней.

2. Равные фигуры имеют равные площади.

3. Если какая-нибудь фигура разрезана на несколько частей, то площадь всей фигуры равна сумме площадей составляющих ее частей.

4. Единицей площади считается площадь квадрата со стороной, равной выбранной единице длины.

Эти свойства иллюстрируются примерами и применяются к вычислению площадей фигур, составленных из клеточек на клетчатой бумаге. После этого напоминаются названия основных единиц площади и разъясняется, каким образом крупные единицы площади можно выразить через более мелкие.

На третьем уровне в пункте 1.4. указывается на тот факт, что в задачах о вычислении площади многоугольника всегда имеют в виду площадь многоугольной области. Из перечисленных выше свойств площади вытекает, что площадь отрезка следует считать равной нулю, а поэтому площадь фигуры, составленной из конечного числа отрезков, также равна нулю.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: геометрическая фигура; единицы длины; треугольник; квадрат; прямоугольник; область и ее граница.

Новые математические понятия и свойства: площадь и ее свойства.

Вспомогательные понятия: единицы измерения площадей.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Что больше: площадь пола или площадь потолка в вашей классной комнате?

Вариант ответа. Будем считать, что пол и потолок — это равные прямоугольники. Тогда как равные фигуры они имеют равные площади.

1.2. Какова площадь заштрихованной области на рис. 1?

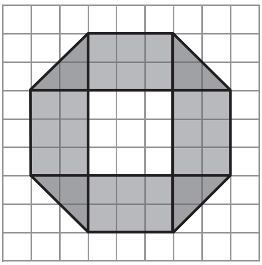


Рис. 1

Ответ. а) Площадь развертки равна $6k^2$; б) если сторона клеточки равна $\frac{1}{2}$ см, то ее площадь равна $\frac{1}{4}$ см^2, поэтому площадь развертки равна $6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ (см^2).

1.3. Чему равен 1 квадратный фут в квадратных дюймах, если известно, что 1 фут равен 12 дюймам?

Ответ. Изобразим квадрат со стороной 1 фут и каждую из его сторон поделим на 12 частей в 1 дюйм. Соединив последовательно противолежащие точки сторон отрезками, мы разделим исходный квадрат на 144 квадрата со стороной в 1 дюйм. Так как площадь каждого малого квадрата равна квадратному дюйму, то один квадратный фут равен 144 квадратным дюймам.

1.4. Чему равна площадь фигуры, которую можно разрезать на два прямоугольника со сторонами 5 см, 6 см и со сторонами 7 см, 8 см соответственно?

Ответ. Площадь первого прямоугольника равна 30 см^2, площадь второго прямоугольника равна 56 см^2. Сложив найденные значения, получаем ответ: 86 см^2.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Почему площадь круга на рис. 2 больше площади квадрата?

Указание. Можно нарисовать квадрат, равный заданному, который целиком лежит в круге.

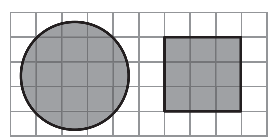


Рис. 2

5.* Почему площади четырехугольников на рис. 3 равны?

Указание. Проведенные пунктиром линии делят четырехугольники на попарно равные части.

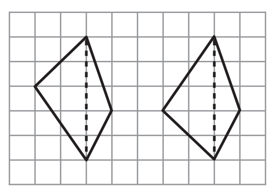


Рис. 3

6.* Приведите пример двух фигур равной площади, которые не равны.

Указание. Например, на клетчатой бумаге из трех клеточек можно составить фигуры равной площади, которые не равны, то есть их копии не удается совместить.

7.* Разрежьте прямоугольник со сторонами 4 см и 9 см на две части, приложив которые друг к другу можно получить квадрат.

Указание. Схема разреза изображена на рис. 4. Из полученных частей легко составить квадрат со стороной 6 см.

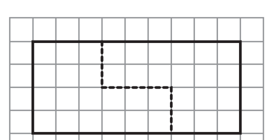


Рис. 4

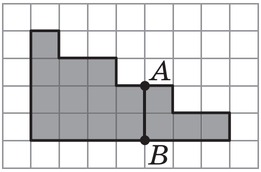


Рис. 5

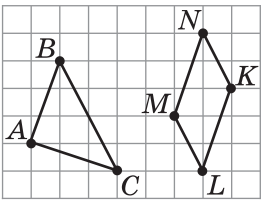


Рис. 6

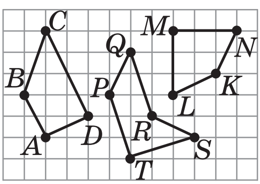


Рис. 7

8.* Разрежьте фигуру, изображенную на рис. 5, на две части и составьте из них квадрат.

Указание. Линию разреза нужно провести по отрезку с концами в точках A и B, отмеченных на рисунке.

16.** Почему на рис. 6 площадь треугольника ABC равна площади четырехугольника $MNKL$?

Указание. В треугольнике вершину A соединить с серединой BC, а в четырехугольнике соединить вершины M и K.

17.** а) Какие два из трех многоугольников на рис. 7 имеют равную площадь? б) Какие многоугольники имеют разную площадь?

Указание. Равную площадь имеют многоугольники $ABCD$ и $PQRST$. Показать это можно, разрезав каждый из многоугольников на две попарно равные части.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из указанных значений площади в квадратных метрах можно записать в виде натурального числа?

1) 2700 дм^2; 2) 360 дм^2; 3) 12 000 см^2; 4) 780 000 см^2.

Указание. Заметить, что 1 м^2 равен 100 дм^2 или 10 000 см^2.

§ 2. ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА

Цель параграфа — рассмотреть формулы для вычисления площади прямоугольника и квадрата.

Особенности параграфа. В параграфе разъясняется, как вычислить площадь изображенного на клетчатой бумаге прямоугольника со сторонами, длина каждой из которых равна целому числу шагов сетки. На основе этих наблюдений формируется общее правило вычисления площади прямоугольника со сторонами любой заданной длины, записываются формулы площади прямоугольника и площади квадрата.

На втором уровне рассматривается важная для практических целей процедура приближенного вычисления площадей достаточно общего вида путем ограничения снизу и сверху фигурами, составленными из квадратов.

На третьем уровне процедура приближенного вычисления площадей применяется к равнобедренному прямоугольному треугольнику и строятся начальные члены двух последовательностей, которые дают приближенные значения площади этого треугольника с избытком и с недостатком с возрастающей точностью.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: прямоугольник; квадрат; свойства площади; приближения площади с избытком и недостатком.

Новые математические понятия и свойства: формула площади прямоугольника; формула площади квадрата.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: процесс последовательных приближений.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Существует ли прямоугольник с площадью 1 см^2, внутри которого можно поместить отрезок длины 1 м?

Ответ. Существует. Прямоугольник со сторонами 2000 мм и $\frac{1}{20}$ мм имеет площадь 100 мм^2 = 1 см^2, а его большая сторона равна 2 м.

2.2. Чему равна площадь в 1 мм^2, выраженная в квадратных метрах?

Ответ. 0,000001 м^2.

2.3.* В пункте для площади S рассматриваемой фигуры получаются неравенства $17k^2 < S < 44k^2$ и $21\frac{1}{4} < S < 35k^2$. *Вопрос.* Какие величины можно считать приближенными значениями площади рассмотренной фигуры?

Вариант ответа. Приближенными значениями с недостатком являются $21\frac{1}{4}k^2$ и все меньшие значения; приближенными значениями с избытком являются $35k^2$ и все бóльшие значения. Любое значение между указанными можно считать приближенным значением площади рассматриваемой фигуры.

2.4.** Почему площадь отрезка можно считать равной нулю?

Ответ. Отрезок можно последовательно заключать в прямоугольники, площади которых становятся все ближе и ближе к нулю. Площадь отрезка должна быть не больше площади каждого из таких прямоугольников, но в то же время площадь не может быть отрицательным числом. Остается единственное число, которое подходит для выражения площади отрезка, — это число 0.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.** Укажите стороны прямоугольника с площадью 1 м^2, внутри которого нельзя поместить квадрат площадью 1 см^2.

Указание. Таких прямоугольников много. Например, прямоугольник со сторонами 5 мм и 200 м, прямоугольник со сторонами 1 мм и 1000 м.

8.* Почему на столе шириной 60 см и длиной 90 см нельзя без наложения разместить 2000 монет, площадь каждой из которых 3 см^2?

Указание. Площадь поверхности стола равна 5400 см^2, а сумма площадей всех монет равна 6000 см^2.

9.* Сколько рулонов обоев длиной 10 м и шириной $\frac{3}{5}$ м потребуется на стену, размеры которой $2\frac{1}{2}$ м $\times$ 4 м?

Указание. Будем предполагать, что на оклейку стены пойдут даже самые маленькие части обоев. Тогда сначала нужно найти площадь одного рулона обоев в квадратных метрах. После этого найти такое натуральное число, чтобы при умножении на это число площади рулона обоев получилось больше, чем площадь стены.

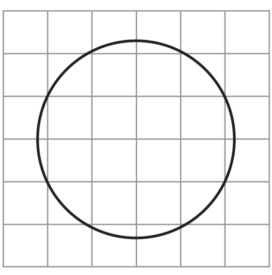


Рис. 1

11.* Найдите значения площади с недостатком и с избытком для круга на рис. 1, принимая длину одного шага сетки за 2 см.

Указание. Это задание практическое и предполагает построение фигур, составленных из квадратов, одни из которых содержатся в круге, а другие содержат круг.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Чему равна площадь квадрата со стороной $7\frac{1}{7}$ см?

1) $49\frac{1}{49}$ см^2; 2) $50\frac{1}{49}$ см^2; 3) $51\frac{1}{49}$ см^2; 4) $52\frac{1}{49}$ см^2.

Указание. Напрашивается вариант 1), но это неверно. Нужно честно выполнить вычисления и получить $\frac{2500}{49} = 51\frac{1}{7}$.

2.3. Какие из указанных значений являются значениями с недостатком для площади квадрата со стороной 12 см?

1) 1 дм^2; 2) 14 дм^2; 3) 15 см^2; 4) 1430 см^2.

Указание. Площадь квадрата равна 144 см^2 и 1,44 дм^2. По определению значения с недостатком подходят варианты 1 и 3.

2.4. Какие из указанных значений являются значениями с избытком для площади прямоугольника со сторонами 45 мм и 5 см?

1) 2000 мм^2; 2) 2500 мм^2; 3) 21 см^2; 4) 22 см^2.

Указание. Площадь прямоугольника равна 2250 мм^2 и 22,5 см^2. По определению значения с избытком подходит только вариант 2.

§ 3. КОРЕНЬ КВАДРАТНЫЙ

Цель параграфа — ознакомление с понятием неотрицательного квадратного корня из неотрицательного числа.

Особенности параграфа. Существование корня никак не может быть обосновано в 5 классе, поэтому, по существу, принимается без доказательства тот факт, что мы можем найти такое число, квадрат которого равен числу, из которого извлекается корень, а также можем найти приближенные значения для этого числа.

На первом уровне знакомство с квадратным корнем производится на основе таблицы квадратов натуральных чисел. Понятие квадратного корня позволяет рассматривать некоторые задачи в следующей формулировке: «Найти сторону квадрата, площадь которого равна заданному значению».

На втором уровне указывается на приближенный характер вычисления $\sqrt{2}$ и в связи с этим примером используется название «иррациональное число».

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: квадрат натурального числа; квадрат; площадь квадрата; примеры таблиц.

Новые математические понятия и свойства: корень квадратный.

Вспомогательные понятия: иррациональное число.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Чему равно значение $\sqrt{\dfrac{1}{144}}$?

Вариант ответа. По таблице $\sqrt{144} = 12$, и $12^2 = 144$. Но тогда $\left(\dfrac{1}{12}\right)^2 = \dfrac{1}{144}$, и $\sqrt{\dfrac{1}{144}} = \dfrac{1}{12}$ по определению квадратного корня.

3.2.* Дробь $\dfrac{41}{29}$ является приближенным значением $\sqrt{2}$ с недостатком или с избытком?

Ответ. Так как $41^2 = 1681 < 2 \cdot 29^2 = 1682$, то дробь $\dfrac{41}{29}$ является приближенным значением с недостатком.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. в)* Найдите значение $\sqrt{196 \cdot 169}$.

Указание. По таблице $\sqrt{196} = 14$, $\sqrt{169} = 13$. Находим квадрат числа и получаем $182^2 = 196 \cdot 169$.

3.* Чему равна длина стороны квадрата, площадь которого составляет 216 см?

Указание. Ответ в этой задаче записывается с помощью иррационального числа.

5.** Найдите такую дробь со знаменателем 7, чтобы квадрат со стороной, равной значению этой дроби в метрах, имел площадь, самую близкую к 2 м^2.

Указание. Дробь со знаменателем 7 можно записать в виде $\dfrac{m}{7}$, где m — натуральное число. В задаче нужно сравнить значения $\left(\dfrac{m}{7}\right)^2$ с числом 2 и выбрать ближайшее. Вместо этого можно сравнивать числа m^2 с $2 \cdot 72 = 98$. Тогда ясно, что 10^2 — ближайший к 98 квадрат натурального числа. Поэтому ответом в задаче является дробь $\dfrac{10}{7}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Дана таблица квадратов некоторых чисел.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	121	144	169	196	225	256	289	324	361

Чему равно приближение с избытком для $\sqrt{3}$ с точностью до $\frac{1}{10}$?

1) $\frac{16}{10}$; 2) $\frac{17}{10}$; 3) $\frac{18}{10}$; 4) $\frac{19}{10}$.

Указание. В таблице нужно выбрать столбец, у которого внизу записано число 324.

1.4.* Дана таблица квадратов некоторых чисел.

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
400	441	484	529	576	625	676	729	784	841

Чему равно приближение с недостатком для $\sqrt{8}$ с точностью до $\frac{1}{10}$?

1) $\frac{25}{10}$; 2) $\frac{26}{10}$; 3) $\frac{27}{10}$; 4) $\frac{28}{10}$.

Указание. В таблице нужно выбрать столбец, у которого внизу записано число 784.

2.4. Какие из указанных чисел меньше $\sqrt{1000}$?

1) 30; 2) 31; 3) 32; 4) 33.

Указание. Квадраты заданных чисел сравнить с числом 1000.

§ 4. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Цель параграфа — довести до сведения учеников формулу площади прямоугольного треугольника, которая значительно расширяет возможности в решении задач на нахождение площадей фигур.

Особенности параграфа. При изучении данного параграфа следует обратить внимание, и в особенности на третьем уровне, что в процессе получения формулы площади треугольника мы опираемся на то, что всякий треугольник имеет площадь. Если этот факт считать известным, то дальнейшие рассуждения оправданы и приводят к верному результату. Таким образом, то, что прямоугольник делится диагональю на два равных прямоугольных треугольника, служит только наводящим соображением для последующего вывода формулы.

Полный вывод потребовал бы знания неизвестных в 5 классе геометрических фактов и даже для старшей школы является непростой задачей.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства площади; площадь прямоугольника.

Новые математические понятия и свойства: площадь прямоугольного треугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Во сколько раз уменьшится площадь прямоугольного треугольника, если каждый из двух его катетов уменьшить в 2 раза?

Ответ. Обозначим длины катетов исходного треугольника a и b. Тогда его площадь $S = \frac{1}{2}ab$. Катеты второго треугольника по условию равны $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. По формуле площадь T второго треугольника равна $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{8}ab = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}ab\right) = \frac{1}{4}S$, то есть в 4 раза меньше площади исходного треугольника.

Указания к решению наиболее трудных задач.

1. Почему равны площади закрашенных частей прямоугольника на рис. 1?

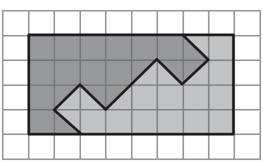


Рис. 1

Указание. Копию одной из частей повернуть на 180° вокруг точки пересечения диагоналей и совместить.

5.* Площадь прямоугольного треугольника равна 4 см^2. Может ли один из катетов этого треугольника равняться 100 см?

Указание. Обозначим через x см длину второго катета. Тогда площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 100$ (см^2). По условию $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 100 = 4$. Из этого уравнения $x = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$.

6.** а) Найдите прямоугольный треугольник, в котором можно разместить квадрат площадью 1 см^2, если площадь треугольника равна: а) 100 см^2, б) 2 см^2.

Указание. В случае *а* нетрудно подобрать много треугольников; в случае *б* подходит только один вариант, когда оба катета треугольника имеют длину по 2 см.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. В каких из указанных случаев площадь прямоугольного треугольника ABC с катетами AB и AC равна 1 см^2?

1) $|AB| = \dfrac{3}{4}$ см, $|AC| = 1\dfrac{1}{3}$ см; 2) $|AB| = \dfrac{4}{5}$ см, $|AC| = 2\dfrac{1}{2}$ см;

3) $|AB| = 1\dfrac{1}{4}$ см, $|AC| = 1\dfrac{3}{5}$ см; 4) $|AB| = 1\dfrac{1}{3}$ см, $|AC| = 1\dfrac{1}{4}$ см.

Указание. В каждом варианте правильно выполнить действия с дробями. Подходят варианты 2 и 3.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Цель параграфа — рассмотреть несколько способов вычисления площадей фигур, составленных из многоугольных областей.

Особенности параграфа. В параграфе разбираются некоторые способы вычисления площадей многоугольных областей, у которых вершины границы находятся в узлах клетчатой бумаги.

На первом уровне рассматривается способ разрезания на прямоугольные треугольники, на втором уровне — способ дополнения до прямоугольника.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства площади; площадь прямоугольника; площадь прямоугольного треугольника.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. В пункте рассматривается задача о вычислении площади нарисованного на клетчатой бумаге четырехугольника с использованием формулы площади прямоугольного треугольника.

Какие свойства площади использовались при решении этой задачи?

Ответ. Помимо формулы для площади прямоугольного треугольника в решении использовалось третье свойство площади: если какая-нибудь фигура разрезана на несколько частей, то площадь всей фигуры равна сумме площадей составляющих ее частей.

5.2.* В пункте рассматривается задача о вычислении площади нарисованного на клетчатой бумаге треугольника способом дополнения треугольника до прямоугольника.

Как использовались свойства площади при решении этой задачи?

Ответ. В приведенном решении третье свойство площади использовалось для того, чтобы составить уравнение, содержащее в качестве неизвестного искомую площадь.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.** Почему площадь любого прямоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги выражается целым числом клеточек?

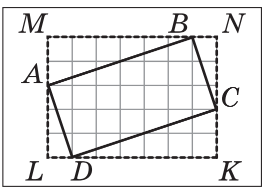


Рис. 1

Указание. Рассмотрим прямоугольник $MNKL$, который образован линиями сетки, проходящими через вершины заданного прямоугольника $ABCD$ (рис. 1). Прямоугольник $MNKL$ составлен из прямоугольника $ABCD$ и четырех треугольников AMB, BNC, CKD, ALD. В каждой из двух пар прямоугольных треугольников AMB и CKD, BNC и ALD равны их катеты ($AM = CK$, $MB = DK$ и $LD = BN$, $LA = CN$), поэтому $\Delta AMB = \Delta CKD$, $\Delta BNC = \Delta ALD$. Следовательно, $S_{MNKL} = S_{ABCD} + 2 \cdot S_{\Delta AMB} + 2 \cdot S_{\Delta BNC}$,

$$S_{ABCD} = S_{MNKL} - 2S_{\Delta AMB} - 2S_{\Delta BNC} =$$

$$= MN \cdot NK - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MB - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BN \cdot NC =$$

$$= MN \cdot NK - AM \cdot MB - BN \cdot NC.$$

Так как длины отрезков MN, NK, AM, MB, BN, NC выражаются целыми числами шагов сетки, то площадь прямоугольника $ABCD$ выражается целым числом клеточек.

3.** Почему площадь любого треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги выражается или целым числом клеточек, или дробным числом со знаменателем 2?

Указание. Рассмотрите прямоугольник, который образован линиями сетки, проходящими через вершины треугольника. Далее следует читать указания к решению предыдущей задачи.

4. а) Найдите площади четырехконечных звезд на рис. 2. б)** При каком способе подсчета ответ получится достаточно быстро?

Указание. Каждую из звезд можно разрезать на 8 равных частей.

6.** Нарисуйте треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги, у которого есть сторона больше 20 шагов сетки, а площадь меньше $1k^2$.

Указание. Рассмотреть две соседние горизонтальные линии сетки. На одной из них выбрать две вершины треугольника на расстоянии в 1 шаг сетки, а третью вершину выбирать на второй линии сетки достаточно далеко от первых двух.

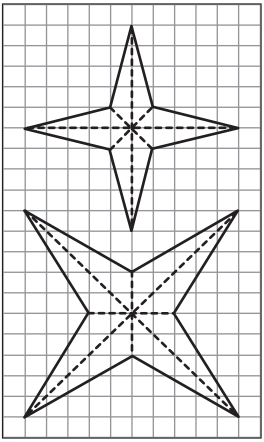


Рис. 2

Площадь такого треугольника равна $\frac{1}{2}$, а стороны, выходящие из третьей вершины, могут иметь как угодно большую длину.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Чему равно значение площади изображенной на рис. 3 фигуры, если считать, что площадь одной клеточки равна 4 см^2?

1) 68 см^2; 2) 72 см^2;

3) 76 см^2; 4) 80 см^2.

Указание. Разбить на две равные половинки, а затем одну из половинок разбить на треугольник и четырехугольник, а вычисление площади четырехугольника свести к вычислению разности площадей двух треугольников.

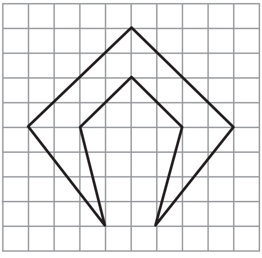


Рис. 3

2.4. Квадрат со стороной 8 см разделили на две части, причем площадь одной из них в два раза больше площади другой. Какие значения из приведенных могут иметь площади этих частей?

1) $21\frac{1}{3}$ см^2; 2) $22\frac{1}{3}$см^2; 3) $42\frac{2}{3}$ см^2; 4) $43\frac{2}{3}$ см^2.

Указание. Нужно найти $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ от 64.

§ 6. РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

Цель — рассмотреть понятие равносоставленности фигур, с помощью понятия равносоставленности фигур проиллюстрировать теорему Пифагора.

Особенности параграфа. В параграфе рассматривается важное понятие равносоставленности плоских фигур, которое позволяет делать вывод о равенстве площадей некоторых фигур. Понятие равносоставленности применяется для вывода теоремы Пифагора в двух частных случаях: рассматриваются равнобедренный прямоугольный треугольник и так называемый «египетский» треугольник со сторонами 3, 4, 5.

После этого теорема Пифагора формулируется в общем виде.

На втором уровне приводится пример разрезания квадрата на части и последующей перестановки этих частей так, что создается иллюзия увеличения площади.

На третьем уровне рассматривается пример на построение квадрата, площадь которого выражается числом 20 и соответственно его сторона — числом $\sqrt{20}$.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными свойства площади.

Новые математические понятия и свойства: равносоставленность; площадь равносоставленных фигур; теорема Пифагора.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

6.1. Чему равна площадь параллелограмма на рис. 1?

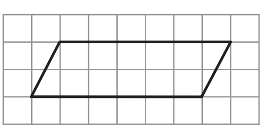


Рис. 1

Ответ. Отрежем от параллелограмма слева «уголок» в форме прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 шага сетки и приставим этот уголок справа. В результате получим прямоугольник со сторонами 2 и 6 шагов сетки. Следовательно, площадь параллелограмма равна $12k^2$.

6.2. Чему равна диагональ квадрата со стороной $\sqrt{2}$ см?

Вариант ответа. Обозначим квадрат $ABCD$. Стороны AB, BC квадрата и диагональ AC образуют прямоугольный треугольник с равными катетами. Поэтому по теореме Пифагора $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. Так как $|AB| = |BC| = \sqrt{2}$, то $|AB|^2 = |BC|^2 =$

$= (\sqrt{2})^2 = 2$, откуда $|AC|^2 = 2 + 2 = 4 = 2^2$ и $|AC| = 2$ см.

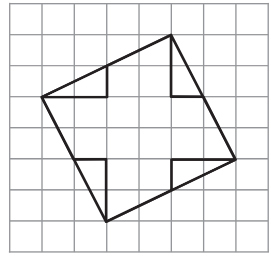


Рис. 2

6.3.** Как обосновать теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами 1 см и 2 см?

Ответ. Сторона квадрата, изображенного на рис. 2, является гипотенузой прямоугольного треугольника со сторонами в 2 клетки и в 4 клетки. Обычная клеточка в школьной тетради имеет размер $\frac{1}{2}$ см.

$$C^2 = 20k^2 = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5.$$

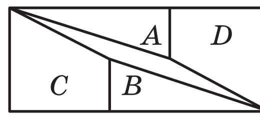


Рис. 3

Площадь квадрата равна 5 см^2.

$$1^2 + 2^2 = 5.$$

Сторона квадрата равна $\sqrt{5}$ см.

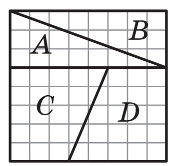


Рис. 4

6.4.* Почему узенькая полоска, условно изображенная на рис. 3, имеет площадь в одну клеточку?

Ответ. Совместная площадь фигур A, B, C, D на рис. 4 равна 64 клеточкам. Если эти фигуры сложим как на рис. 3, то площадь прямоугольника равна 65 клеточкам и складывается из суммы площадей фигур A, B, C, D, равной 64 клеточкам, и площади узенькой полоски. Следовательно, площадь узенькой полоски равна площади одной клеточки.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2. Как получить отрезок, длина которого равна:

а) $\sqrt{200}$ см; б)* $\sqrt{5}$ см; в)** $\sqrt{13}$ см?

Указание. а) Этот отрезок в 10 раз длиннее диагонали квадрата со стороной 1 см; б)* этот отрезок равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 1 см и 2 см (равен диагонали прямоугольника со сторонами 1 см и 2 см); в)** этот отрезок равен гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 2 см и 3 см (равен диагонали прямоугольника со сторонами 2 см и 3 см).

3. На рис. 5, 6 и 7 разрежьте левую из фигур на части и сложите правую фигуру.

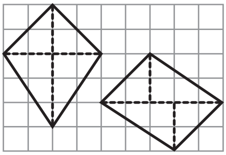


Рис. 5

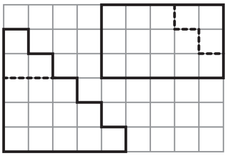


Рис. 6

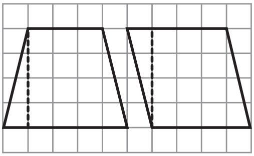


Рис. 7

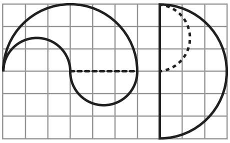


Рис. 8

Указание. Линии разреза проведены пунктиром.

5. Как разрезать левую фигуру на рис. 8 на части, из которых можно сложить правую фигуру?

Указание. Линии разреза проведены пунктиром.

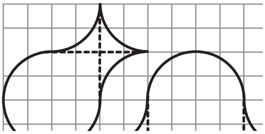


Рис. 9

6. Как разрезать левую и правую фигуры на рис. 9, чтобы из полученных частей можно было сложить два равных квадрата?

Указание. Часть нужных разрезов указана на рисунке 9.

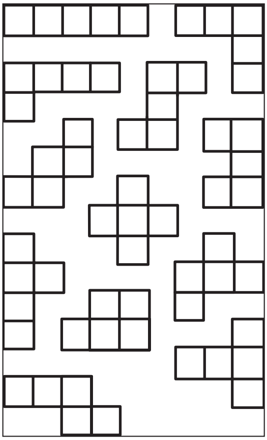


Рис.10

7.* На рис. 10 изображены 12 фигур пентамино из 5 клеточек каждая. Какие прямоугольники можно пытаться складывать из всех фигур пентамино?

Указание. Общая площадь всех фигур пентамино составляет 60 клеточек. Пусть длины сторон прямоугольника равны a и b сторон сетки. Числа a и b целые, $a \cdot b = 60$. Отсюда вытекает, что 60 делится на a и на b, и, считая, что $a \le b$, получаем следующие возможные размеры прямоугольника: 1×60, 2×30, 3×20, 4×15, 5×12, 6×10. Но ни одна сторона прямоугольника не может быть меньше 3, иначе некоторые из фигур пентамино нельзя будет в нем разместить и прямоугольники 1×60 и 2×30

можно не пытаться складывать. Поэтому можно пытаться складывать прямоугольники, размеры которых 3×20, 4×15, 5×12, 6×10.

8.** Почему прямоугольники $ABCD$ со сторонами $|AB| = 1$ мм, $|BC| = 1$ м и $MNKL$ со сторонами $|MN| = 2$ см $|NK| = 5$ см равносоставлены?

Указание. Если разрезать прямоугольник $MNKL$ на 20 узких полосок длиной 5 см и шириной 1 мм, то, прикладывая их друг к другу последовательно меньшими сторонами, мы получаем длинный прямоугольник $ABCD$.

9.** Разрежьте квадрат на 20 равных треугольников и сложите из них 5 равных маленьких квадратов.

Указание. Решение, по сути, содержится в пункте 6.3 этого параграфа. Фигура, изображенная на рис. 10 учебника, состоит из 5 квадратов, каждый из которых можно разрезать на 4 равных треугольника с катетами длиной 1 кл. и 2 кл. На рис. 12 учебника изображен квадрат, который легко разрезать на 20 таких же треугольников.

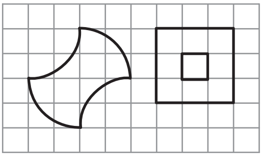


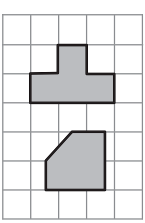
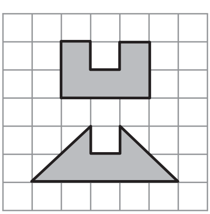
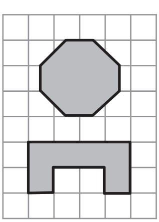
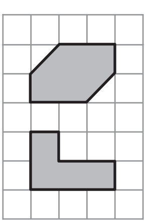
Рис. 11

12.** Покажите, что фигуры на рис. 11 равносоставлены.

Указание. Из левой фигуры сначала составить прямоугольник размером 2×4, затем разрезать его на 8 квадратиков.

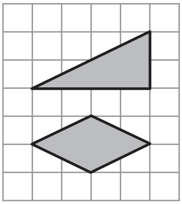
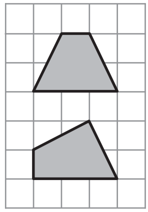
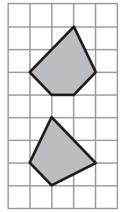
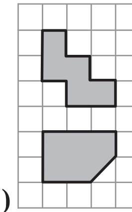
Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.1. На каких рисунках изображены две фигуры разной площади?

1)  ; 2)  ; 3)  ; 4)  .

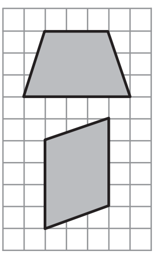
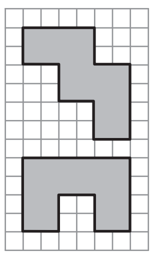
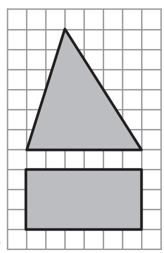
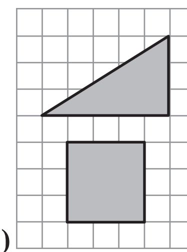
Указание. 1) Площадь верхней 4, а у нижней меньше; 2) площади равны; 3) площадь верхней 7, а нижней 6; 4) площадь верхней 5, а нижней 4.

2.2. На каких рисунках изображены две фигуры равной площади?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

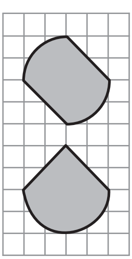
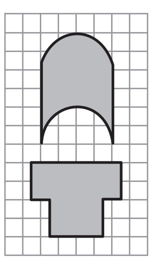
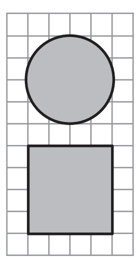
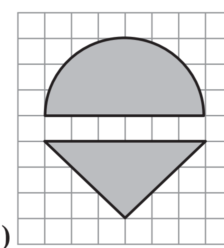
Указание. 1) Площадь верхней 4 и нижней 4; 2) площадь верхней 5, а нижней 4; 3) площадь верхней 5, а нижней больше; 4) площадь верхней 5, а нижней больше.

2.3. На каких рисунках две изображенные фигуры равносоставлены?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

Указание. Сначала сравнить площади, а затем искать способы разрезаний.

2.4. На каких рисунках две изображенные фигуры не равносоставлены?

1) ; 2) ; 3) ; 4) .

Указание. а) В каждой из фигур сначала выделить квадрат; б) из верхней фигуры можно сделать квадрат, а затем сравнить площади; в) верхнюю фигуру можно целиком поместить внутрь нижней; г) нижнюю фигуру можно целиком поместить внутрь верхней.

Глава 13
ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Цель главы — ознакомить учащихся с конечными десятичными дробями, выработать навыки сложения, вычитания, умножения десятичных дробей и деления десятичной дроби на натуральное число.

Особенности главы. В главе рассматривается новый вид записи некоторых дробных чисел, которые называются десятичными дробями, и рассматриваются правила арифметических действий с десятичными дробями и сравнения по величине. При изучении этого материала следует обратить внимание на то, что эти правила аналогичны соответствующим правилам действий с натуральными числами и их сравнения.

§ 1. ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ. ЧТЕНИЕ И ЗАПИСЬ

Цель параграфа — ввести понятие десятичной дроби, дробных разрядных единиц, рассмотреть изображение десятичных дробей на числовой оси.

Особенности параграфа. В параграфе определяется десятичная дробь как дробь, знаменатель которой равен степени числа 10, вводятся записи десятичной дроби при помощи запятой или точки, определяются десятичные разряды, целая и дробная части десятичной дроби, указывается на связь между десятичными дробями и десятичной метрической системой единиц, рассматривается изображение десятичных дробей на числовой прямой. Можно сказать, что впервые десятичные дроби возникли в Древнем Китае, где довольно давно использовалась своя десятичная система мер. Полезно уяснить, что, выбрав достаточно мелкую единицу в качестве масштаба, можно добиться выражения значения величины целым числом. Переход от одной единицы измерения к другой приводит к передвижению десятичной запятой. Можно привести примеры выражения одной и той же величины через разные единицы и проследить, как при этом происходит переход запятой.

На первом уровне следует хорошо разобраться с тем, что десятичная дробь — это обычная дробь со знаменателем в виде степени 10. Запись в строку с помощью запятой — это другая запись, часто более удобная. Нужно освоить названия десятичных разрядных единиц, определения целой и дробной части, уметь переводить одну запись десятичной дроби в другую. Полезно привести табличку вроде нижеследующей, где для примера указаны разряды десятичной дроби 7362,2547.

Целая часть						Дробная часть				
...	7	3	6	2	,	2	5	4	7	...
	тысячи	сотни	десятки	единицы		десятые	сотые	тысячные	десятитысячные	

Пункт 1.4, в котором указано, что в десятичной записи дроби отбрасывание нулей, стоящих в конце записи, и приписывание к концу записи нулей не изменяет величины дроби, в основном рассчитан на второй и третий уровень, поэтому приводится обоснование этого правила со ссылкой на правило сокращения обыкновенной дроби.

Пункт 1.6 позволяет выработать наглядные представления о десятичной дроби. Решение задач поможет уяснить тот факт, что изобразить можно только часть числовой прямой; а чтобы изобразить десятичную дробь с большим количеством десятичных знаков, нужно брать очень крупную единицу. Это позволяет на втором и третьем уровне обратить внимание учащихся на тот факт, что числовая прямая — не конкретная шкала, а идеальный, абстрактный объект.

Пункт 1.7** предназначен для изучения на третьем уровне. На наглядном уровне показывается, что с ростом n дроби $\frac{1}{10^n}$ стремятся к 0.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: понятие обыкновенной дроби; метрические десятичные системы единиц; числовая прямая.

Новые математические понятия и свойства: десятичная дробь; десятичные знаки; десятичные разряды.

Вспомогательные понятия: линейка и ее шкала.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как прочитать дробь 101,010101?

Ответ. Сто одна целая десять тысяч сто одна миллионная.

1.2. Как записать разрядную единицу «одна миллионная»?

Ответ. Известно, что 1 миллион $= 10^6$. Поэтому у дроби одна миллионная — шесть знаков после запятой, ее запись: 0,000001.

1.3. Сколько десятичных знаков после запятой может иметь правильная дробь со знаменателем 10^{20}?

Ответ. Не больше 20 знаков после запятой, если считать, что крайний справа знак ненулевой. Может быть и в точности 20 знаков, а может быть и меньше. Например, $\frac{10^{19}}{10^{20}} = 0{,}1$.

1.4. Почему дробь с шестью десятичными знаками может равняться дроби с двадцатью десятичными знаками?

Ответ. Потому, что приписывание и отбрасывание нулей в конце записи десятичной дроби никак не влияет на ее значение. Например, $0{,}12345600000000000000 = 0{,}123456$.

1.5. Как выразить в виде десятичной дроби часть, которую составляет 1 кг от 10 тонн?

Ответ. 1 кг $= 0{,}0001 \cdot 10$ т.

1.6. Какую длину должен иметь единичный отрезок числовой прямой, чтобы изображения дробей 0,333 и 0,334 различались на 1 мм?

Ответ. Если считать, что мы можем различать точки, отстоящие друг от друга на расстоянии в 1 мм, то в качестве единичного отразка нужно принять отрезок длиной 1 м, так как 0,334 и 0,333 отличаются на $0{,}001 = \frac{1}{1000}$.

1.7.** Какая десятичная разрядная единица меньше дроби $\frac{1}{2^8}$?

Сравним число $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$ с десятичными разрядными единицами 0,1; 0,01; 0,001 и т.д. В результате увидим, что 0,001 и все меньшие десятичные разрядные единицы будут меньше заданного числа.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5. Запишите числа в виде десятичных дробей: в) 184 целых 13 тысячных; г) 7 десятитысячных.

Указание. При решении подобных задач нужно быть внимательным и правильно определить положение крайней справа ненулевой цифры. Поэтому в пункте *в* крайняя справа цифра 3 стоит на третьем месте после запятой; в пункте *г* крайняя справа цифра 7 — на четвертом месте после запятой.

8. Запишите десятичные дроби в строку, предварительно произведя сокращение: б) $\frac{999}{30}$; д) $\frac{126}{300}$.

Указание. Одним из важных действий при решении этих задач является сокращение, в данном случае сокращение на 3.

Указание по работе с наиболее трудными тестами.

1.2. Какова десятичная запись дроби $\frac{21}{10\,000}$?

1) 0,21; 2) 0,021; 3) 0,0021; 4) 0,00021.

Указание. Крайняя справа цифра 1 должна стоять на четвертом месте после запятой.

1.3. Какова десятичная запись числа $5\frac{701}{10\,000}$?

1) 5,71; 2) 5,701; 3) 5,0701; 4) 5,00701.

Указание. Крайняя справа цифра 1 должна стоять на четвертом месте после запятой.

§ 2. ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Цель параграфа — установить правила сравнения десятичных дробей и сравнения дробного числа с его десятичными приближениями.

Особенности параграфа. По аналогии с записью натуральных чисел или ассоциациями с записью величины в метрической системе мер вводится правило сравнения десятичных дробей. Полезно на примерах объяснить, что большая десятичная дробь располагается на числовой прямой правее меньшей десятичной дроби. Для этого разумно перейти к новой масштабной единице, равной 10^{-n} прежней (n — число знаков после запятой), и воспользоваться известным фактом о расположении натуральных чисел на числовой прямой.

На втором, в особенности на третьем уровне следует обратить внимание на получение десятичных приближений для обыкновенных дробей. На данном этапе достаточно ограничиться относительно простыми примерами, в которых десятичные приближения находятся путем непосредственного сравнения заданной дроби с десятичными, потому что общий алгоритм представления дробных чисел через десятичные рассматривается позже.

Принципиальный характер имеет замечание, что приближенные значения указываются с точностью до единицы последнего разряда.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: сравнение натуральных чисел; сравнение обыкновенных дробей.

Новые математические понятия и свойства: сравнение десятичных дробей; десятичные приближения с недостатком и с избытком; точность десятичного приближения.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какое из чисел — 0,00016382 и 0,0001629 — больше?

Ответ. Целые части у этих чисел одинаковы и равны 0. Цифры десятичных разрядов от первого до пятого одинаковы. Цифра миллионных у первой дроби равна 3 и больше цифры миллионных второй дроби, которая равна 2. Следовательно, первое число больше второго.

2.2. Являются ли числа 0,111 и 0,112 десятичными приближениями с недостатком и с избытком для дроби $\frac{1}{9}$?

Ответ. По правилу сравнения обыкновенных дробей сравним дроби $\frac{111}{1000}$ и $\frac{112}{1000}$ с дробью $\frac{1}{9}$. Так как $111 \cdot 9 - 1000 \cdot 1 < 0$, то $\frac{111}{1000} < \frac{1}{9}$, а так как $112 \cdot 9 - 1000 \cdot 1 > 0$, то $\frac{112}{1000} > \frac{1}{9}$.Следовательно, число 0,111 является значением дроби $\frac{1}{9}$ с недостатком, а число 0,112 — значение дроби $\frac{1}{9}$ с избытком. А так как разность 0,112 — 0,111 равна 0,001, то это десятичные приближения.

2.3. Известно, что приближенное значение числа π с недостатком с точностью до 0,01 равно 3,14. Чему равно приближенное значение числа π с избытком с точностью до 0,01?

Ответ. Десятичное приближение числа с избытком с точностью до 0,01 на 0,01 больше соответствующего десятичного приближения с недостатком, в данном случае получаем 3,15.

2.4.* Чем отличаются приближенные равенства $a \approx 2{,}310$ с недостатком и $a \approx 2{,}3100$?

Вариант ответа. Эти приближения имеют различную точность, первое — с точностью до одной тысячной (0,001), второе — с точностью до одной десятитысячной (0,0001).

Можно еще добавить, что для первого приближения выполняются соотношения:

$$\text{либо } 2{,}310 = a < 2{,}311, \text{ либо } 2{,}310 < a < 2{,}311.$$

Для второго приближения выполняются соотношения:

$$\text{либо } 2{,}3100 = a < 2{,}3101, \text{ либо } 2{,}3100 < a < 2{,}3101.$$

Важно, что количество десятичных знаков приближения выражает точность приближения, и в этом случае отбрасывание и приписывание нулей в конце записи десятичного приближения изменяет точность приближения.

2.5.* Какие числа являются десятичными приближениями для числа 3,14 снизу и сверху с точностью до 0,0001?

Ответ. 3,1400 и 3,1401.

Указания к решению наиболее трудных задач.

7.** б) Укажите несколько чисел, расположенных между числами: 7,301 и 7,301006.

Указание. Пример одного из таких чисел: 7,30100297165.

8. Укажите все числа x с шестью десятичными знаками после запятой, для которых выполняются неравенства $1{,}41421 < x < 1{,}41422$.

Указание. Эти числа имеют в записи по шесть знаков после запятой, наименьшее из чисел — это число 1,414211, наибольшее — число 1,414219.

14.* Известно, что числа 3; 2,3; 2,24; 2,237; 2,2361; 2,23607; 2,236069 являются десятичными приближениями с избытком для некоторого числа, имеющего 7 десятичных знаков после запятой. Найдите хотя бы одно такое число.

Например, 2,2360673.

21.* Приближенное значение с недостатком старинной русской меры длины сажень (ударение можно ставить и на первом, и на втором слоге) равно 2,1336 м. а) Чему равно значение сажени с точностью до 1 мм? б) Чему равно значение сажени с точностью до 1 см?

Указание. 1 см = 0,01 м; 1 мм = 0,001 м. Поэтому одна сажень — это ≈ 2134 мм ≈ 213 см.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.4. Какие из приведенных неравенств являются верными?

1) $\frac{4}{9} < 0{,}48$; 2) $\frac{3}{11} > 0{,}24$; 3) $\frac{2}{17} > 0{,}12$; 4) $\frac{7}{23} > 0{,}28$.

Указание. В каждом варианте числа лучше сравнивать по общему правилу сравнения дробей. Например, в варианте 2 записываем дроби как $\frac{3}{11}$ и $\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$, вычисляем: $3 \cdot 25 = 75$, $11 \cdot 6 = 66$, и так как $75 > 66$, то $\frac{3}{11} > 0{,}24$.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Цель параграфа — выработать у учащихся навыки сложения и вычитания десятичных дробей; на третьем уровне рассмотреть дополнение десятичной дроби до разрядной единицы и вычитание дробей с использованием дополнения.

Особенности параграфа. Главной особенностью параграфа является подчеркивание аналогий между сложением и вычитанием десятичных дробей и сложением и вычитанием натуральных чисел. Поэтому повторение правил сложения и вычитания натуральных чисел исключительно важно для осознанного восприятия данного параграфа.

На первом и втором уровне основное внимание следует уделить правилам сложения и вычитания десятичных дробей.

Пункты 3.4** и 3.5** предназначены для изучения сильными учащимися. Показано, как с помощью дополнения до разрядной единицы вычитание можно заменить на сложение, что на практике иногда оказывается удобнее, чем непосредственно вычислять разность.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: сложение и вычитание натуральных чисел; сложение и вычитание обыкновенных дробей.

Новые математические понятия и свойства: сложение и вычитание десятичных дробей; правила сложения и вычитания десятичных дробей.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Чему равна сумма чисел 53,68 и 12,9?

Ответ. 66,58. Эти числа равны дробям $\frac{5368}{100}$ и $\frac{129}{10}$. Домножая числитель и знаменатель второй дроби на 10, приведем обе дроби к общему знаменателю: $\frac{5368}{100}$ и $\frac{1290}{1000}$.

Сложим их: $\frac{5368}{100} + \frac{1290}{100} = \frac{6658}{100} = 66{,}58$. В результате ответ получен.

3.2. По какому общему правилу складывают десятичные дроби?

Ответ. Числа записывают в столбик так, чтобы десятичные запятые стояли строго одна под другой; складывают полученные записи как натуральные числа, не обращая внимания на запятые (мысленно эти записи можно дополнить справа нулями, чтобы уравнять положение стоящих справа цифр); в полученной сумме ставят запятую в том же столбце, где она стояла у каждого из слагаемых.

3.3. По какому общему правилу вычитают дроби?

Ответ. Уменьшаемое сверху и вычитаемое снизу записывают в столбик так, чтобы десятичные запятые стояли строго одна под другой; дополняют полученные записи нулями справа, чтобы уравнять положение стоящих справа цифр; вычитают полученные записи как натуральные числа, не обращая внимания на запятые; в полученной разности ставят запятую в том же столбце, где она стояла у вычитаемого.

Следует добиться полной ясности в понимании того, что правила сложения и вычитания десятичных дробей являются, по существу, правилами сложения и вычитания обыкновенных дробей с равными знаменателями в виде степени числа 10.

Важно также отметить, что если десятичные дроби имеют разное количество десятичных знаков, то вначале лучше приучить школьников уравнивать количество десятичных знаков, приписывая нужное количество нулей справа. Довольно быстро они поймут, что из экономии записи нули можно не писать.

3.4.** Чему равно дополнение числа 0,000001 до 0,001?

Ответ. 0,000999.

3.5.** В пункте рассматриваются следующие преобразования: $42{,}56 - 0{,}1825 = 42{,}56 - 1 + 1 - 0{,}1825 = (42{,}56 - 1) + (1 - 0{,}1825) = 41{,}56 + 0{,}8175 = 42{,}3775$. *Вопрос.* Какие правила сложения и вычитания позволяют обосновать приведенные преобразования?

Ответ. Свойство нуля; ассоциативность сложения.

Указания к решению наиболее трудных задач.

3. Вычислите наиболее удобным способом, группируя слагаемые:

а) $6{,}54 + 3{,}19 + 1{,}46 + 6{,}81$;

б) $7{,}2 + 97{,}11 + 2{,}88 + 1{,}8$;

в) $2{,}522 + 0{,}371 + 4{,}008 + 0{,}33$.

Указание. а) $6{,}54 + 3{,}19 + 1{,}46 + 6{,}81 = (6{,}54 + 1{,}46) + (3{,}19 + 6{,}81) = 8 + 10 = 18$;

б) $7{,}2 + 97{,}11 + 2{,}88 + 1{,}8 = (7{,}2 + 1{,}8) + (97{,}11 + 2{,}88) = 9 + 99{,}99 = 108{,}99$;

в) $2{,}522 + 0{,}371 + 4{,}008 + 0{,}33 = (2{,}522 + 4{,}008) + 0{,}33 + 0{,}371 = (6{,}53 + 0{,}33) + 0{,}371 = 6{,}86 + 0{,}371 = 7{,}231$.

5.* Поставьте вместо звездочек нужные цифры:

а) $*3{,}7*1 + *{,}52* = 32{,}261$; б) $5{,}*36 + 2*{,}66* = *2{,}9*0$.

Указание. а) Сначала можно найти цифру 0 тысячных во втором слагаемом; затем находится цифра 4 сотых в первом слагаемом; цифры десятых известны все, причем при сложении $7 + 5$ получается 12, то есть в сумме 1 переносится в разряд единиц; с учетом этого находится цифра 8 единиц у второго слагаемого; после этого находится цифра 2 десятков у первого слагаемого.

б) Решается аналогично.

18.* Поставьте вместо звездочек нужные цифры:

а) $7*{,}0*6 - 4{,}09* = *3{,}*58$;

б) $1{,}*48*52 - 1{,}267**9 = *{,}4*092*$.

Указание. Эти примеры можно записать в виде задач с суммами и решать аналогично решению задачи 5*.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных сумм больше 3?

1) $1{,}43 + 1{,}59$; 2) $0{,}17 + 2{,}74$;

3) $0{,}692 + 2{,}375$; 4) $1{,}953 + 1{,}859$.

Указание. При сложении десятичных приближений слагаемых сравнить суммы с числом 3 можно в большинстве вариантов.

2.4. Какие из приведенных разностей меньше 0,02?

1) $\frac{1}{2} - 0{,}45$;   2) $0{,}45 - \frac{3}{7}$;   3) $\frac{5}{9} - 0{,}45$;   4) $0{,}45 - \frac{5}{14}$.

Указание. Работа упрощается, если в варианте 1 сравнить $\frac{1}{2}$ и 0,47, в варианте 2 сравнить 0,43 и $\frac{3}{7}$, в варианте 3 сравнить $\frac{5}{9}$ и 0,47, в варианте 4 сравнить 0,43 и $\frac{5}{14}$.

§ 4. УМНОЖЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Цель параграфа — выработка навыков умножения десятичных дробей.

Особенности параграфа. Как в случае со сложением и вычитанием десятичных дробей, в параграфе подчеркивается аналогия между умножением десятичных дробей и умножением натуральных чисел. Поэтому основное внимание следует уделить правилу определения количества десятичных знаков в произведении.

На втором и третьем уровне рассматривается приложение умножения к решению практических задач. В частности, рассматривается нахождение приближенного значения стороны квадрата, имеющего заданную площадь.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: умножение натуральных чисел; умножение обыкновенных дробей.

Новые математические понятия и свойства: умножение десятичных дробей: правила умножения; свойства умножения десятичных дробей.

Вспомогательные понятия: приближенное вычисление квадратного корня из числа; приближенность результатов вычислений с помощью калькулятора.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

4.1. Как записать обыкновенную дробь $\frac{44}{125}$ в виде десятичной?

Ответ. $\frac{44}{125} = \frac{44 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{352}{1000} = 0{,}352$.

4.2. Почему приписывание нуля в конце дробной части справа у одного из сомножителей не влияет на результат умножения?

Вариант ответа. Приписывание нуля в конце записи десятичной дроби означает, что в соответствующей обыкновенной дроби мы числитель увеличиваем в 10 раз, и знаменатель увеличивается в 10 раз. Но от этого значение дроби не изменится, а поэтому и в произведении изменения не будет.

4.3. Как умножить десятичную дробь на 1000?

Вариант ответа. Три раза подряд умножить на 10. При этом запятая смещается вправо на 3 разряда. Если знаков после запятой меньше трех, то добавим справа нули, чтобы после запятой оказалось три десятичных знака, и перенесем запятую на 3 разряда вправо, например: $3{,}14 \cdot 1000 = 31{,}40 \cdot 100 = 3140$.

4.4. Почему $4{,}31 \cdot 0{,}512 = 0{,}431 \cdot 5{,}12$?

Ответ. Произведение не изменится, если один множитель умножить на 0,1 и одновременно другой множитель умножить на 10, поскольку $0{,}1 \cdot 10 = 1$.

4.5.* Какую сторону может иметь квадрат, площадь которого с точностью до одной сотки равна 50 га?

Вариант ответа. Гектар — мера площади, равная площади квадрата со стороной в 100 м, сотка — сотая часть гектара. Для ответа на вопрос нужно найти сторону квадрата, площадь которого приближенно равна 50 га с точностью до 0,01 га. В тексте пункта имеются равенства $(7{,}07)^2 = 49{,}9849$ и $(7{,}08)^2 = 50{,}1264$. Так как получающиеся квадраты чисел отличаются от числа 50 более чем на 0,01 (соответственно с недостатком и с избытком), то чисел 7,07 и 7,08 недостаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос. Приходится дальше подбирать десятичные знаки для числа, квадрат которого является лучшим десятичным приближением числа 50. Поэтому вычисляем: $(7{,}071)^2 = 49{,}999041$; $(7{,}072)^2 = 50{,}006114$. Этого достаточно, чтобы сказать, что квадрат со стороной 707,1 м имеет площадь 50 га с недостатком с точностью до 0,01 га, а квадрат со стороной 707,2 м имеет площадь 50 га с избытком с точностью до 0,01 га.

4.6.* Квадрат какого наибольшего натурального числа можно точно вычислить на таком калькуляторе?

Ответ. На экране калькулятора помещается 6 знаков. Число $10^6 = 1\,000\,000$ имеет 7 знаков и равно квадрату числа 1000. Квадрат числа 999 имеет не более шести знаков. Ответ: квадрат числа 999, то есть 998 001.

Указания к решению наиболее трудных задач.

13. В 1 л морской воды содержится в среднем 0,00001 мг золота. Сколько золота содержится в 1 км^3 морской воды?

Указание. Для решения нужно знать, что 1 км^3 = 10^{12} дм^3, то есть 10^{12} л, и 1 мг = 0,001 г, и золота в 1 л — 0,00000001 г. Тогда золота в 1 км^3 будет $10^{12} \cdot 0{,}00000001 = 10^4$ г = 10 кг.

20.** Восстановите отмеченные звездочками цифры:

а) $\boxed{\begin{array}{r} **{,}5 \\ \times\ *{,}41 \\ \hline 3** \\ +\ *2** \\ \hline 1*{,}*1* \end{array}}$; б) $\boxed{\begin{array}{r} **{,}* \\ \times\ 2{,}*7 \\ \hline **** \\ +\ *** \\ \hline **{,}835 \end{array}}$.

Указание. а) Второй множитель равен 0,41; б) второй множитель 2,07.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3.* Чему равно произведение $7{,}2^2 - 2{,}8^2$?

1) 44; 2) 43,6; 3) 44,8; 4) 44,34.

Указание. Решение упрощается, если вспомнить формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, которая встречалась при изучении умножения натуральных чисел.

2.1. Какие из указанных произведений равны 1,68?

1) $1{,}2 \cdot 1{,}4$; 2) $0{,}9 \cdot 1{,}6$; 3) $0{,}8 \cdot 2{,}1$; 4) $2{,}8 \cdot 0{,}6$.

Указание. Так как $168 = 8 \cdot 3 \cdot 7$, то $168 = 12 \cdot 14 = 8 \cdot 21 = 28 \cdot 6$, после чего нетрудно выбрать нужные варианты.

§ 5. ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Цель параграфа — рассмотреть деление десятичной дроби на натуральное число по алгоритму, который аналогичен алгоритму деления «столбиком» одного натурального числа на другое.

Особенности параграфа. На первом уровне следует обратить внимание на то, что деление десятичной дроби на натуральное число можно всегда выполнять по правилу деления дробных чисел. Рассматриваемую в параграфе схему деления «уголком» можно считать одним из удобных способов представления результата деления в виде десятичной дроби, и если при изучении схемы деления «уголком» на первом уровне возникают затруднения, то можно вернуться к обычному способу деления дроби на дробь.

На втором и третьем уровне схема деления «уголком» десятичной дроби на натуральное число является главным объектом изучения. В связи с этим на третьем уровне рассматривается пример, в котором деление «уголком» не заканчивается после любого конечного числа шагов.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: понятие частного при делении нацело натурального числа на натуральное; деление натуральных чисел с остатком.

Новые математические понятия и свойства: частное при делении дроби на натуральное число; правило деления десятичной дроби на натуральное число (схема деления «уголком»).

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: неограниченная продолжаемость процесса деления «уголком».

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

5.1. Как $\frac{3}{4}$ яблока разделить на троих поровну?

Ответ. Каждому дать по $\frac{1}{4}$ яблока.

5.2. По какому свойству дроби можно сократить одинаковые сомножители в числителе и знаменателе дроби?

Ответ. При этом используется свойство: $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, где a, b, m — натуральные числа.

5.3. Чему равно частное от деления числа 7 на 25, записанное в виде десятичной дроби?

Ответ. При делении применяем правило деления десятичной дроби на натуральное число и получаем результат: $\frac{7}{25} = 0{,}28$.

5.4.** Что получится при делении уголком числа 10 на 9?

Ответ. Последовательно будут получаться неполные частные: 1; 1,1; 1,11; 1,111 и т.д.

5.5. Какая связь существует между частными 13000 : 125 и 1,3 : 125?

Вариант ответа. Первое частное в 10 000 раз больше второго.

Указания к решению наиболее трудных задач.

8.* Поставьте в делимом в нужном месте запятую и восстановите отмеченные звездочкой цифры:

а) $\begin{array}{r|l} -\ *2*** & *** \\ \underline{4**} & \overline{*,**} \\ -\ 1232 & \\ \underline{****} & \\ -\ *** & \\ \underline{268} & \\ 0 & \end{array}$; б) $\begin{array}{r|l} -\ ***5* & 325 \\ \underline{***} & \overline{1*,*} \\ -\ **** & \\ \underline{*9**} & \\ -\ *5* & \\ \underline{*5*} & \\ 0 & \end{array}$.

Указание. а) Из последнего шага в схеме деления можно сделать вывод, что делитель либо 132, либо 268. Но 268 не подходит по первому шагу в схеме деления.

б) Крайняя справа цифра частного четная, а так как при умножении на нее числа 325 получится трехзначное число, то эта цифра равна 2. Далее можно установить, что цифра единиц частного тоже четная, и перебором определить, что эта цифра 6.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.3. Какие из указанных частных больше 0,3?

1) 3,63 : 12; 2) 5,31 : 18; 3) 13,02 : 42; 4) 7,29 : 27.

Указание. В каждом из вариантов проще всего умножать делитель на 0,3 и сравнивать с делимым.

2.4. Какие из указанных частных меньше 0,01?

1) 0,38 : 41; 2) 1,56 : 129; 3) 0,49 : 51; 4) 0,87 : 94.

Указание. В каждом из вариантов проще всего умножать делитель на 0,01 и сравнивать с делимым.

Глава 14
ПРАКТИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ВЕЛИЧИН

Цель главы — ознакомить учащихся с разными способами относительного сравнения величин, выработать начальные навыки решения задач «на проценты», рассмотреть примеры таблиц и диаграмм, рассказать о применении масштаба при изображении объектов, непосредственное зрительное восприятие которых затруднено.

Особенности главы. В главе рассматривается несколько важных понятий. Прежде всего — это проценты, которые будут систематически встречаться не только в школьном курсе математики, но и в последующей жизни. Далее — это различные виды диаграмм, являющиеся одним из способов представления зависимости между величинами. Наконец — это понятие масштаба, с использованием которого можно изображать объекты как с очень большими, так и очень малыми размерами.

§ 1. ОДИН ПРОЦЕНТ... МНОГО ЭТО ИЛИ МАЛО?

Цель параграфа — ознакомиться с процентами, которые являются удобным средством при сравнении величин и их частей.

Особенности параграфа. В начале параграфа определяется 1% от величины и сравниваются значения одного процента для различных одноименных величин. После этого определяется $m\%$ от величины и разбираются примеры задач о вычислении заданного числа процентов от указанной величины и нахождении значения величины по известному значению ее процентов. При изучении этого материала ученики должны осознать, что когда проценты вычисляются от одной и той же величины, то по числам процентов можно сравнивать соответствующие этим процентам величины, а когда проценты вычисляются от разных величин, то такое сравнение сразу произвести невозможно.

В каждой задаче, в которой говорится про проценты, важно в первую очередь научиться определять, от какой величины вычисляется указанный процент, в особенности это относится к сложным процентам. Далее, иногда в задачах говорится об увеличении или уменьшении на определенное число процентов. В такой ситуации следует понимать, что проценты указываются от первоначальной величины, а не от той, которая получается после увеличения или уменьшения.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: действия с дробными числами; часть величины.

Новые математические понятия и свойства: процент от величины; выражение части целого в процентах; нахождение целого по заданному проценту от него.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Как найти один процент от одного процента некоторой величины a?

Вариант ответа. 1% от a составляет $\frac{1}{100}a$; 1% от $\frac{1}{100}a$ составляет $\left(\frac{1}{100}\right)\cdot\left(\frac{1}{100}a\right)$, то есть $0{,}0001\ a$.

1.2. В пункте рассматривается задача о росте гномика, который в начале 2008 года был ростом 20 см. В процессе решения устанавливается, что в конце 2009 года рост гномика стал 42 см.

Вопрос. На сколько процентов гномик вырос за два года?

Ответ. В начале рост гномика был 20 см, а через два года увеличился на 22 см. 22 см составляет $\frac{22}{20}\cdot 100\%$ от 20 см или 110%. Следовательно, за два года гномик вырос на 110%.

1.3. Какую часть величины составляют ее 50%; 25%; 10%?

Ответ. 50% — это половина величины; 25% — четверть величины; 10% — $\frac{1}{10}$ величины.

1.4. В пункте рассматривается задача: «Известно, что масса сушеных грибов составляет 5% от массы свежих грибов. Сколько понадобится свежих грибов, чтобы получить 2 кг сушеных?» Полученный при решении ответ — 40 кг. *Вопрос.*

Как найти в этой задаче процентное содержание воды в свежих грибах, если известно, что в сушеных грибах 1% воды?

Ответ. 2 кг сушеных грибов содержат $\frac{1}{100}\cdot 2$ кг воды, а поэтому $\frac{99}{100}\cdot 2=\frac{99}{50}$ (кг) «сухого остатка». Такое же количество «сухого остатка» и в свежих грибах, а поэтому 40 кг свежих грибов содержат $40-\frac{99}{50}=\frac{1901}{50}$ (кг) воды. Поэтому процентное содержание воды в свежих грибах $\frac{1901}{50\cdot 40}\cdot 100\% = 95{,}05\%$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5. Суша занимает 29%, а вода — 71% земной поверхности. В Северном полушарии суша занимает 39%, а вода — 61%. В Южном полушарии суша занимает 19%, а вода — 81% поверхности. Найдите площадь, занимаемую сушей и водой на всей Земле и в каждом полушарии отдельно, если поверхность земного шара приблизительно равна 510 млн км^2.

Указание. Площадь каждого полушария равна половине площади поверхности земного шара, и из условия следует, что приблизительно равна 255 млн км^2. Это позволяет вычислить площади частей полушарий, занятых сушей и водой.

9. Банк платит вкладчикам 15% годовых. Какой прирост образуется с суммы вклада в 300 000 рублей: а) за 1 год; б) за 2 года?

Указание. В конце первого года прирост вклада составляет 15% от 300 000 рублей, то есть 45 000 рублей. В итоге сумма вклада становится равной 345 000 рублей. В конце второго года прирост вклада вычисляется от последней суммы и составляет $\frac{345\,000}{100}\cdot 15 = 51\,750$ (руб.). Отсюда следует, что общий прирост вклада за два года составляет $45\,000 + 51\,750 = 96\,750$ (руб.).

10.* В школе 1760 учеников. В новогодних вечерах приняли участие 75% всех учащихся. Среди участников вечеров было 55% девочек. Сколько девочек участвовало в новогодних вечерах, сколько мальчиков?

Указание. 75% от 1760 учеников составляют 1320 учеников. Число девочек на новогодних вечерах — это 55% от 1320 учеников.

24.* Объем строительных работ увеличился на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, чтобы выполнить работу за намеченное ранее время, если производительность труда увеличилась на 20%?

Указание. В задаче предполагается, что все строительные работы одного типа и все рабочие трудятся с одинаковой интенсивностью. Далее, для того чтобы в этой задаче можно было производить некоторые вычисления, нужно некоторые величины обозначить буквами. Одна из возможностей — обозначить через a объем работы, выполняемой первоначально одним рабочим за день, через n — начальное число рабочих и через t — число дней, за которое начальный объем работ будет выполнен. Тогда весь начальный объем работ задается выражением ant. Отсюда увеличенный объем работ равен $ant + \frac{80}{100}ant = \frac{9}{5}ant$. Если обозначить новое число рабочих через m, то по условию каждый из них будет выполнять за день $a + \frac{20}{100}a = \frac{6}{5}a$ объема работ. Тогда все они за t дней выполнят $\left(\frac{6}{5}a\right) \cdot m \cdot t = \frac{6}{5}amt$. По условию $\frac{6}{5}amt = \frac{9}{5}ant$, откуда $2m = 3n$, $m = \frac{3}{2}n$. Следовательно, число m рабочих составляет 150% от n. Поэтому число рабочих нужно увеличить на 50%.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. В классе 60% девочек, из них 15% старше 12 лет. Какой процент составляют девочки старше 12 лет от общего числа учеников класса?

1) 9%; 2) 10%; 3) 12%; 4) 14%.

Указание. 15% от 60% величины a составляет $\frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100}a = \frac{9}{100}a$.

2.1. Какие из приведенных утверждений являются верными?

1) 30% от 20 равняется 0,6; 2) 32% от 15 равняется 4,8;

3) 125% от 40 равняется 50; 4) 1,2% от 1200 равняется 12.

Указание. Не выполняя вычислений, можно понять, что варианты 1 и 4 не подходят. Вариант 3 подходит, потому что 25% от 40 равняется 10. Остается проверить вариант 2, вычислив $\frac{15}{100} \cdot 32 = 4{,}8$.

2.2. Какие из приведенных величин больше 20% и меньше 30% от 1 км 250 м?

1) 0,3 км; 2) 380 м; 3) 35000 см; 4) 28000 см.

Указание. 20% от 1250 м равно 250 м, 30% от 1250 м равно 375 м. Поэтому заданные в вариантах величины нужно сравнить с полученными.

2.3. Какие из приведенных величин больше 0,3% и меньше 0,5% от 320 граммов?

1) 500 мг; 2) 1 г ; 3) 1200 мг; 4) 1,5 г.

Указание. 0,3% от 320 г равно 0,96 г, 0,5% от 320 г равно 1,6 г. Поэтому заданные в вариантах величины нужно сравнить с полученными.

2.4. Какие из приведенных величин больше 28% и меньше 30% от 3 часов 30 минут?

1) 56 минут; 2) 1 час 5 минут;

3) 59 минут; 4) 1 час 1 минута.

Указание. 28% от 210 мин равно 58,8 мин, 30% от 210 мин равно 63 мин. Поэтому заданные в вариантах величины нужно сравнить с полученными.

§ 2. ТАБЛИЦЫ, ДИАГРАММЫ

Цель параграфа — ознакомить учащихся с понятием зависимости одной переменной величины от другой и некоторыми способами представления этих зависимостей.

Особенности параграфа. В параграфе на примерах формируются начальные представления о зависимости одной переменной величины от другой. Для наглядного представления зависимостей используются как таблицы, так и диаграммы разного вида: линейные, столбчатые и круговые.

На втором уровне рассматриваются примеры зависимостей, которые задаются некоторой формулой.

При изучении параграфа следует иметь в виду, что идея зависимости между переменными величинами непроста и предполагает наличие соответствия между элементами двух множеств, причем во многих случаях эти множества бесконечны. Поэтому при составлении таблиц нужно систематически обращать внимание на то, что можно составлять аналогичные таблицы с измененным набором величин. Во многих задачах к этому параграфу предполагается линейная зависимость между величинами. Иногда эта линейность является следствием соответствующей формулы, а иногда ее следует воспринимать по аналогии с предыдущими задачами.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: примеры таблиц; примеры формул.

Новые математические понятия и свойства: линейные диаграммы; столбчатые диаграммы; круговые диаграммы.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: зависимость между величинами.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Какую площадь имеет квадрат со стороной 130 м?

Варианты ответа. 16900 м^2; 1,69 га; 0,0169 км^2.

2.2. Как линейную диаграмму можно превратить в столбчатую?

Вариант ответа. Это можно сделать, например, так. Через верхний конец каждого вертикального отрезка проведем вправо отрезок горизонтальной прямой до пересечения с ближайшим справа вертикальным отрезком или его продолжением. Последний вертикальный отрезок требует отдельного рассмотрения. Через его верхний конец проведем вправо горизонтальный отрезок примерно такой же длины, как и ближайший слева, а из его конца опустим перпендикуляр на горизонтальную ось. Получится столбчатая диаграмма.

2.3. Каким выражением можно задать зависимость площади квадрата от его стороны?

Ответ. Обозначим переменную сторону квадрата буквой a, выраженную в некоторых единицах измерения, а его площадь — буквой S, выраженной в соответственных единицах площади. Тогда $S = a^2$.

Указания к решению наиболее трудных задач.

2.* Заполните пустые места в таблице массы стали в зависимости от объема.

Объем, см^3	1	2	3	4	5		7		9	
Масса, г	7,8	15,6				46,8		62,4		78,0

Найдите отношение масс 62,4 г и 15,6 г. Сравните полученное отношение с отношением соответствующих объемов стали. Представьте таблицу в виде линейной диаграммы.

Указание. По таблице масса 1 см^3 стали равна 7,8 г. Поэтому масса M (г) куска стали объема V (см^3) вычисляется по формуле $M = 7{,}8V$, а объем куска стали — по формуле $V = \dfrac{M}{7{,}8}$.

4.** В таблице приведена зависимость между площадью S поперечного сечения русла на отдельных участках реки и скоростью V течения реки.

S, м^2	36	40	45	48	54	60		90	
V, м/с	1,00		0,80	0,75		0,60	0,50		0,30

Заполните пустые места в таблице, учитывая, что за одну секунду через любое сечение проходит один и тот же объем воды, то есть произведение $S \cdot V$ постоянно. Представьте таблицу в виде линейной диаграммы. Найдите отношение площадей поперечного сечения и сравните это отношение с отношением соответствующих скоростей течения реки.

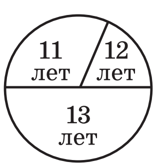
Указание. По четырем полным столбцам следует заметить зависимость $S \cdot V = 36$, после чего пустые клетки заполняются без труда.

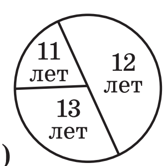
Указания по работе с наиболее трудными тестами.

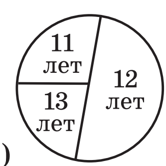
1.3. Дана таблица, в которой указано число учащихся в классе, имеющих данный возраст.

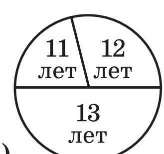
Возраст	11 лет	12 лет	13 лет
Число учеников	9	11	20

Какая из приведенных круговых диаграмм соответствует этой таблице?

1) 

; 2) 

; 3) 

; 4) 

.

Указание. Сначала нужно вычислить общее число учеников, равное 40. После этого обратить внимание на то, что $\dfrac{20}{40} = 0{,}5$. Это означает, что возраст 13 лет у половины учеников. Остается из вариантов 1, 4 выбрать тот, который соответствует меньшему числу учащихся с возрастом 11 лет.

2.4. Сколько раз в календаре за июль какого-нибудь года могут встречаться в сумме дни недели «среда» и «воскресенье»?

1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11.

Указание. В июле каждого года 4 полных недели и еще три дня. Среди этих трех дней может не быть ни «среды», ни «воскресенья», и тогда общее число указанных дней недели равно 8. С другой стороны, если «среда» входит в эти три дня, то «воскресенье» уже не может входить, и наоборот, в этих случаях общее число указанных дней недели равно 9. Других возможностей нет.

§ 3. МАСШТАБ

Цель параграфа — ознакомить учащихся с понятием масштаба, выработать навыки правильной записи выбранного масштаба, изображения объектов с заданным масштабом и вычисления реальных размеров объекта по размерам изображения и масштабу.

Особенности параграфа. В параграфе напоминается об использовании масштаба для получения рисунков, которые позволяют воспринимать изображаемый объект. При определении масштаба указывается на соотношение между длиной отрезка на рисунке и реальной длиной отрезка. При изучении параграфа основное внимание следует обратить на запись масштаба в виде отношения двух натуральных чисел и выработку навыков в вычислении реального расстояния по длине его изображения и наоборот. В качестве нестандартных примеров масштаба можно рассмотреть масштабы 2:3 и 3:2 и поупражняться в изображении фигур с такими масштабами на доске и в тетради.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: арифметические действия с дробными числами.

Новые математические понятия и свойства: масштаб.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1. Какой масштаб можно выбрать, чтобы изобразить в тетради квадратный участок площадью в 1 га?

Ответ. Сторона квадрата площадью в 1 га равна 100 м. Отрезку в 100 м при масштабе 1 : 100 будет соответствовать отрезок в 1 м, при масштабе 1 : 1000 — отрезок в 10 см, при масштабе 1 : 10 000 — отрезок в 1 см. Видно, что для изображения данного участка разумнее всего использовать масштаб 1 : 1000 или близкий к нему масштаб.

3.2. Нужна ли на практике карта земной поверхности с масштабом 1 : 1 000 000 000?

Ответ. При таком масштабе отрезку в 40 000 км, по длине приблизительно равному длине экватора, будет соответствовать отрезок в $(4 \cdot 10^4) : 10^9$ км $= (4 : 10^5)$ км $= 0{,}00004$ км $=$ $= 0{,}04$ м $= 4$ см. На такой карте вряд ли можно разглядеть какие-то детали земной поверхности.

3.3. Где вы встречались с применением масштаба?

Варианты ответа. На географических картах; на планах участков местности; при изображении числовой прямой в разных масштабах.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4. Какой масштаб нужно выбрать для изображения плана дачного участка длиной 40 м и шириной 20 м на листе бумаги длиной 30 см и шириной 20 см, чтобы план полностью поместился на листе и поля оставались не слишком большими?

Указание. 40 м = 4000 см, 20 м = 2000 см. Составим отношения $\frac{30}{4000} = \frac{3}{400}$, $\frac{20}{2000} = \frac{1}{100}$. Так как $\frac{1}{100} > \frac{3}{400}$, то при масштабе $1 : a$, где $a > 100$, ширину участка можно изобразить по ширине листа, а длину участка — по длине листа.

5. Какой масштаб нужно выбрать для изображения плана комнаты длиной 5 м и шириной 4 м на листе обычной тетради в клетку?

Указание. Будем считать, что размеры тетрадного листа примерно 30 см × 20 см. Составим отношения $\frac{30}{500} = \frac{3}{50}$, $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$. Так как $\frac{3}{50} > \frac{1}{20}$, то при масштабе $3 : a$, где $a > 50$, ширину комнаты можно изобразить по ширине листа, а длину комнаты — по длине листа.

Указание по работе с наиболее трудными тестами.

2.2. Отрезки какой длины можно изобразить на листе бумаги размером 30 см × 40 см при масштабе 1:1000?

1) 20 м; 2) 300 м; 3) 450 м; 4) 550 м.

Указание. Диагональ листа бумаги равна 50 см. Поэтому каждый отрезок, длина которого меньше $50 \cdot 1000$ см = 500 м, на этом листе можно изобразить.

2.3. При каких указанных масштабах окружность радиуса 6 км можно изобразить на листе бумаги размером 10 см $\times$ 20 см?

1) 1 : 1000; 2) 1 : 10 000; 3) 1 : 100 000; 4) 1 : 1 000 000.

Указание. Изображение диаметра окружности должно быть меньше ширины листа. Далее, отрезок в 12 км изображается как отрезок в 10 см при масштабе $\frac{10}{12 \cdot 1000 \cdot 100} = 1 : 120\,000$. Отсюда следует, что правильный только вариант 4.

Глава 15
ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ В ПРАКТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Цель главы — ознакомить школьников с рядом формул, которые значительно расширяют круг задач, доступных им для решения и полезных при изучении других предметов.

Особенности главы. Данная глава — это одна из глав, где ярче всего может проявиться целесообразность обучения на разных уровнях. Формулами широко пользуются, находя их в справочниках, не всегда зная их вывод и даже точное определение величин, входящих в формулы.

Понятие формулы привело математиков к более абстрактному понятию — понятию функции. Первоначально считалось, что функция — это алгебраическое выражение, в котором участвуют операции сложения, вычитания, умножения и деления над величинами, которые могут принимать различные значения. Постепенно число операций, которые можно производить над величинами, увеличивалось. В пятом классе об этом говорить рано, но прежде чем переходить к понятию функции, важно ознакомить школьников с достаточным числом содержательных примеров и тем самым приучать детей к формулам. Не требуя запоминания формул, желательно добиваться от учащихся умения ими пользоваться. Предполагается, что многие формулы, приведенные в главе, будут выведены в старших классах.

Другой особенностью главы является то, что многие вычисления с использованием формул носят приближенный характер. Однако там, где это возможно, значения параметров подбираются так, чтобы учащимся не приходилось выходить за рамки известных им действий с числами. Работу над данной главой можно считать также серьезной формой овладения навыками выполнения действий с десятичными дробями, числовыми и буквенными выражениями.

§ 1. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

Цель параграфа — ознакомить учащихся с формулами для вычисления длины окружности и площади круга.

Особенности параграфа. В начале параграфа напоминаются некоторые известные формулы и указывается на их использование при решении задач. Затем выводится формула, по которой можно вычислить катет прямоугольного треугольника, зная его гипотенузу и второй катет. После этого приводятся формулы длины окружности и площади круга и рассматриваются примеры на применение этих формул при решении практических задач. Изучая параграф, целесообразно обратить внимание на то, что каждая формула позволяет сократить время и усилия при решении соответствующих задач.

Основной материал параграфа предназначен для изучения на втором уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: арифметические действия с дробными числами; приближения с недостатком и с избытком; формулировка теоремы Пифагора.

Новые математические понятия и свойства: формула длины окружности; формула площади круга, объем куба и прямоугольного параллелепипеда; объем цилиндра и шара.

Вспомогательные понятия: кубический корень; параллелепипед; цилиндр; шар; число π; иррациональное число.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

1.1. Какие формулы вам известны?

Варианты ответа. Могут быть известны: формула длины пути, пройденного с постоянной скоростью за указанный промежуток времени, формула площади прямоугольника, формула перевода времени из часов в минуты, формула перевода расстояний из метров в километры и т.д.

1.2. По какой формуле можно вычислять площадь прямоугольного треугольника, если известны его катеты?

Ответ: $S = \frac{1}{2}ab$, где S — площадь треугольника, a и b — длины его катетов.

1.3.* В пункте рассматривается задача, в которой по краю арены цирка бежит лошадь, а рядом с ней на 1 м ближе к центру на коне скачет наездник. *Вопрос.* На сколько метров больше коня пробежит лошадь за 50 кругов, если представить, что радиус арены цирка равен 100 м?

Ответ. За один круг лошадь пробежит $2\pi \cdot 100$ м, а конь соответственно $2\pi \cdot 99$ м. За 50 кругов лошадь пробежит $50 \cdot 2\pi \cdot 100$ м, а конь соответственно $50 \cdot 2\pi \cdot 99$ м. Разность между этими величинами равна $50 \cdot 2\pi$ м $= 100\pi$ м. Такое же число получено и при решении задачи, рассмотренной в пункте. Поэтому ответ можно заимствовать: лошадь пробежит приблизительно на 314 метров больше коня.

Следует обратить внимание на то, что, несмотря на увеличение радиуса арены, разница пройденных путей осталась прежней.

1.4.* Для засыпки песком круглой площадки радиусом 11 м требуется по 0,2 т песка на каждый квадратный метр. *Вопрос.* На сколько тонн больше, чем в предыдущей задаче, потребуется песка для засыпки круглой площадки радиусом 12 м?

Вариант ответа. Первый способ. Можно использовать полученный в пункте результат, что на засыпку площадки радиусом 11 м потребуется примерно 76,02 т песка (с недостатком), а затем провести рассуждения, аналогичные проведенным в тексте пункта. Для новой площадки площадь $S = \pi \cdot 12^2 = \pi \cdot 144 = 3{,}1416 \cdot 144$ м^2 с избытком. Следовательно, для ее засыпки потребуется $3{,}1416 \cdot 144 \cdot 0{,}2$ т песка. С помощью калькулятора выполним действия и получим величину 90,48 т (с избытком). Вычислив разность $90{,}48 - 76{,}02$, сможем записать ответ.

Второй способ. Площадь новой площадки в $\dfrac{144}{121}$ раз больше площади прежней площадки, а поэтому увеличится на $\dfrac{144}{121} - 1 = \dfrac{23}{121}$ площади, значит, и масса песка увеличится на такую же часть. Следовательно, на новую площадку дополнительно потребуется примерно $76{,}02 \cdot \dfrac{23}{121}$ т песка.

При ответе на вопрос к этому пункту следует обратить внимание на тот факт, что радиус площадки 11 м увеличивается всего на 1 м, а потребности песка при этом возрастают заметно.

Указания к решению наиболее трудных задач.

6.* Диаметр колеса автомобиля равен 60 см. Автомобиль проехал 1 км. Сколько полных оборотов сделало колесо?

Указание. За один оборот колеса автомобиль проходит расстояние d, равное длине окружности колеса. Выражая в метрах радиус колеса, находим $d = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}3 = 0{,}6 \cdot \pi = 1{,}898$ м с избытком. После этого нужно найти такое наибольшее натуральное число m, что $d \cdot m < 1000$ (заметим, что тогда должно выполняться неравенство $d \cdot (m + 1) > 1000$). Сделать это можно небольшим перебором, так как нетрудно вычислить, что $530d = 318\pi < 1000$, а $540d = 324\,\pi > 1000$.

10.* Пройдет ли медная проволока сечением 4 мм^2 в отверстие диаметром: а) 2,5 мм; б) 2 мм?

Указание. Предполагается, что сечение проволоки представляет из себя круг, а отверстие также имеет круглую форму. Поэтому достаточно площадь отверстия сравнить с площадью сечения проволоки.

12.* Шайба имеет вид кольца, внутренний диаметр которого равен 6 мм. Найдите диаметр шайбы, если известно, что площадь отверстия в 2 раза меньше площади кольца.

Указание. Радиус внутреннего отверстия равен 3 мм. Обозначим через x мм внешний радиус шайбы. Тогда площадь внутреннего отверстия $\pi \cdot 3^2 = 9\,\pi$ мм^2, а площадь кольца $\pi\,(x^2 - 9)$ мм^2. По условию $\pi\,(x^2 - 9) = 2 \cdot 9\,\pi$, откуда $\pi\,x^2 = 27\,\pi$, $x^2 = 27$, $x = \sqrt{27} \approx 5{,}20$ с избытком.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.4. Даны два круга радиусов 6 см и 4 см. На сколько площадь первого круга больше площади второго?

1) на 18π см^2; 2) на 20π см^2; 3) на 22π см^2; 4) на 24π см^2.

Указание. Прежде всего нужно понять, что искомая величина равна $\pi \cdot (6^2 - 4^2)$ см^2. Далее можно воспользоваться формулой разности квадратов.

2.4. Какие из указанных величин равны π см?

1) длина окружности радиуса 1 см;

2) сумма длин двух окружностей радиуса 0,5 см;

3) длина окружности радиуса 0,5 см;

4) длина половины окружности радиуса 1 см.

Указание. Длина окружности радиуса 1 см равна 2π см. По этому результату можно отобрать верные варианты 3 и 4.

§ 2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД И ЕГО ОБЪЕМ

Цель параграфа — рассмотреть вычисление объемов прямоугольного параллелепипеда и куба.

Особенности параграфа. В параграфе даются наглядные представления о прямоугольном параллелепипеде, определяются его измерения, записывается формула объема прямоугольного параллелепипеда через его измерения и приводятся основные единицы измерения объема. Из общей формулы выводится формула объема куба. Затем рассматриваются примеры на применение изучаемых формул при решении практических задач.

На втором уровне в порядке ознакомления рассматривается понятие кубического корня, приводится таблица приближенных значений кубического корня из натуральных чисел от 1 до 10.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: пространственная фигура куб; куб числа; понятие квадратного корня.

Новые математические понятия и свойства: прямоугольный параллелепипед; измерения параллелепипеда; формула объема параллелепипед; формула объема куба.

Вспомогательные понятия: корень кубический.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

2.1. Как найти сумму длин всех ребер прямоугольного параллелепипеда, зная его измерения?

Ответ. Пусть a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда. Тогда у параллелепипеда по четыре ребра имеют указанные длины. Следовательно, сумма длин всех ребер равна $4(a + b + c)$.

2.2. Сколько зерен крупы поместится в трехлитровой банке, если в 1 см^3 около ста зерен?

Вариант ответа. Литр — единица объема, равная 1000 см^3. Поэтому объем трехлитровой банки равен 3000 см^3. Так как в 1 см^3 содержится около 100 зерен, то в трехлитровой банке около $3000 \cdot 100 = 300\,000$ зерен.

2.3. В пункте рассматривается задача: «На прямоугольной площадке шириной 3 м и длиной 5 м для просушивания тонким слоем в 1 см рассыпано зерно. Сколько нужно мешков, чтобы собрать все зерно, если один мешок вмещает 50 дм^3?» При решении был получен ответ, что потребуется 3 мешка. *Вопрос.* Как изменится ответ во втором примере, если считать, что зерно рассыпано слоем толщиной в 4 см?

Вариант ответа. Объем зерна увеличится в 4 раза, а поэтому и мешков потребуется в 4 раза больше, то есть 12.

2.4.* Какие натуральные числа можно считать приближенными значениями $\sqrt[3]{100}$ с недостатком и с избытком?

Ответ. Сравнивая число 100 с кубами натуральных чисел, находим, что $4^3 < 100$, а $5^3 > 100$. Поэтому $\sqrt[3]{100} \approx 4$ с недостатком и $\sqrt[3]{100} \approx 5$ с избытком.

2.5.* Чему равно значение $\sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,001 с избытком?

Ответ. По составленной таблице приближенных значений кубических корней находим, что $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}70$ с недостатком. Это означает, что $(1{,}70)^3 < 5$, а $(1{,}71)^3 > 5$. После этого проделаем следующие вычисления: $(1{,}705)^3 \approx 4{,}956 < 1$; $(1{,}707)^3 \approx 4{,}974 < 5$; $(1{,}709)^3 \approx 4{,}991 < 5$. В итоге сможем ответить на поставленный вопрос: $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}710$ с избытком.

Заметим, что запись ответа 1,71 не годится, потому что мы тогда должны считать 1,71 приближением $\sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,01.

Указания к решению наиболее трудных задач.

5. Размеры кирпича равны 25 см, 12 см и 6,5 см. Сколько потребуется кирпичей, чтобы сложить стену объемом 2 м^3?

Указание. Будем предполагать, что объем стены складывается только из объемов кирпичей без учета раствора, которым обычно связывают кирпичи. Тогда объем одного кирпича $25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950$ см^3, а объем стены $2 \cdot (100)^3$ см^3. После этого вычисляем отношение объема стены к объему одного кирпича, находим целую часть и берем число, на 1 большее целой части, и оцениваем число необходимых кирпичей.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. На сколько увеличится объем куба с ребром 1 дм, если каждое его ребро увеличить на 1 см?

1) на 3, 31 см^3; 2) на 33,1 см^3;

3) на 331 см^3; 4) на 3310 см^3.

Указание. Нужно вычислить $11^3 = 1331$, вычесть 1000 и получить результат в кубических сантиметрах.

2.2. При каких значениях длины ребра куба его объем больше 2000 см^3?

1) 11 см; 2) 12 см; 3) 13 см; 4) 14 см.

Указание. Нужно вычислить $12^3 = 1728$, $13^3 = 2197$.

§ 3. ОБЪЕМЫ ЦИЛИНДРА И ШАРА

Цель параграфа — рассмотреть вычисление объемов цилиндра и шара.

Особенности параграфа. В параграфе даются наглядные представления о цилиндре, разъясняются понятия высоты и радиусов оснований цилиндра, записываются формулы объема цилиндра и объема шара. Затем рассматриваются примеры на применение этих формул при решении практических задач.

Основной материал параграфа предназначен для изучения на втором уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: окружность; радиус окружности; число π.

Новые математические понятия и свойства: формула объема цилиндра; формула объема шара.

Вспомогательные понятия: высота цилиндра; радиус основания цилиндра.

Ответы на открытые вопросы к пунктам.

3.1.* Как измерить высоту цилиндра, сделанного из дерева?

Варианты ответа. Можно поставить цилиндр на край стола и с помощью отвеса определить направление его образующей, равной по длине высоте цилиндра (отрезку, соединяющему центры кругов — оснований цилиндра).

Можно положить цилиндр и приложить к основаниям две пластинки, провести карандашом линии вдоль пластинок и измерить расстояние между этими прямыми.

3.2.* В пункте рассматривается пример вычисления объема бака цилиндрической формы и получается приближенный ответ в виде $V \approx 127623{,}44$ см^3. *Вопрос.* Какое значение объема этого бака с избытком вы можете указать?

Варианты ответа: 127 624 см^3; 128 дм^3; 130 л.

3.3.* В пункте рассматривается задача: «На дачном участке хозяину нужно выкопать яму под колодец цилиндрической формы глубиной в 5 м и радиусом 75 см. Хозяин решил копать яму с небольшим запасом, делая радиус в 80 см. На сколько больше земли придется выкопать хозяину?» При решении был получен ответ, что хозяину придется выкопать земли более чем на 1,2 м^3. *Вопрос.* На сколько больше земли придется выкопать хозяину, если он увеличит радиус на 5 см, копая яму глубиной 5 м и радиусом 2 м?

Ответ. Для ответа на вопрос последовательно находим:

$$V_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot 5;\quad V_2 = \pi(2 + 0{,}05) \cdot 5;$$

$$V_2 - V_1 = \pi(2{,}05^2 - 2^2) \cdot 5 = \pi \cdot 0{,}05 \cdot 4{,}05 \cdot 5.$$

Выбирая $\pi \approx 3{,}1415$ с недостатком и вычисляя приближение $V_2 - V_1$ также с недостатком, получим $V_2 - V_1 \approx 3{,}180$ м^3.

3.4.* В пункте рассматривается пример на вычисление объема воздушного шарика с радиусом $R = 30$ см и получается результат $V \approx 33{,}5$ л с недостатком. *Вопрос.* Сколько литров воздуха будет содержать шарик, если увеличить его радиус на 1 см?

Вариант ответа. Выполним вычисления, аналогичные рассмотренным в пункте, и получим:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}1415 \cdot 21^3 \text{ см}^3.$$

С помощью калькулятора получаем значение 38791,242 см^3. С недостатком можно взять 38791 см^3 или 38,7 л.

При этом важно отметить, что при увеличении радиуса шарика только на 1 см его объем увеличивается более чем на 5,25 л.

Указания к решению наиболее трудных задач.

4.* Высота дымовой трубы равна 20 м, ее внешний диаметр равен 3 м, а внутренний равен 2 м. Какой объем кирпичной кладки имеет эта труба?

Указание. Если представить, что труба сверху прикрыта круглой плоской пластиной, то все будет смотреться как цилиндр. Находящаяся внутри заполненная воздухом часть также представляет из себя цилиндр. Поэтому объем стенок трубы можно вычислить как разность объемов двух цилиндров с одинаковой высотой: $V = \frac{\pi(3^2 - 2^2)}{4} \cdot 20$ м^3.

7*. Диаметр Земли в 4 раза больше диаметра Луны. Во сколько раз объем Земли больше объема Луны?

Указание. Обозначим радиус Луны через R км. Тогда радиус Земли равен $4R$ км, а ее объем $V = \frac{4}{3} \cdot (4R)^3 = \frac{4}{3} \cdot 64 \cdot R^3 = 64\left(\frac{4}{3}\pi \cdot R^3\right)$ км^3. Остается заметить, что выражение в скобках равно объему Луны.

9.** Найдите объем земной атмосферы, если она простирается над поверхностью Земли на высоту приблизительно 100 км, а радиус Земли равен 6370 км.

Указание. Искомый объем в кубических километрах равен значению выражения $\frac{4}{3} \cdot \pi(R + h)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$ при $R = 6370$, $h = 100$. С помощью калькулятора находим, что это значение приближенно равно $5{,}2 \cdot 10^{10}$ км^3.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

1.3. Во сколько раз увеличится объем цилиндра, если радиус основания увеличить в 2 раза, а высоту в 1,5 раза?

1) в 3 раза; 2) в 4 раза; 3) в 6 раз; 4) в 9 раз.

Указание. Нужно 1,5 умножить на 4.

2.3. Какие из указанных значений являются приближенными значениями с недостатком объема шара с радиусом 1 дм?

1) 2 дм^3; 2) 4 дм^3; 3) 6 дм^3; 4) 8 дм^3.

Указание. Приближенное значение выражения $\frac{4\pi}{3}$ больше 4 и меньше 5.

2.4. Какие из указанных объемов равны?

1) объем цилиндра с высотой $\frac{2}{3}$ дм и радиусом основания 1 дм;

2) объем шара с радиусом 1 дм;

3) объем цилиндра с высотой 0,5 дм и радиусом основания 1 дм;

4) объем половины шара с радиусом 1 дм.

Указание. С помощь формул для объемов записать результаты во всех вариантах и сравнить. В результате совпадение будет только в вариантах 1 и 4.

ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Нарисуйте пятиугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы D, F, P, S, T. Запишите тремя различными способами обозначение этого пятиугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $KLMNOP$ фигура является шестиугольником. Запишите, какие стороны этого шестиугольника являются соседними со стороной OP.

3. Сколько можно составить не равных между собой многоугольников из четырех равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 3 узла. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 4 узла.

5. Изобразите три окружности, две из которых имеют хотя бы одну общую точку, а третья находится внутри одной из двух, но не содержится внутри второй.

Вариант 2

1. Нарисуйте шестиугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы P, F, B, A, T, M. Запишите тремя различными способами обозначение этого шестиугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $QLNOP$ фигура является пятиугольником. Запишите, какие стороны этого пятиугольника являются соседними со стороной PQ.

3. Сколько можно составить не равных между собой прямоугольников из 12 равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 7 узлов. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 8 узлов.

5. Изобразите три окружности, две из которых имеют хотя бы одну общую точку, а третья находится внутри первых двух окружностей.

Вариант 3

1. Нарисуйте пятиугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы M, P, F, B, A. Запишите четырьмя различными способами обозначение этого пятиугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $NOPQR$ фигура является пятиугольником. Запишите, какие стороны этого пятиугольника не являются соседними со стороной RN.

3. Сколько можно составить не равных между собой прямоугольников из 16 равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 9 узлов. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 10 узлов.

5. Изобразите три равные окружности, которые имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант 4

1. Нарисуйте четырехугольник. Обозначьте его вершины, используя буквы C, F, K, A. Запишите четырьмя различными способами обозначение этого четырехугольника.

2. Пусть известно, что обозначенная как $NOPQRS$ фигура является шестиугольником. Запишите, какие стороны этого шестиугольника не являются соседними со стороной SN.

3. Сколько можно составить не равных между собой прямоугольников из 20 равных квадратов, используя их все и совмещая между собой некоторые из их сторон?

4.** Предположим, что на клетчатой бумаге окружность с центром в одном из узлов проходит через какие-то 5 узлов. Объясните, почему в этом случае эта окружность проходит по крайней мере через 6 узлов.

5. Изобразите три окружности, две из которых имеют хотя бы одну общую точку, а третья содержит внутри себя первые две.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 3 км 150 м; б) 23500 см.

2. Найдите, сколько минут в одних сутках.

3. Торт весом 800 граммов поделили на 12 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (b + 4) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 8$; $a = 4$; б) $b = 2$; $a = 3$; в) $b = 5$; $a = 1$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 2 на 18 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 10 на 10 см (закладки можно разрезать).

Вариант 2

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 5 км 760м; б) 66300 см.

2. Найдите, сколько минут в двух сутках.

3. Торт весом 1 килограмм поделили на 12 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (b + 3) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 7$; $a = 5$; б) $b = 9$; $a = 3$; в) $b = 11$; $a = 2$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 3 на 18 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 12 на 12 см (закладки можно разрезать).

Вариант 3

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 2 км 950м; б) 45400 см.

2. Найдите, сколько часов в июне.

3. Торт весом 700 граммов поделили на 8 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (6 + b) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 10$; $a = 4$; б) $b = 12$; $a = 3$; в) $b = 5$; $a = 11$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 3 на 12 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 9 на 9 см (закладки можно разрезать).

Вариант 4

1. Выразите в метрах расстояние:

а) 10 км 50м; б) 243500 см.

2. Найдите, сколько часов в августе.

3. Торт весом 1 килограмм поделили на 6 одинаковых кусков. Найдите приближенное значение с недостатком с точностью до 10 граммов для веса одного кусочка торта.

4. По формуле $c = (b + b + 4) : a$ найдите значение c, если:

а) $b = 8$; $a = 4$; б) $b = 2$; $a = 4$; в) $b = 7$; $a = 6$.

5. Найдите, сколько бумажных закладок размером 4 на 10 см необходимо, чтобы заклеить квадрат 9 на 9 см (закладки можно разрезать).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 12^2; б) 2^7; в) 4^4; г) 5^5; д) 104^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 7664; б) 54341; в) 98766764.

3. Расставьте в порядке убывания числа:

15 344; 1851; 14 889; 2245; 388; 9999.

4. Расставьте в порядке возрастания числа:

1987; 1414; 66 013; 1274; 9807; 9999.

5. Найдите наименьшее и набольшее из чисел:

65 520; 65 302; 32 117; 124 487; 99; 111.

Вариант 2

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 11^2; б) 2^6; в) 3^4; г) 5^6; д) 101^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 7201; б) 24321; в) 60032155.

3. Расставьте в порядке убывания числа:

14 998; 1599; 14 999; 2175; 391; 9999.

4. Расставьте в порядке возрастания числа:

987; 1234; 56 003; 1204; 90 807; 9999.

5. Найдите наименьшее и набольшее из чисел:

65 000; 65 102; 3217; 123 987; 99; 531.

Вариант 3

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 13^2; б) 2^8; в) 6^4; г) 3^6; д) 115^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 9564; б) 71234; в) 896745321.

3. Расставьте в порядке возрастания числа:

27 998; 1599; 27 989; 2175; 991; 9999.

4. Расставьте в порядке убывания числа:

897; 4321; 14 467; 1654; 14 567; 9999.

5. Найдите наибольшее и наименьшее из чисел:

35 000; 66 452; 2357; 112 387; 99; 131.

Вариант 4

1. Представьте в виде десятичной записи:

а) 19^2; б) 2^{10}; в) 5^4; г) 3^5; д) 201^2.

2. Представьте числа в виде сумм при помощи цифр и разрядных единиц в виде степеней:

а) 4356; б) 43265; в) 71254389.

3. Расставьте в порядке возрастания числа:

56 898; 1999; 55 999; 1165; 991; 9919.

4. Расставьте в порядке убывания числа:

76 898; 2199; 76 999; 1166; 981; 9119.

5. Найдите наименьшее и набольшее из чисел:

62 111; 62 092; 3677; 111 199; 199; 111.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы концы этого отрезка лежали на первых двух отрезках.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 12 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 7 и меньше 8. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 8 см; длина AB на 2 см меньше длины BC; длина CD в два раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 15 мм, 6 см, 38 мм, 11 см и 57 мм.

5. Одна из сторон треугольника равна 56 мм, а вторая равна 9 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое меньше одной из данных сторон.

Вариант 2

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы концы этого отрезка лежали на концах первых двух отрезков.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 11 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 11 и меньше 12. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 16 см; длина AB на 4 см меньше длины BC; длина CD в три раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 25 см, 6 мм, 58 мм, 21 см и 107 мм.

5. Одна из сторон треугольника равна 36 мм, а вторая равна 6 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое меньше одной из данных сторон.

Вариант 3

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы этот отрезок имел по одной общей точке с первыми двумя отрезками.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 13 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 5 и меньше 6. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 12 см; длина AB на 4 см меньше длины BC; длина CD в четыре раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 40 мм, 16 см, 56 см, 11 см и 204 мм.

5. Одна из сторон треугольника равна 45 мм, а вторая равна 6 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она втрое меньше одной из данных сторон.

Вариант 4

1. Нарисуйте два пересекающихся отрезка. После этого нарисуйте третий отрезок так, чтобы на рисунке образовался треугольник.

2. При измерении некоторого отрезка AB за единицу измерения был принят отрезок PQ длиной 14 мм. Оказалось, что длина отрезка AB в таких единицах больше 6 и меньше 7. Чему равна длина отрезка AB, если известно, что его длина в сантиметрах выражается натуральным числом?

3. На отрезке AD выбраны точки B и C так, что точка B лежит на отрезке AC. Длина AC равна 18 см; длина AB на 2 см больше длины BC; длина CD в три раза больше длины AB. Найдите длину отрезка AD.

4. Найдите длину ломаной, составленной из пяти звеньев, длины которых равны 15 см, 61 мм, 18 см, 21 мм и 17 см.

5. Одна из сторон треугольника равна 26 мм, а вторая равна 2 см. Найдите третью сторону треугольника, если известно, что она вдвое больше одной из данных сторон.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Найдите корень уравнения $538 - x = 279$.

2. Найдите значение выражения $x + 643$:

а) при $x = 271$; б) при $x = 1819$; в) при $x = 53\,457$.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно $327 + 654$, а другое $146 + 418$.

4. Вычислите разность: $200\,000 - 5041$.

5. За первый час автомобиль проехал 38 км 370 м, за второй час проехал 73 км 210 м, за третий час проехал 81 км 820 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(101101)_2 + (11011)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

Вариант 2

1. Найдите корень уравнения $1438 - x = 889$.

2. Найдите значение выражения $x + 283$:

а) при $x = 771$; б) при $x = 3919$; в) при $x = 543\,577$.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно 732 + 344, а другое 776 + 588.

4. Вычислите разность: 2 000 000 — 15041.

5. За первый час автомобиль проехал 68 км 770 м, за второй час проехал 72 км 880 м, за третий час проехал 84 км 650 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(101111)_2 + (10010)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

Вариант 3

1. Найдите корень уравнения $1234 - x = 567$.

2. Найдите значение выражения $x + 234$:

а) при $x = 987$; б) при $x = 1879$; в) при $x = 78\,654$.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно 982 + 357, а другое 223 + 568.

4. Вычислите разность: 100 000 — 9091.

5. За первый час автомобиль проехал 97 км 350 м, за второй час проехал 85 км 700 м, за третий час проехал 94 км 450 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(101101)_2 + (10111)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

Вариант 4

1. Найдите корень уравнения $3321 - x = 2654$.

2. Найдите значение выражения $x + 2654$:

а) при $x = 172$; б) при $x = 9999$; в) при $x = 68\,659$.

3. Найдите сумму двух чисел, одно из которых равно 654 + 654, а другое 666 + 716.

4. Вычислите разность: 2 000 000 — 225 041.

5. За первый час автомобиль проехал 63 км 560 м, за второй час проехал 74 км 670 м, за третий час проехал 85 км 670 м. Какое расстояние проехал автомобиль за все это время?

6.** Найдите, чему в двоичной системе равна сумма $(110001)_2 + (11011)_2$. Запишите результат в двоичной и десятичной записи.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. Четырьмя прямыми, проходящими вдоль линий разметки на клетчатой бумаге, разделите лист на восемь частей.

2. Прямая m делит плоскость на две полуплоскости. В одной из полуплоскостей отметили три точки, а в другой полуплоскости отметили четыре точки. Сколько всего можно провести отрезков с концами в отмеченных точках, которые пересекают прямую m?

3. На числовом луче с положительным направлением вправо число 1 изображено точкой E, удаленной от начала отсчета на 1 см. Точка A находится на расстоянии 198 мм от начала отсчета. От точки A вправо отложен отрезок AB длины 173 мм. Сколько точек, изображающих целые числа, лежит на этом отрезке?

4. Число 18 изображено на числовой оси точкой A, удаленной от начала отсчета на 30 см. На каком расстоянии от начала отсчета находится изображение числа 63?

5. На числовой прямой расстояние между точками, изображающими числа 11 и 17 равно, 18 см. Чему равно расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число 14?

Вариант 2

1. Четырьмя прямыми, проходящими вдоль линий разметки на клетчатой бумаге, разделите лист на девять частей.

2. Прямая m делит плоскость на две полуплоскости. В одной из полуплоскостей отметили четыре точки, а в другой полуплоскости отметили пять точки. Сколько всего можно провести отрезков с концами в отмеченных точках, которые пересекают прямую m?

3. На числовом луче с положительным направлением вправо число 1 изображено точкой E, удаленной от начала отсчета на 1 см. Точка A находится на расстоянии 197 мм от начала отсчета. От точки A вправо отложен отрезок AB длины 164 мм. Сколько точек, изображающих целые числа, лежит на этом отрезке?

4. Число 12 изображено на числовой оси точкой A, удаленной от начала отсчета на 30 см. На каком расстоянии от начала отсчета находится изображение числа 70?

5. На числовой прямой расстояние между точками, изображающими числа 13 и 19, равно 12 см. Чему равно расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число 16?

Вариант 3

1. Пятью прямыми, проходящими вдоль линий разметки на клетчатой бумаге, разделите лист на десять частей.

2. Прямая m делит плоскость на две полуплоскости. В одной из полуплоскостей отметили пять точек, а в другой полуплоскости отметили шесть точек. Сколько всего можно провести отрезков с концами в отмеченных точках, которые пересекают прямую m?

3. На числовом луче с положительным направлением вправо число 1 изображено точкой E, удаленной от начала отсчета на 1 см. Точка A находится на расстоянии 196 мм от начала отсчета. От точки A вправо отложен отрезок AB длины 155 мм. Сколько точек, изображающих целые числа, лежит на этом отрезке?

4. Число 24 изображено на числовой оси точкой A, удаленной от начала отсчета на 45 см. На каком расстоянии от начала отсчета находится изображение числа 56?

5. На числовой прямой расстояние между точками, изображающими числа 17 и 19, равно 22 см. Чему равно расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число 28?

Вариант 4

1. Пятью прямыми, проходящими вдоль линий разметки на клетчатой бумаге, разделите лист на двенадцать частей.

2. Прямая m делит плоскость на две полуплоскости. В одной из полуплоскостей отметили шесть точек, а в другой полуплоскости отметили семь точек. Сколько всего можно провести отрезков с концами в отмеченных точках, которые пересекают прямую m?

3. На числовом луче с положительным направлением вправо число 1 изображено точкой E, удаленной от начала отсчета на 1 см. Точка A находится на расстоянии 195 мм от начала отсчета. От точки A вправо отложен отрезок AB длины 146 мм. Сколько точек, изображающих целые числа, лежит на этом отрезке?

4. Число 28 изображено на числовой оси точкой A, удаленной от начала отсчета на 30 см. На каком расстоянии от начала отсчета находится изображение числа 98?

5. На числовой прямой расстояние между точками, изображающими числа 15 и 27, равно 24 см. Чему равно расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число 52?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1

1. Выполните умножение:

а) $317 \cdot 4$; б) $1804 \cdot 3$; в) $23\,051 \cdot 7$.

2. Выполните умножение:

а) $2478 \cdot 37$; б) $699 \cdot 301$; в) $50\,403 \cdot 809$.

3. Найдите, чему равно произведение двух чисел, первое из которых равно сумме $57 + 26$, а второе равно разности $122 - 75$.

4. Какое расстояние проедет автомобиль со скоростью 1750 м/мин за 2 часа 18 минут?

5.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равно произведение $(23)_4 \cdot (32)_4 \cdot (23)_4 \cdot (32)_4$.

Вариант 2

1. Выполните умножение:

а) $521 \cdot 4$; б) $2605 \cdot 3$; в) $34\,061 \cdot 7$.

2. Выполните умножение:

а) $3589 \cdot 37$; б) $588 \cdot 301$; в) $60\,504 \cdot 809$.

3. Найдите, чему равно произведение двух чисел, первое из которых равно сумме $59 + 27$, а второе равно разности $127 - 71$.

4. Какое расстояние проедет автомобиль со скоростью 1790 м/мин за 3 часа 8 минут?

5.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равно произведение $(13)_4 \cdot (31)_4 \cdot .(13)_4 \cdot (31)_4$.

Вариант 3.

1. Выполните умножение:

а) $337 \cdot 4$; б) $1703 \cdot 3$; в) $51\,023 \cdot 7$.

2. Выполните умножение:

а) $4691 \cdot 37$; б) $877 \cdot 301$; в) $70\,501 \cdot 809$.

3. Найдите, чему равно произведение двух чисел, первое из которых равно сумме $58 + 28$, а второе равно разности $121 - 76$.

4. Какое расстояние проедет автомобиль со скоростью 1820 м/мин за 2 часа 18 минут?

5.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равно произведение $(33)_4 \cdot (32)_4 \cdot (33)_4 \cdot (32)_4$.

Вариант 4

1. Выполните умножение:

а) $327 \cdot 4$; б) $2307 \cdot 3$; в) $35\,045 \cdot 7$.

2. Выполните умножение:

а) $5165 \cdot 37$; б) $466 \cdot 301$; в) $20\,307 \cdot 809$.

3. Найдите, чему равно произведение двух чисел, первое из которых равно сумме $63 + 33$, а второе равно разности $112 - 55$.

4. Какое расстояние проедет автомобиль со скоростью 1850 м/мин за 3 часа 19 минут?

5.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равно произведение $(12)_4 \cdot (21)_4 \cdot (12)_4 \cdot (21)_4$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1

1. Нарисуйте и обозначьте два луча с общей вершиной. Обозначьте получившийся угол. Укажите, какие плоские углы соответствуют этому углу и сколько таких углов.

2. На плоскости задан луч AB. В одной полуплоскости относительно прямой AB провели лучи AC и AD так, что $\angle BAC = 67°$, $\angle BAD = 32°$. Чему равна величина $\angle CAD$?

3. $\angle AMB$ составлен из $\angle AMC$ величиной $72°$ и $\angle CMB$ величиной $54°$. Чему равен угол между биссектрисами $\angle AMB$ и $\angle AMC$?

4. Какой угол образуют между собой минутная и часовая стрелки, когда часы показывают 8 часов 30 минут?

5. Сумма величин двух плоских углов, полученных при пересечении двух прямых, равна $18°$. Чему равны величины плоских углов, полученных при пересечении этих прямых?

Вариант 2

1. Нарисуйте и обозначьте три луча с общей вершиной. Сколько углов образуют эти лучи?

2. На плоскости задан луч AB. В одной полуплоскости относительно прямой AB провели лучи AC и AD так, что $\angle BAD = 38°$, $\angle DAC = 52°$. Чему равна величина $\angle CAB$?

3. Угол AMB составлен из угла AMC и угла CMB. Чему равен угол AMB, если угол между биссектрисами углов AMC и CMB равен $90°$?

4. Какой угол образуют между собой минутная и часовая стрелки, когда часы показывают 9 часов 30 минут?

5. Сумма величин трех плоских углов из четырех, полученных при пересечении двух прямых, равна $190°$. Чему равны величины плоских углов, полученных при пересечении этих прямых?

Вариант 3

1. Нарисуйте и обозначьте три луча с общей вершиной. Сколько плоских углов образуют эти лучи?

2. На плоскости задан луч AB. В одной полуплоскости относительно прямой AB провели лучи AC и AD так, что $\angle BAC = 33°$, $\angle BAD = 71°$. Чему равна величина $\angle DAC$?

3. Угол AMB составлен из угла AMC величиной $82°$ и угла CMB величиной $32°$. Чему равен угол между биссектрисами углов AMC и AMB?

4. Какой угол образуют между собой минутная и часовая стрелки, когда часы показывают 11 часов 30 минут?

5. Величина одного из четырех плоских углов, полученных при пересечении двух прямых, равна $18°$. Чему равны величины плоских углов, полученных при пересечении этих прямых?

Вариант 4

1. Нарисуйте две пересекающиеся прямые. Сколько углов образуют лучи этой прямой с началом в точке пересечения прямых?

2. На плоскости задан луч AB. В одной полуплоскости относительно прямой AB провели лучи AC и AD так, что $\angle BAC = 8°$, $\angle CAD = 91°$. Чему равна величина $\angle DAB$?

3. Угол AMB составлен из угла AMC и угла CMB. Чему равен угол AMB, если угол между биссектрисами углов CMB и AMC равен $70°$?

4. Какой угол образуют между собой минутная и часовая стрелки, когда часы показывают 6 часов 30 минут?

5. Разность величин двух углов из четырех, полученных при пересечении двух прямых, равна 18°. Чему равны величины плоских углов, полученных при пересечении этих прямых?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Вариант 1

1. Произведите деление: $(33 + 36) : 3$.

2. Разделите на 3 число $33 \cdot 3 + 17 \cdot 3 + 9 \cdot 6$.

3. Какую цифру нужно подставить вместо * в 1123 *, чтобы полученное число делилось на 5?

Сколько у задачи разных решений?

4. Найдите, какое наименьшее число конфет нужно добавить к 123 конфетам, чтобы после этого все конфеты можно было поровну разделить на шестерых.

5.** Найдите, какую цифру нужно подставить вместо *, чтобы числа 11* 2 *1 и 3*4 делились на 9.

Вариант 2

1. Произведите деление: $(55 + 60) : 5$.

2. Разделите на 4 число $44 \cdot 4 + 27 \cdot 4 + 7 \cdot 8$.

3. Какую цифру нужно подставить вместо * в 1123 *, чтобы полученное число делилось на 4?

Сколько у задачи разных решений?

4. Найдите, какое наименьшее число конфет нужно добавить к 123 конфетам, чтобы после этого все конфеты можно было поровну разделить на пятерых.

5.** Найдите, какую цифру нужно подставить вместо *, чтобы числа 11* 2*4 и 37* делились на 8.

Вариант 3

1. Произведите деление: $(44 + 48) : 4$.

2. Разделите на 2 число $37 \cdot 2 + 44 \cdot 2 + 5 \cdot 4$.

3. Какую цифру нужно подставить вместо * в 1123 *, чтобы полученное число делилось на 3?

Сколько у задачи разных решений?

4. Найдите, какое наименьшее число конфет нужно добавить к 123 конфетам, чтобы после этого все конфеты можно было поровну разделить на троих.

5.** Найдите, какую цифру нужно подставить вместо *, чтобы числа 19* 2*8 и 37* делились на 9.

Вариант 4

1. Произведите деление: $(66 + 78) : 6$.

2. Разделите на 7 число $33 \cdot 7 + 37 \cdot 7 + 8 \cdot 21$.

3. Какую цифру нужно подставить вместо * в 1123 *, чтобы полученное число делилось на 2?

Сколько у задачи разных решений?

4. Найдите, какое наименьшее число конфет нужно добавить к 123 конфетам, чтобы после этого все конфеты можно было поровну разделить на четверых.

5.** Найдите, какую цифру нужно подставить вместо *, чтобы числа 11* 3*4 и 32* делились на 8.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Вариант 1

1. Разделите с остатком 361 на 7.

2. Какой будет остаток от деления 2736 на 9?

3. Найдите остаток от деления $31 + 32 + 33 + 34 + 35$ на 11.

4. Найдите остаток от деления числа 4256 на 212.

5.* Найдите остаток от деления $(37 - 22) + (167 - 130)$ на 30.

Вариант 2

1. Разделите с остатком 412 на 9.

2. Какой будет остаток от деления 3456 на 9?

3. Найдите остаток от деления $41 + 42 + 43 + 44 + 45$ на 13.

4. Найдите остаток от деления числа 1345 на 211.

5.* Найдите остаток от деления $(56 - 23) + (164 - 127)$ на 30.

Вариант 3

1. Разделите с остатком 711 на 6.

2. Какой будет остаток от деления 4847 на 7?

3. Найдите остаток от деления $51 + 52 + 53 + 54 + 55$ на 7.

4. Найдите остаток от деления числа 6543 на 411.

5.* Найдите остаток от деления $(63 - 27) + (277 - 113)$ на 30.

Вариант 4

1. Разделите с остатком 487 на 7.

2. Какой будет остаток от деления 4444 на 9?

3. Найдите остаток от деления $32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37$ на 13.

4. Найдите остаток от деления числа 2222 на 412.

5.* Найдите остаток от деления $(84 - 66) + (266 - 134)$ на 40.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Вариант 1

1. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный треугольник с катетами в 8 и 10 клеточек и разделите его на четыре равных прямоугольных треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 62°. Найдите величины остальных углов этого треугольника.

3. Внутри прямого угла ABC провели лучи BM и BN так, что $\angle ABM = 21°$, $\angle CBN = 23°$. Чему равна величина угла MBN?

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если сумма двух его углов в три раза больше третьего угла.

5.* Прямая делит диагонали некоторого квадрата на четыре отрезка длины 12, 14, 16 и 18 сантиметров. Найдите длины диагоналей.

Вариант 2

1. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный треугольник с катетами в 8 и 4 клеточки и разделите его на четыре равных прямоугольных треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 22°. Найдите величины остальных углов этого треугольника.

3. Внутри прямого угла ABC провели лучи BK и BL так, что $\angle ABK = 22°$, $\angle CBL = 16°$. Чему равна величина угла KBL?

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если сумма двух его углов в четыре раза больше третьего угла.

5.* Прямая делит диагонали некоторого квадрата на четыре отрезка длины 8, 28, 28 и 48 сантиметров. Найдите длины диагоналей.

Вариант 3

1. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный треугольник с катетами в 2 и 12 клеточек и разделите его на четыре равных прямоугольных треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов равен $81°$. Найдите величины остальных углов этого треугольника.

3. Внутри прямого угла ACB провели лучи CM и CN так, что $\angle MCN = 21°$, $\angle BCM = 17°$. Чему равна величина угла NCA?

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если величина суммы двух его углов относится к величине третьего угла как один к пяти.

5.* Прямая делит диагонали некоторого квадрата на четыре отрезка длины 72, 48, 36 и 12 сантиметров. Найдите длины диагоналей.

Вариант 4

1. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный треугольник с катетами в 6 и 8 клеточек и разделите его на четыре равных прямоугольных треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике один из углов равен $41°$. Найдите величины остальных углов этого треугольника.

3. Внутри прямого угла ABC провели лучи BM и BN так, что $\angle ABM = 11°$, $\angle CBN = 17°$. Чему равна величина угла MBN?

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если сумма двух его углов в два раза больше третьего угла.

5.* Прямая делит диагонали некоторого квадрата на четыре отрезка длины 10, 12, 13 и 15 сантиметров. Найдите длины диагоналей.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$; б) $\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$;

в) $\frac{3}{4} : \frac{7}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7}$; г) $\left(\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7}\right) : \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}\right) : \frac{1}{2}$.

2. Чему равен x в равенстве $\frac{17}{3} : \frac{x}{3} = 1$?

3. Вычислите: $\frac{3}{5} : \frac{3}{4} - \frac{1}{4} : \frac{3}{8}$.

4. Вычислите: $\left(3 \cdot \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{5} - \left(\frac{5}{8} : \frac{2}{3}\right) : 2$.

5.* Даны выражения $\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{5}$ и $\frac{3}{2}$. Выясните, какое из них можно вычесть из другого (чтобы получилась положительная дробь), и найдите разность.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$;
б) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$;
в) $\frac{5}{4} : \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7}$;
г) $\left(\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{7}\right) : \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5}\right) : \frac{1}{3}$.

2. Чему равен x в равенстве $\frac{11}{4} : \frac{x}{4} = 1$?

3. Вычислите: $\frac{1}{2} : \frac{5}{8} - \frac{5}{7} : \frac{5}{4}$.

4. Вычислите: $\left(4 \cdot \frac{1}{5}\right) : \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{8} : \frac{2}{3}\right) : 2$.

5.* Даны выражения $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) : \frac{3}{5}$ и $\frac{3}{2}$. Выясните, какое из них можно вычесть из другого (чтобы получилась положительная дробь), и найдите разность.

Вариант 3

1. Вычислите:

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}$;
б) $\frac{7}{3} : \frac{2}{11}$;
в) $\frac{3}{5} : \frac{7}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7}$;
г) $\left(\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{11}\right) : \frac{1}{3} + \left(\frac{13}{6} \cdot \frac{3}{13}\right) : \frac{1}{3}$.

2. Чему равен x в равенстве $\frac{26}{7} : \frac{x}{7} = 1$?

3. Вычислите: $\frac{7}{5} : \frac{7}{4} - \frac{1}{5} : \frac{3}{10}$.

4. Вычислите: $\left(7 \cdot \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{8} : \frac{2}{5}\right) : 2$.

5.* Даны выражения $\left(\frac{8}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) : \frac{3}{5}$ и $\frac{3}{2}$. Выясните, какое из них можно вычесть из другого (чтобы получилась положительная дробь), и найдите разность.

Вариант 4

1. Вычислите:

а) $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11}$; б) $\frac{3}{7} : \frac{2}{5}$;

в) $\frac{11}{6} : \frac{7}{12} + \frac{2}{11} \cdot \frac{11}{7}$; г) $\left(\frac{11}{12} \cdot \frac{6}{11}\right) : \frac{1}{2} + \left(\frac{13}{6} \cdot \frac{3}{13}\right) : \frac{1}{2}$.

2. Чему равен x в равенстве $\frac{11}{9} : \frac{x}{9} = 1$?

3. Вычислите: $\frac{17}{20} : \frac{17}{10} - \frac{1}{8} : \frac{3}{4}$.

4. Вычислите: $\left(11 \cdot \frac{1}{9}\right) : \frac{2}{9} - \left(\frac{11}{8} : \frac{2}{3}\right) : 2$.

5.* Даны выражения $\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \frac{3}{5}$ и $\frac{3}{2}$. Выясните, какое из них можно вычесть из другого (чтобы получилась положительная дробь), и найдите разность.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Вариант 1

1. Выполните действия: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)$.

2. Вычислите: $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) - \frac{7}{8}$.

3. Найдите сумму:

а) $\frac{1}{7} + \frac{1}{17}$; б) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$; в) $\frac{3}{4} + \frac{1}{14}$.

4. Найдите разность:

а) $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$; б) $\frac{4}{9} - \frac{3}{11}$; в) $\frac{17}{48} - \frac{7}{24}$.

5.* В магазине за день продали $\frac{5}{9}$ содержимого из мешка, содержащего 21 кг крупы, $\frac{2}{3}$ содержимого из мешка, содержащего 24 кг крупы, $\frac{5}{6}$ содержимого из мешка, содержащего 40 кг крупы. Сколько всего крупы продали за этот день?

Вариант 2

1. Выполните действия: $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)$.

2. Вычислите: $\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)-\frac{8}{9}$.

3. Найдите сумму:

а) $\frac{1}{9}+\frac{1}{19}$; б) $\frac{5}{8}+\frac{7}{11}$; в) $\frac{3}{4}+\frac{2}{34}$.

4. Найдите разность:

а) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{9}-\frac{4}{13}$; в) $\frac{15}{26}-\frac{7}{13}$.

5.* В магазине за день продали $\frac{7}{10}$ содержимого из мешка, содержащего 24 кг сахара, $\frac{3}{15}$ содержимого из мешка, содержащего 33 кг сахара, $\frac{4}{25}$ содержимого из мешка, содержащего 30 кг сахара. Сколько килограммов сахара продали за этот день?

Вариант 3

1. Выполните действия: $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{4}\right)$.

2. Вычислите: $\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{4}\right)-\frac{7}{8}$.

3. Найдите сумму:

а) $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}$; б) $\frac{15}{16}+\frac{7}{8}$; в) $\frac{3}{41}+\frac{1}{24}$.

4. Найдите разность:

а) $\frac{1}{9}-\frac{1}{13}$; б) $\frac{3}{7}-\frac{2}{13}$; в) $\frac{11}{32}-\frac{3}{16}$.

5.* В магазине за день продали $\frac{7}{9}$ содержимого из мешка, содержащего 24 кг муки, $\frac{3}{4}$ содержимого из мешка, содержащего 34 кг муки, $\frac{4}{15}$ содержимого из мешка, содержащего 40 кг муки. Сколько килограммов муки продали за этот день?

Вариант 4

1. Выполните действия: $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)$.

2. Вычислите: $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{8}$.

3. Найдите сумму:

а) $\frac{1}{6}+\frac{1}{27}$; б) $\frac{11}{14}+\frac{7}{11}$; в) $\frac{4}{13}+\frac{13}{14}$.

4. Найдите разность:

а) $\frac{1}{15}-\frac{1}{17}$; б) $\frac{12}{19}-\frac{3}{8}$; в) $\frac{17}{18}-\frac{5}{6}$.

5.* В магазине за день продали $\frac{5}{21}$ содержимого из мешка, содержащего 18 кг риса, $\frac{3}{14}$ содержимого из мешка, содержащего 44 кг риса, $\frac{6}{35}$ содержимого из мешка, содержащего 30 кг риса. Сколько килограммов риса продали за этот день?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Вариант 1

1. Выразите в квадратных сантиметрах следующие площади:

а) $\frac{5}{8}$ м^2; б) 0,015 га; в) 580 мм^2; г) 38,5 дм^2.

2. Прямоугольный школьный двор размером 50 на 30 м решили покрыть квадратными плитками размером 50 на 50 см. Сколько таких плиток потребуется?

3. Разрежьте прямоугольник размером 25 на 4 см на четыре части, из которых можно составить квадрат.

4. Найдите площадь прямоугольника со сторонами 120 см и 3 дм. Квадрат имеет такую же площадь, как и прямоугольник. Определите длину стороны квадрата.

5. Прямоугольник имеет площадь 135 м^2. Одну его сторону увеличили в 5 раз, а другую уменьшили в 3 раза. Чему равна площадь нового прямоугольника?

Вариант 2

1. Выразите в квадратных метрах следующие площади:

а) $\frac{3}{4}$ км^2; б) 0,028 га; в) 23 500 см^2; г) 720 дм^2.

2. Длина обоев в рулоне равна 12 м, а ширина — 50 см. Сколько таких рулонов потребуется для оклейки стены длиной 8 м и высотой 3 м?

3. Разрежьте квадрат со стороной 5 см на четыре части, из которых можно составить прямоугольник с одной из сторон, равной 2 см.

4. Площадь прямоугольника равна 108 см^2. Найдите длины его сторон, если одна из них в 3 раза длиннее другой.

5. Прямоугольник имеет площадь 99 м^2. Одну его сторону увеличили в 2 раза, а другую уменьшили в 6 раз. Чему равна площадь нового прямоугольника?

Вариант 3

1. Выразите в квадратных дециметрах следующие площади:

а) $\frac{3}{5}$ м^2; б) 0,012 га; в) 850 мм^2; г) 240 см^2.

2. Прямоугольный пол размером 6 на 4 м решили покрыть квадратными плитками размером 25 на 25 см. Сколько таких плиток потребуется?

3. Разрежьте прямоугольник размером 4 на 9 см на три части, из которых можно составить квадрат.

4. Найдите площадь прямоугольника со сторонами 160 см и 4 дм. Квадрат имеет такую же площадь, как и прямоугольник. Определите длину стороны квадрата.

5. Прямоугольник имеет площадь 120 м^2. Одну его сторону увеличили в 4 раза, а другую уменьшили в 3 раза. Чему равна площадь нового прямоугольника?

Вариант 4

1. Выразите в квадратных миллиметрах следующие площади:

а) $\frac{4}{125}$ м^2; б) $3\frac{7}{250}$ дм^2; в) 35,2 см^2; г) 0,016 дм^2.

2. Длина обоев в рулоне равна 10 м, а ширина — 60 см. Сколько таких рулонов потребуется для оклейки стены длиной 6 м и высотой 3 м?

3. Разрежьте квадрат со стороной 6 см на три части, из которых можно составить прямоугольник с одной из сторон, равной 4 см.

4. Площадь прямоугольника равна 98 см^2. Найдите длины его сторон, если одна из них в 2 раза длиннее другой.

5. Прямоугольник имеет площадь 125 м^2. Одну его сторону увеличили в 2 раза, а другую уменьшили в 5 раз. Чему равна площадь нового прямоугольника?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

Вариант 1

1. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 0,0071 с недостатком с точностью до 0,001?

2. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 2,00089 с избытком с точностью до 0,0001?

3. Известно, что число $\frac{2}{3}$ больше 0,666 и меньше 0,667. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{2}{3}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01?

4. Известно, что число $\frac{2}{7}$ больше 0,2857 и меньше 0,2858. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{2}{7}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01;

в) с недостатком с точностью до 0,0001;

г) с избытком с точностью до 0,0001?

5. Запишите десятичную дробь 14,0502 в виде суммы разрядных единиц.

6. Запишите:

а) десятичную дробь $\frac{6}{100}$ в одну строку;

б) смешанную дробь $5\frac{9}{1000}$ в одну строку;

в) десятичную дробь 0,025 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем;

г) десятичную дробь 5,016 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем.

Вариант 2

1. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 0,00432 с недостатком с точностью до 0,0001?

2. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 9,876 с избытком с точностью до 0,001?

3. Известно, что число $\frac{4}{9}$ больше 0,444 и меньше 0,445. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{4}{9}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01?

4. Известно, что число $\frac{3}{7}$ больше 0,4285 и меньше 0,4286. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{3}{7}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01;

в) с недостатком с точностью до 0,0001;

г) с избытком с точностью до 0,0001?

5. Запишите десятичную дробь 50,6071 в виде суммы разрядных единиц.

6. Запишите:

а) десятичную дробь $\frac{17}{1000}$ в одну строку;

б) смешанную дробь $4\frac{7}{100}$ в одну строку;

в) десятичную дробь 0,012 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем;

г) десятичную дробь 2,045 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем.

Вариант 3

1. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 0,0836 с недостатком с точностью до 0,001?

2. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 3,00026 с избытком с точностью до 0,0001?

3. Известно, что число $\frac{5}{6}$ больше 0,833 и меньше 0,834. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{5}{6}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01?

4. Известно, что число $\frac{4}{7}$ больше 0,5714 и меньше 0,5715. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{4}{7}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01;

в) с недостатком с точностью до 0,0001;

г) с избытком с точностью до 0,0001?

5. Запишите десятичную дробь 23,0805 в виде суммы разрядных единиц.

6. Запишите:

а) десятичную дробь $\frac{39}{100}$ в одну строку;

б) смешанную дробь $3\frac{21}{1000}$ в одну строку;

в) десятичную дробь 0,075 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем;

г) десятичную дробь 4,032 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем.

Вариант 4

1. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 0,00721 с недостатком с точностью до 0,0001?

2. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа 6,543 с избытком с точностью до 0,001?

3. Известно, что число $\frac{7}{9}$ больше 0,777 и меньше 0,778. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{7}{9}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01?

4. Известно, что число $\frac{5}{7}$ больше 0,7142 и меньше 0,7143. Какая десятичная дробь является десятичным приближением числа $\frac{5}{7}$:

а) с недостатком с точностью до 0,01;

б) с избытком с точностью до 0,01;

в) с недостатком с точностью до 0,0001;

г) с избытком с точностью до 0,0001?

5. Запишите десятичную дробь 30,8092 в виде суммы разрядных единиц.

6. Запишите:

а) десятичную дробь $\frac{29}{1000}$ в одну строку;

б) смешанную дробь $7\frac{13}{100}$ в одну строку;

в) десятичную дробь 0,048 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем;

г) десятичную дробь 4,075 в виде обыкновенной дроби с наименьшим знаменателем.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16

Вариант 1

1. Найдите сумму:

а) 1,3 + 2,79; б) 0,25 + 0,068;

в) 23,47 + 4,916; г) 583,6 + 8,82.

2. Найдите разность:

а) 5,4 – 2,15; б) 0,032 – 0,0043;

в) 78,34 – 9,867; г) 36,5 – 0,739.

3. Стороны треугольника имеют следующие длины: 3,43 см; 5,98 см; 4,11 см. Найдите периметр треугольника.

4. Найдите неизвестное число x, если $x - 5{,}319 = 7{,}2$.

5. Как изменится разность двух чисел, если уменьшаемое увеличить на 7,384, а вычитаемое увеличить на 0,0989?

Вариант 2

1. Найдите сумму:

а) 3,1 + 2,97; б) 0,52 + 0,086;

в) 32,74 + 9,461; г) 856,3 + 2,28.

2. Найдите разность:

а) 4,5 – 1,25; б) 0,023 – 0,0034;

в) 87,43 – 8,976; г) 53,6 – 0,973.

3. Стороны треугольника имеют следующие длины: 2,34 см; 5,67 см; 4,89 см. Найдите периметр треугольника.

4. Найдите неизвестное число x, если $x + 1{,}593 = 2{,}7$.

5. Как изменится разность двух чисел, если уменьшаемое увеличить на 3,847, а вычитаемое уменьшить на 0,831?

Вариант 3

1. Найдите сумму:
а) $5{,}6 + 1{,}82$; б) $0{,}43 + 0{,}076$;
в) $14{,}28 + 3{,}853$; г) $674{,}5 + 3{,}62$.

2. Найдите разность:
а) $6{,}2 - 4{,}17$; б) $0{,}046 - 0{,}0074$;
в) $26{,}18 - 7{,}239$; г) $24{,}3 - 0{,}658$.

3. Стороны треугольника имеют следующие длины: 2,16 см; 3,71 см; 4,38 см. Найдите периметр треугольника.

4. Найдите неизвестное число x, если $x - 2{,}934 = 3{,}5$.

5. Как изменится разность двух чисел, если уменьшаемое уменьшить на 1,345, а вычитаемое увеличить на 0,0678?

Вариант 4

1. Найдите сумму:
а) $6{,}2 + 2{,}83$; б) $0{,}34 + 0{,}067$;
в) $41{,}82 + 6{,}194$; г) $638{,}2 + 1{,}87$.

2. Найдите разность:
а) $2{,}6 - 2{,}51$; б) $0{,}064 - 0{,}0047$;
в) $82{,}61 - 7{,}689$; г) $65{,}3 - 0{,}397$.

3. Стороны треугольника имеют следующие длины: 3,42 см; 6,75 см; 8,94 см. Найдите периметр треугольника.

4. Найдите неизвестное число x, если $x + 3{,}845 = 4{,}2$.

5. Как изменится разность двух чисел, если уменьшаемое уменьшить на 1,738, а вычитаемое уменьшить на 0,849?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17

Вариант 1

1. Найдите:
а) 16% от 375; б) 128% от 25.

2. Найдите:
а) 48% от 1 м 25 см; б) 3% от 2 кг 500 г;
в) 60% от 5 ч 25 мин; г) 0,8% от 62 см 5 мм.

3. Найдите x, если 7% от x равны 28.

4. Какое из значений больше: 20% от 25 или 25% от 20?

5. Сколько соли нужно добавить к 900 граммам 5%-го водного раствора соли, чтобы получить 10%-й раствор?

Вариант 2

1. Найдите:

а) 24% от 125; б) 115% от 40.

2. Найдите:

а) 36% от 1 м 75 см; б) 25% от 1 кг 240 г;

в) 44% от 3 ч 45 мин; г) 2,4% от 12 м 50 см.

3. Найдите x, если 8% от x равны 32.

4. Какое из значений больше: 30% от 45 или 45% от 30?

5. Сколько воды нужно добавить к 300 граммам 10%-го раствора сахара, чтобы получить раствор, содержащий 6% сахара?

Вариант 3

1. Найдите:

а) 8% от 225; б) 125% от 36.

2. Найдите:

а) 25% от 1 м 28 см; б) 6% от 1 кг 200 г;

в) 40% от 2 ч 55 мин; г) 1,6% от 27 дм 5 см.

3. Найдите x, если 9% от x равны 27.

4. Какое из значений больше: 28% от 32 или 32% от 28?

5. Сколько сахара нужно добавить к 375 граммам 4%-го раствора сахара, чтобы получить 20%-й раствор?

Вариант 4

1. Найдите:

а) 16% от 275; б) 136% от 75.

2. Найдите:

а) 75% от 2 м 24 см; б) 8% от 2 кг 125 г;

в) 35% от 2 ч 40 мин; г) 3,2% от 32 дм 5 см.

3. Найдите x, если 11% от x равны 33.

4. Какое из значений больше: 35% от 36 или 36% от 35?

5. Сколько воды нужно добавить к 250 граммам 8%-го раствора соли, чтобы получить раствор, содержащий 5% соли?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18

Вариант 1

1. Известно, что длины катетов прямоугольного треугольника относятся как 16 : 12, а длина гипотенузы равна 15 см. Найдите длины катетов.

2. Найдите длину половины окружности радиуса 21 см, предполагая, что $\pi \approx \frac{22}{7}$.

3. В круге радиуса 7 см вырезали кружок радиуса 3 см. Найдите площадь оставшейся части.

4. Пень имеет форму цилиндра с диаметром 70 см и высотой 0,5 м. Найдите объем этого пня.

5.* При уменьшении радиуса некоторого круга на 2 см его площадь уменьшается на 12π см^2. Найдите радиус этого круга.

6.** У воздушного шарика с внешним радиусом 10 см толщина оболочки 1 мм. Найдите приближенно объем воздуха, содержащегося в этом шарике, с точностью до 1 см^3.

Вариант 2

1. Известно, что длины катетов прямоугольного треугольника относятся как 3 : 1, а его площадь равна 24 см^2. Найдите длины катетов.

2. Найдите длину четверти окружности радиуса 15 см, предполагая, что $\pi \approx 3{,}2$.

3. В круге радиуса 5 см вырезали квадрат со стороной 7 см. Найдите площадь оставшейся части.

4. Как изменится объем цилиндра, если увеличить радиус основания в 4 раза, а высоту уменьшить в 8 раз?

5.* При увеличении радиуса некоторого круга на 2 см его площадь возрастает на 44π см^2. Найдите радиус этого круга.

6.** Толщина атмосферы некоторой планеты в 10 раз меньше диаметра этой планеты. Во сколько раз объем атмосферы меньше объема планеты?

Вариант 3

1. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 см.

2. Что больше: длина некоторой окружности или периметр квадрата, сторона которого равна диаметру окружности?

3. Предполагая, что $\pi \approx \frac{22}{7}$, найдите радиус круга, площадь которого равна $38\frac{1}{2}$ см^2.

4. Бревно имеет диаметр 22 см, причем толщина коры равна 1 см. Какую часть объема этого бревна составляет кора?

5.* При уменьшении радиуса некоторого круга на 3 см его площадь уменьшается на 15π см^2. Найдите радиус этого круга.

6.** Шар радиуса 1 м требуется покрыть пластмассовой оболочкой толщиной 1 см. Хватит ли для этого 125 дм^3 материала?

Вариант 4

1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 см, а один из катетов — 6 см.

2. Предполагая, что $\pi \approx 3{,}2$, найдите радиус окружности, длина которой равна 64 см.

3. В квадрате со стороной 10 см вырезали круглое отверстие диаметром 8 см. Найдите площадь оставшейся части.

4. Стакан имеет форму цилиндра, внутренний диаметр которого равен 4 см, а высота — 10 см. Хватит ли двух литров чая, чтобы наполнить 16 таких стаканов?

5.* При увеличении радиуса некоторого круга на 3 см его площадь возрастает на 21π см^2. Найдите радиус этого круга.

6.** Толщина атмосферы некоторой планеты составляет три десятых радиуса этой планеты. Что больше: объем планеты или объем атмосферы?

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

1. Запишите название натурального числа 102 003 000.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 739 081.

3. Запишите числа 2^5, 3^3, 4^2, 5^2 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 4^4.

5.* Укажите длительность недели в минутах с недостатком с точностью до 1000 минут.

Вариант 2

1. Запишите название натурального числа 7 000 500 201.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 605 493.

3. Запишите числа 6^2, 3^3, 5^2, 4^3 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 3^5.

5.* Укажите длительность недели в минутах с избытком с точностью до 1000 минут.

Вариант 3

1. Запишите название натурального числа 6 543 323 311.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 802 334.

3. Запишите числа 7^2, 3^4, 5^3, 4^4 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 2^7.

5.* Укажите длительность января в часах с избытком с точностью до 100 часов.

Вариант 4

1. Запишите название натурального числа 9 876 543 421.

2. Представьте в виде суммы произведений однозначных чисел на степени числа 10 натуральное число 798 645.

3. Запишите числа 8^2, 2^8, 5^3, 4^5 в порядке возрастания.

4. Найдите, чему равно 5^4.

5.* Укажите длительность марта в часах с недостатком с точностью до 100 часов.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 40087063020.

2. Отрезок MN составлен из двух отрезков ML и LN. Известно, что $|MN|$ = 1 м 37 см 3 мм, $|NL|$ = 76 см 8 мм. Найдите длину отрезка ML.

3. Вычислите сумму: 589 342 + 714 959 + 135 107.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*57 + 3*4 + 21* = *343.$$

5. Сумма двух чисел равна 749, а их разность равна 109. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(31)_4 + (103)_4$.

Вариант 2

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 5070038090.

2. Отрезок MN составлен из двух отрезков ML и LN. Известно, что $|MN|$ = 1м 58 см 4 мм, $|NL|$ = 69 см 7 мм. Найдите длину отрезка ML.

3. Вычислите сумму: 473 819 + 356 234 + 210 518.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*26 + 9*5 + 84* = *244.$$

5. Сумма двух чисел равна 853, а их разность равна 73. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(23)_4 + (111)_4$.

Вариант 3

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 70800043052.

2. Отрезок KS составлен из двух отрезков KP и PS. Известно, что $|KS|$ = 3м 77 см 5 мм, $|SP|$ = 1 м 89 см 7 мм. Найдите длину отрезка KP.

3. Вычислите сумму: 598 766 + 554 677 + 113 487.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*79 + 1*1 + 63* = *425.$$

5. Сумма двух чисел равна 735, а их разность равна 123. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(223)_4 + (321)_4$.

Вариант 4

1. Запишите в виде суммы произведений цифр и различных разрядных единиц натуральное число 2130030008.

2. Отрезок AC составлен из двух отрезков AB и BC. Известно, что $|AC| = 5$ м 14 см 4 мм, $|CB| = 3$ м 69 см 7 мм. Найдите длину отрезка BA.

3. Вычислите сумму: 73 485 + 356 442 + 845 623.

4. Восстановите пример на сложение, подставив вместо звездочек нужные цифры:

$$*56 + 5*8 + 71* = *205.$$

5. Сумма двух чисел равна 411, а их разность равна 143. Найдите эти числа.

6.** Найдите, чему в системе счисления с основанием 4 равна сумма $(323)_4 + (333)_4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1

1. Выполните умножение: $578 \cdot 694$.

2. Найдите произведение: $39 \cdot 41 \cdot 43$.

3. Найдите значение выражения $9743 \cdot 12 + 12 \cdot 250 + 17 \cdot 12$.

4.* Восстановите пример, поставив вместо звездочек нужные цифры:

$$1*7 \cdot 5* = 6731.$$

5. Вычислите: $3842^2 - 3841^2$.

6.** Найдите, чему в двоичной системе счисления равно произведение $(101)_2 \cdot (1100)_2$.

Вариант 2

1. Выполните умножение: $793 \cdot 668$.

2. Найдите произведение: $33 \cdot 41 \cdot 49$.

3. Найдите значение выражения $4536 \cdot 21 + 21 \cdot 430 + 34 \cdot 21$.

4.* Восстановите пример, поставив вместо звездочек нужные цифры:

$$1{*}9 \cdot 4{*} = 6811.$$

5. Вычислите: $2987^2 - 2986^2$.

6.** Найдите, чему в двоичной системе счисления равно произведение $(110)_2 \cdot (1001)_2$.

Вариант 3

1. Выполните умножение: $857 \cdot 496$.

2. Найдите произведение: $37 \cdot 63 \cdot 24$.

3. Найдите значение выражения $7621 \cdot 17 + 17 \cdot 360 + 17 \cdot 19$.

4.* Восстановите пример, поставив вместо звездочек нужные цифры:

$$1{*}3 \cdot 4{*} = 6251.$$

5. Вычислите: $2348^2 - 2347^2$.

6.** Найдите, чему в двоичной системе счисления равно произведение $(101)_2 \cdot (1010)_2$.

Вариант 4

1. Выполните умножение: $397 \cdot 688$.

2. Найдите произведение: $52 \cdot 26 \cdot 73$.

3. Найдите значение выражения $6487 \cdot 19 + 19 \cdot 470 + 43 \cdot 19$.

4.* Восстановите пример, поставив вместо звездочек нужные цифры:

$$2{*}9 \cdot 3{*} = 8126.$$

5. Вычислите: $3789^2 - 3788^2$.

6.** Найдите, чему в двоичной системе счисления равно произведение $(110)_2 \cdot (1101)_2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1

1. Не выполняя деления, выясните, делится ли на 9 нацело число 4 323 955 554.

2. Найдите остаток и неполное частное при делении с остатком числа 100 000 на 17.

3.* Найдите последнюю цифру в десятичной записи числа, равного $3^{100} \cdot 2^{60}$.

4. Найдите остаток от деления числа $(3 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 37 - 6)$ на 14.

5.* Найдите и запишите в системе счисления с основанием 4 сумму $(1231)_4 + (312)_4$.

Вариант 2

1. Не выполняя деления, выясните, делится ли на 3 нацело число 3 177 776 352.

2. Найдите остаток и неполное частное при делении с остатком числа 100 000 на 19.

3.* Найдите последнюю цифру в десятичной записи числа, равного $3^{50} \cdot 2^{90}$.

4. Найдите остаток от деления числа $(5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 39 - 11)$ на 18.

5.* Найдите и запишите в системе счисления с основанием 4 сумму $(1312)_4 + (231)_4$.

Вариант 3

1. Не выполняя деления, выясните, делится ли на 9 нацело число 5 162 944 445.

2. Найдите остаток и неполное частное при делении с остатком числа 100 000 на 13.

3.* Найдите последнюю цифру в десятичной записи числа, равного $3^{70} \cdot 2^{100}$.

4. Найдите остаток от деления числа $(7 \cdot 11 \cdot 20 \cdot 36 - 12)$ на 15.

5.* Найдите и запишите в системе счисления с основанием 4 сумму $(2131)_4 + (123)_4$.

Вариант 4

1. Не выполняя деления, выясните, делится ли на 3 нацело число 5 122 227 532.

2. Найдите остаток и неполное частное при делении с остатком числа 100 000 на 23.

3.* Найдите последнюю цифру в десятичной записи числа, равного $3^{80} \cdot 2^{70}$.

4. Найдите остаток от деления числа $(5 \cdot 9 \cdot 17 \cdot 28 - 7)$ на 12.

5.* Найдите и запишите в системе счисления с основанием 4 сумму $(2113)_4 + (321)_4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1

1. Найдите разность $\left(\frac{21}{28} - \frac{5}{12}\right)$.

2. Найдите сумму $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$.

3. Выполните действия: $\left(5\frac{5}{12} - 4\frac{1}{3}\right) : 3\frac{1}{4}$.

4. Из полной бочки с водой отлили сначала $\frac{2}{5}$, затем $\frac{1}{3}$ от всего объема воды, после чего в ней осталось 24 литра воды. Сколько воды вмещает эта бочка?

5.* Найдите значение выражения $\left(\left(3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{6} + \frac{5}{4}\right) \cdot 2\frac{1}{3}$.

Вариант 2

1. Найдите разность $\left(\frac{14}{24} - \frac{7}{36}\right)$.

2. Найдите сумму $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$.

3. Выполните действия: $\left(1\frac{5}{12} - \frac{3}{8}\right) : 3\frac{1}{3}$.

4. Из полной бочки с водой отлили сначала $\frac{1}{5}$, затем $\frac{2}{3}$ от всего объема воды, после чего в ней осталось 14 литров воды. Сколько воды вмещает эта бочка?

5.* Найдите значение выражения $\left(\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right) : \frac{7}{12} + 1\frac{3}{7}\right) \cdot 1\frac{3}{4}$.

Вариант 3

1. Найдите разность $\left(\frac{15}{25} - \frac{7}{15}\right)$.

2. Найдите сумму $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$.

3. Выполните действия: $\left(1\frac{2}{7} - \frac{7}{8}\right) : 5\frac{3}{4}$.

4. Из полной бочки с водой отлили сначала $\frac{3}{5}$, затем $\frac{2}{7}$ от всего объема воды, после чего в ней осталось 8 литров воды. Сколько воды вмещает эта бочка?

5.* Найдите значение выражения $\left(\left(3\frac{1}{3} - 1\frac{2}{5}\right) : 3\frac{2}{9} + 1\frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{3}{7}$.

Вариант 4

1. Найдите разность $\left(\frac{24}{30}-\frac{11}{25}\right)$.

2. Найдите сумму $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{7}+\frac{8}{9}$.

3. Выполните действия: $\left(1\frac{3}{5}-\frac{7}{9}\right):2\frac{7}{15}$.

4. Из полной бочки с водой отлили сначала $\frac{4}{5}$, затем $\frac{1}{7}$ от всего объема воды, после чего в ней осталось 6 литров воды. Сколько воды вмещает эта бочка?

5.* Найдите значение выражения $\left(\left(2\frac{1}{5}-1\frac{2}{3}\right):\frac{7}{15}+2\frac{1}{4}\right)\cdot 5\frac{3}{5}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1

1. Запишите в виде десятичной дроби число

$3\cdot\frac{1}{20}+6\cdot\frac{1}{30}+5+\frac{1}{10000}$.

2. Запишите с помощью десятичных дробей:

а) 1 кг 32 г; б) 30 т 201 кг 73 г.

3. Во сколько раз увеличится площадь прямоугольника, если одна его сторона увеличилась в 1,7 раза, вторая — в 2,41 раза?

4. Вычислите: $2{,}3\cdot 1{,}34-0{,}01\cdot 25{,}3$.

5. Найдите частное:

а) $0{,}7:125$; б) $1{,}8:75$.

Вариант 2

1. Запишите в виде десятичной дроби число

$4\cdot\frac{1}{200}+72+\frac{2}{400}+\frac{3}{60}$.

2. Запишите с помощью десятичных дробей:

а) 11 км 2 дм; б) 4м 3 см 1 мм.

3. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его сторона увеличится в 3,62 раза?

4. Вычислите: $3{,}71\cdot 2{,}6-0{,}12\cdot 2{,}03$.

5. Найдите частное:

а) $3{,}1:250$; б) $28{,}07:35$.

Вариант 3

1. Запишите в виде десятичной дроби число
$\frac{2}{25} + 6 \cdot \frac{1}{100} + 3 + \frac{1}{500}$.

2. Запишите с помощью десятичных дробей:
а) 2 км 11 мм; б) 3 ч 33 мин.

3. Во сколько раз увеличится площадь прямоугольника, если одна его сторона увеличилась в 7,1 раза, вторая — в 1,24 раза?

4. Вычислите: $1{,}32 \cdot 4{,}6 - 5{,}3 \cdot 0{,}21$.

5. Найдите частное:
а) 4,5 : 180; б) 0,91 : 65 .

Вариант 4

1. Запишите в виде десятичной дроби число
$12 \cdot \frac{1}{30} + 2 + \frac{31}{100} + \frac{1}{125}$.

2. Запишите с помощью десятичных дробей:
а) 3 кг 12 мг; б) 2 мин 39 сек.

3. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его сторона увеличится в 2,36 раза?

4. Вычислите: $3{,}12 \cdot 2{,}6 - 3{,}5 \cdot 0{,}74$.

5. Найдите частное:
а) 6,3 : 140; б) 1,08 : 72.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1

1. Найдите 20% от 20.

2. Найдите 35,5% от 75 кг.

3. На выборах капитана команды приняло участие 16 игроков. 3 игрока предложили кандидатуру Иванова, 7 — кандидатуру Петрова и остальные — кандидатуру Сидорова.

Представьте результаты голосования в виде таблицы и столбчатой диаграммы.

4. На карте масштабом 1 : 20 000 расстояние между двумя населенными пунктами 12 см. Чему равно расстояние между этими пунктами на местности?

5. Велосипедист проехал 30% пути, после чего ему осталось проехать еще 35 км. Сколько километров составляет весь путь?

Вариант 2

1. Найдите 40% от 80 рублей.

2. Найдите 46,4% от 25.

3. Контрольную работу писали 25 учеников. 6 учеников получили тройки, 8 — четверки, остальные — пятерки.

Представьте результаты в виде таблицы и столбчатой диаграммы.

4. Какую длину будет иметь коридор длиной 60 м на чертеже здания в масштабе 1 : 200?

5. Путник прошел 55% пути, после чего ему осталось пройти еще 9 км. Сколько километров составляет весь путь?

Вариант 3

1. Найдите 30% от 40.

2. Найдите 26,6% от 55 кг.

3. При опросе двадцати покупателей магазина оказалось, что 8 человек предпочитают чай, 5 — кофе, а остальным — все равно.

Представьте результаты опроса в виде таблицы и столбчатой диаграммы.

4. Расстояние в 15 км изображено на карте отрезком длины 3 см. Каков масштаб карты?

5. Пшеницей занято 48% площади поля, а остальные 13 га — картофелем. Сколько гектаров засеяно пшеницей?

Вариант 4

1. Найдите 60% от 70 рублей.

2. Найдите 52,4% от 65.

3. На ферме 40 голов скота. Среди них 14 коров и 8 лошадей, а остальные — овцы.

Представьте результаты в виде таблицы и столбчатой диаграммы.

4. Каков масштаб чертежа, если отверстие диаметром 2 мм изображено на чертеже окружностью радиуса 2 см?

5. Раствор содержит 12% соли и 176 г воды. Сколько граммов соли в растворе?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8 (ИТОГОВАЯ)

Вариант 1

1. В двух альбомах 2317 почтовых марок, причем во втором альбоме на 189 марок больше, чем в первом. Сколько марок в каждом альбоме?

2. Плоский угол ABC составлен из двух плоских углов величиной по $132°$. В части плоскости, дополнительной к плоскому углу ABC, провели два луча BM и BN так, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Чему равна величина угла MBN?

3. Найдите сумму всех натуральных чисел, которые больше 990 и меньше 1010.

4. Водитель 2 часа 12 минут ехал со скоростью 72 км/час, а затем 1 час 36 минут со скоростью 84 км/час. Какое расстояние он проехал за все это время?

5. Сколько нужно свежих грибов, чтобы получить $2\frac{3}{7}$ кг сушеных грибов, если при сушке грибы теряют 88% своей массы?

Вариант 2

1. В двух книжных шкафах стоит 1337 книг, причем во втором шкафу на 129 книг меньше, чем в первом. Сколько книг в каждом шкафу?

2. Плоский угол ABC составлен из двух плоских углов величиной по $126°$. В части плоскости, дополнительной к плоскому углу ABC, провели два луча BM и BN так, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Чему равна величина угла MBC?

3. Найдите сумму всех натуральных чисел, которые больше 790 и меньше 810.

4. Водитель 3 часа 24 минуты ехал со скоростью 74 км/час, а затем 1 час 18 минут со скоростью 92 км/час. Какое расстояние он проехал за все это время?

5. Сколько нужно свежей малины, чтобы получить $1\frac{4}{9}$ кг сушеной малины, если при сушке малина теряет 82% своей массы?

Вариант 3

1. В двух томах сочинений А.П. Чехова 1189 страниц, причем в первом томе на 123 страницы больше, чем во втором. Сколько страниц в каждом томе?

2. Плоский угол BAD составлен из двух плоских углов BAC и CAD величиной по $114°$. Внутри плоского угла BAD провели два луча AM и AN так, что $\angle BAM = \angle MAN = \angle NAD$. Чему равна величина угла CAN?

3. Найдите сумму всех натуральных чисел, которые больше 895 и меньше 915.

4. Велосипедист 1 час 33 минуты ехал со скоростью 12 км/час, а затем 1 час 27 минут со скоростью 16 км/час. Какое расстояние он проехал за все это время?

5. В 120 г раствора содержится 5% сахара. Сколько процентов сахара будет в растворе, если добавить к нему 30 г воды?

Вариант 4

1. В учебнике математики 683 задачи по алгебре и геометрии, причем задач по геометрии на 107 меньше, чем по алгебре. Сколько в учебнике задач по алгебре и сколько — по геометрии?

2. Плоский угол BAD составлен из двух плоских углов BAC и CAD величиной по $123°$. Внутри плоского угла BAD провели два луча AM и AN так, что $\angle BAM = \angle MAN = \angle NAD$. Чему равна величина угла MAC?

3. Найдите сумму всех натуральных чисел, которые больше 685 и меньше 705.

4. Туристы шли 2 часа 42 минуты со скоростью 5 км/час, а затем 1 час 48 минут со скоростью 4 км/час. Какое расстояние они прошли за все это время?

5. В 140 г раствора содержится 5% соли. Сколько граммов воды нужно добавить к этому раствору, чтобы содержание соли уменьшилось до 4%?

ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. 1. Например, *DFPST*, *FPSTD*, *PSTDF*. **2.** *NO*, *PK*. **3.** 5. **4.**** *Указание*. При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

Вариант 2. 1. Например, *MPFBAT*, *PFBATM*, *FBATMP*. **2.** *OP*, *QL*. **3.** 3. **4.**** *Указание*. При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

Вариант 3. 1. Например, *MPFBA*, *PFBAM*, *FBAMP*, *BAMPF*. **2.** *OP*, *PQ*. **3.** 3. **4.**** *Указание*. При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

Вариант 4. 1. Например, *CFKA*, *FKAC*, *KACF*, *ACFK*. **2.** *OP*, *PQ*, *QR*. **3.** 3. **4.**** *Указание*. При перегибании чертежа по вертикальной или по горизонтальной линии сетки, проходящей через центр окружности, узловые точки, лежащие на окружности, должны совместиться с узловой точкой этой окружности.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. 1. 3150 м и 235 м. **2.** 1440. **3.** 60 г. **4.** а) 3; б) 2; в) 9. **5.** 3.

Вариант 2. 1. а) 5760 м; б) 663 м. **2.** 2880. **3.** 80 г. **4.** а) 2; б) 4; в) 7. **5.** 3.

Вариант 3. 1. 2950 м и 454 м. **2.** 720. **3.** 80 г. **4.** а) 4; б) 6; в) 1. **5.** 3.

Вариант 4. 1. 10050 м и 2435 м. **2.** 744. **3.** 160 г. **4.** а) 5; б) 2; в) 3. **5.** 3.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. 1. а) 144; б) 128; в) 256; г) 3125; д) 10 816. **2.** а) $7\cdot10^3 + 6\cdot10^2 + 6\cdot10^1 + 4$; б) $5\cdot10^4 + 4\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10^1 + 1$;

в) $9 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4$. **3.** 15 344; 14 889; 9999; 2245; 1851; 388. **4.** 1274; 1414; 1987; 9807; 9999; 66 013. **5.** 99 и 124 487.

Вариант 2. 1. а) 121; б) 64; в) 81; г) 15 625; д) 10 201. **2.** а) $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1$; б) $2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$; в) $6 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5$. **3.** 14 999; 14 998; 9999; 2175; 1599; 391. **4.** 987; 1204; 1234; 9999; 56 003; 90 807. **5.** 99 и 123 987.

Вариант 3. 1. а) 169; б) 256; в) 1296; г) 729; д) 13 225. **2.** а) $9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 4$; б) $7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$; в) $8 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1$. **3.** 991; 1599; 2175; 9999; 27 989; 27 998. **4.** 14 567; 14 467; 9999; 4321; 1654; 897. **5.** 112 387 и 99.

Вариант 4. 1. а) 361; б) 1024; в) 625; г) 243; д) 40 401. **2.** а) $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6$; б) $4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5$; в) $7 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9$. **3.** 991; 1165; 1999; 9919; 55 999; 56 898. **4.** 76 999; 76 898; 9119; 2199; 1166; 981. **5.** 111 и 111 199.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. 2. 9 см. **3.** 14 см. **4.** 280 мм. **5.** 45 мм.
Вариант 2. 2. 13 см. **3.** 34 см. **4.** 631 мм. **5.** 30 мм.
Вариант 3. 2. 7 см. **3.** 28 см. **4.** 1074 мм. **5.** 20 мм.
Вариант 4. 2. 9 см. **3.** 48 см. **4.** 582 мм. **5.** 40 мм.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. 1. 259. **2.** а) 914; б) 2462; в) 54 100. **3.** 1545. **4.** 194 959. **5.** 193 км 400 м. **6.**** $(1001000)_2 = 72$.

Вариант 2. 1. 549. **2.** а) 1054; б) 4202; в) 543 860. **3.** 2440. **4.** 1 984 959. **5.** 226 км 300 м. **6.**** $(1000001)_2 = 65$.

Вариант 3. 1. 667. **2.** а) 1221; б) 2113; в) 78 888. **3.** 2130. **4.** 90 909. **5.** 277 км 500 м. **6.**** $(1000100)_2 = 68$.

Вариант 4. 1. 667. **2.** а) 2826; б) 12 653; в) 71 313. **3.** 2690. **4.** 1 774 959. **5.** 223 км 900 м. **6.**** $(1001100)_2 = 76$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. 1. *Указание*. Например, можно провести три прямые горизонтально и одну вертикально. **2.** 12. **3.** 18. **4.** 105 см. **5.** 42 см.

Вариант 2. **1.** *Указание.* Например, можно провести две прямые горизонтально и две вертикально. **2.** 20. **3.** 17. **4.** 175 см. **5.** 32 см.

Вариант 3. **1.** *Указание.* Например, можно провести четыре прямые горизонтально и одну вертикально. **2.** 30. **3.** 16. **4.** 105 см. **5.** 308 см.

Вариант 4. **1.** *Указание.* Например, можно провести три прямые горизонтально и две вертикально. **2.** 42. **3.** 15. **4.** 105 см. **5.** 104 см.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1. **1.** а) 1348; б) 5109; в) 357 161. **2.** а) 91 686; б) 210 399; в) 40 776 027. **3.** 3901. **4.** 241 км 500 м. **5.**** 23 716.

Вариант 2. **1.** а) 2084; б) 7815; в) 238 427. **2.** а) 132 793; б) 176 988; в) 48 947 736. **3.** 5376. **4.** 347 км 520 м. **5.**** 8201.

Вариант 3. **1.** а) 1268; б) 5412; в) 161 357. **2.** а) 173 367; б) 263 977; в) 57 035 309. **3.** 3870. **4.** 251 км 160 м. **5.**** 44 100.

Вариант 4. **1.** а) 1308; б) 6921; в) 245 315. **2.** а) 191 105; б) 140 266; в) 16 428 363. **3.** 5472. **4.** 368 км 150 м. **5.**** 2916.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1. **1.** Два. **2.** 35°. **3.** 63°. **4.** 75°. **5.** 9°, 171° и 180°.

Вариант 2. **1.** Три. **2.** 90°. **3.** 180°. **4.** 105°. **5.** 10°, 170° и 180°.

Вариант 3. **1.** Шесть. **2.** 38°. **3.** 16°. **4.** 165°. **5.** 18°, 162° и 180°.

Вариант 4. **1.** Шесть. **2.** 99°. **3.** 140°. **4.** 15°. **5.** 81°, 99° и 180°.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Вариант 1. **1.** 21. **2.** 68. **3.** 0 или 5. **4.** 3. **5.**** 2.

Вариант 2. **1.** 23. **2.** 85. **3.** 2 или 6. **4.** 2. **5.**** 2.

Вариант 3. **1.** 23. **2.** 91. **3.** 2, 5, 8. **4.** 0. **5.**** 8.

Вариант 4. **1.** 24. **2.** 94. **3.** 0, 2, 4, 6, 8. **4.** 1. **5.**** 8.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Вариант 1. **1.** $51 \cdot 7 + 4$. **2.** 0. **3.** 0. **4.** 16. **5.*** 22.

Вариант 2. **1.** $45 \cdot 9 + 7$. **2.** 0. **3.** 7. **4.** 79. **5.*** 10.

Вариант 3. **1.** $118 \cdot 6 + 3$. **2.** 3. **3.** 6. **4.** 378. **5.*** 20.

Вариант 4. **1.** $69 \cdot 7 + 4$. **2.** 7. **3.** 12. **4.** 162. **5.*** 30.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Вариант 1. **1.** *Указание*. Соединить середины сторон. **2.** 28° и 90°. **3.** 46°. **4.** 45°, 45° и 90°. **5.*** 30 см.

Вариант 2. **1.** *Указание*. Соединить середины сторон. **2.** 68° и 90°. **3.** 52°. **4.** 36°, 54° и 90°. **5.*** 56 см.

Вариант 3. **1.** *Указание*. Соединить середины сторон. **2.** 9° и 90°. **3.** 52°. **4.** 30°, 60° и 90°. **5.*** 84 см.

Вариант 4. **1.** *Указание*. Соединить середины сторон. **2.** 49° и 90°. **3.** 62°. **4.** 30°, 60° и 90°. **5.*** 25 см.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Вариант 1. **1.** а) $\frac{2}{15}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{8}{7}$; г) 2. **2.** 17. **3.** $\frac{8}{15}$. **4.** $1\frac{1}{12}$. **5.*** Разность второго и первого чисел равна $1\frac{2}{21}$.

Вариант 2. **1.** а) $\frac{8}{15}$; б) $1\frac{1}{9}$; в) $1\frac{4}{7}$; г) $2\frac{1}{3}$. **2.** 11. **3.** $\frac{8}{35}$. **4.** $1\frac{5}{96}$. **5.*** Разность второго и первого чисел равна $\frac{19}{72}$.

Вариант 3. **1.** а) $\frac{4}{21}$; б) $12\frac{5}{6}$; в) $1\frac{1}{7}$; г) 3. **2.** 26. **3.** $\frac{2}{15}$. **4.** $\frac{17}{32}$. **5.*** Разность второго и первого чисел равна $\frac{8}{27}$.

Вариант 4. **1.** а) $\frac{6}{77}$; б) $\frac{15}{14}$; в) $6\frac{2}{7}$; г) 2. **2.** 11. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** $4\frac{15}{32}$. **5.*** Разность второго и первого чисел равна $\frac{1}{12}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Вариант 1. **1.** $\frac{41}{60}$. **2.** $\frac{13}{14}$. **3.** а) $\frac{24}{119}$; б) $\frac{29}{18}$; в) $\frac{23}{28}$. **4.** а) $\frac{2}{35}$; б) $\frac{17}{99}$; в) $\frac{1}{16}$. **5.*** 61 кг.

Вариант 2. **1.** $\frac{49}{60}$. **2.** $\frac{139}{180}$. **3.** а) $\frac{28}{171}$; б) $\frac{111}{8}$; в) $\frac{55}{68}$. **4.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{16}{117}$; в) $\frac{1}{26}$. **5.*** $28\frac{1}{5}$ кг.

Вариант 3. **1.** $\frac{121}{140}$. **2.** $\frac{13}{56}$. **3.** а) $\frac{6}{25}$; б) $\frac{29}{16}$; в) $\frac{113}{984}$. **4.** а) $\frac{4}{117}$; б) $\frac{25}{91}$; в) $\frac{5}{32}$. **5.*** $54\frac{5}{6}$ кг.

Вариант 4. **1.** $\frac{1}{5}$. **2.** $\frac{19}{40}$. **3.** а) $\frac{11}{54}$; б) $\frac{219}{154}$; в) $\frac{225}{182}$. **4.** а) $\frac{2}{255}$; б) $\frac{29}{152}$; в) $\frac{2}{18}$. **5.*** $18\frac{6}{7}$ кг.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Вариант 1. **1.** а) 6250 см^2; б) 1 500 000 см^2; в) 5,8 см^2; г) 3850 см^2. **2.** 6000. **3.** Отрезать две полосы размером 10 на 4 см, а оставшуюся часть разрезать вдоль на две полоски размером 5 на 2 см. Из этих частей можно сложить квадрат со стороной 10 см. **4.** 36 дм^2. Длина стороны квадрата равна 6 дм. **5.** 225 м^2.

Вариант 2. **1.** а) 750 000 м^2; б) 280 м^2; в) 2,35 м^2; г) 7,2 м^2. **2.** 4. **3.** Отрезать две полосы размером 5 на 2 см, а оставшуюся часть разрезать пополам на две полоски размером 2,5 на 1 см. Из этих частей можно сложить прямоугольник со сторонами 2 и 12,5 см. **4.** 6 и 18 см. **5.** 33 м^2.

Вариант 3. **1.** а) 60 дм^2; б) 12 000 дм^2; в) 0,08 дм^2; г) 2,4 дм^2. **2.** 384. **3.** Отрезать полосу размером 6 на 4 см, а оставшуюся часть разрезать вдоль на две полоски размером 3 на 2 см. Из этих частей можно сложить квадрат со стороной 6 см. **4.** 64 дм^2. Длина стороны квадрата равна 8 дм. **5.** 160 м^2.

Вариант 4. **1.** а) 32 000 мм^2; б) 30 280 мм^2; в) 3520 мм^2; г) 160 мм^2. **2.** 3. **3.** Отрезать полосу размером 6 на 4 см, а оставшуюся часть разрезать пополам на две полоски размером 3 на 2 см. Из этих частей можно сложить прямоугольник со сторонами 4 и 9 см. **4.** 7 и 14 см. **5.** 50 м^2.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15

Вариант 1. **1.** 0,007. **2.** 2,0009. **3.** а) 0,66; б) 0,67. **4.** а) 0,28; б) 0,29; в) 0,2857; г) 0,2858. **5.** $1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-4}$. **6.** а) 0,06; б) 5,009; в) $\frac{1}{40}$; г) $5\frac{2}{125}$.

Вариант 2. **1.** 0,0043. **2.** 9,877. **3.** а) 0,44; б) 0,45. **4.** а) 0,42; б) 0,43; в) 0,4285; г) 0,4286. **5.** $5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-4}$. **6.** а) 0,017; б) 4,07; в) $\frac{3}{250}$; г) $2\frac{9}{200}$.

Вариант 3. **1.** 0,083. **2.** 3,0003. **3.** а) 0,83; б) 0,84. **4.** а) 0,57; б) 0,58; в) 0,5714; г) 0,5715. **5.** $2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-4}$. **6.** а) 0,39; б) 3,021; в) $\frac{3}{40}$; г) $4\frac{4}{125}$.

Вариант 4. 1. 0,0072. **2.** 6,544. **3.** а) 0,77; б) 0,78. **4.** а) 0,71; б) 0,72; в) 0,7142; г) 0,7143. **5.** $3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}$. **6.** а) 0,029; б) 7,13; в) $\frac{6}{125}$; г) $4\frac{3}{40}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16

Вариант 1. 1. а) 4,09; б) 0,318; в) 28,386; г) 592,42. **2.** а) 3,25; б) 0,0277; в) 68,473; г) 35,761. **3.** 13,52 см. **4.** 12,519. **5.** Увеличится на 7,2851.

Вариант 2. 1. а) 6,07; б) 0,606; в) 42,201; г) 858,58. **2.** а) 3,25; б) 0,0196; в) 78,454; г) 52,627. **3.** 12,9 см. **4.** 1,107. **5.** Увеличится на 4,678.

Вариант 3. 1. а) 7,42; б) 0,506; в) 18,133; г) 678,12. **2.** а) 2,03; б) 0,0386; в) 18,941; г) 23,642. **3.** 10,25 см. **4.** 6,434. **5.** Уменьшится на 1,4128.

Вариант 4. 1. а) 9,03; б) 0,407; в) 48,014; г) 640,07. **2.** а) 0,09; б) 0,0593; в) 74,921; г) 64,903. **3.** 19,11 см. **4.** 0,355. **5.** Уменьшится на 0,889.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17

Вариант 1. 1. а) 60; б) 32. **2.** а) 60 см; б) 75 г; в) 3 ч 15 мин; г) 5 мм. **3.** 400. **4.** Одинаково. **5.** 50 г.

Вариант 2. 1. а) 30; б) 46. **2.** а) 63 см; б) 310 г; в) 1 ч 39 мин; г) 30 см. **3.** 400. **4.** Одинаково. **5.** 200 г.

Вариант 3. 1. а) 18; б) 45. **2.** а) 32 см; б) 72 г; в) 1 ч 10 мин; г) 44 см. **3.** 300. **4.** Одинаково. **5.** 75 г.

Вариант 4. 1. а) 44; б) 102. **2.** а) 1 м 68 см; б) 170 г; в) 56 мин; г) 10 см 4 мм. **3.** 300. **4.** Одинаково. **5.** 150 г.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18

Вариант 1. 1. 12 и 9 см. **2.** 66 см. **3.** $40\pi \approx 125{,}6$ см^2. **4.** $0{,}245\pi \approx 0{,}7693$ м^3. **5.*** 4 см. **6.**** 3052 см^3 с недостатком.

Вариант 2. 1. 12 и 4 см. **2.** 24 см. **3.** $25\pi - 49 \approx 29{,}5$ см^2. **4.** Увеличится в 2 раза. **5.*** 10 см. **6.**** В $1\frac{34}{91}$ раза.

Вариант 3. 1. 25 см^2. **2.** Периметр квадрата больше. **3.** 3,5 см. **4.** $\frac{21}{121}$. **5.*** 4 см. **6.**** Не хватит.

Вариант 4. 1. 24 см^2. **2.** 10 см. **3.** 49,6 см^2 с недостатком. **4.** Не хватит. **5.*** 2 см. **6.**** Объем атмосферы больше.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. 1. Сто два миллиона три тысячи. **2.** $7 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1 + 1$. **3.** $4^2, 5^2, 3^3, 2^5$. **4.** 256. **5.*** 10 000.

Вариант 2. 1. Семь миллиардов пятьсот тысяч двести один. **2.** $6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3$. **3.** $4^3, 6^2, 3^3, 5^2$. **4.** 243. **5.*** 11 000.

Вариант 3. 1. Шесть миллиардов пятьсот сорок три миллиона триста двадцать три тысячи триста одиннадцать. **2.** $8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$. **3.** $4^4, 5^3, 3^4, 7^2$. **4.** 128. **5.*** 800.

Вариант 4. 1. Девять миллиардов восемьсот семьдесят шесть миллионов пятьсот сорок три тысячи четыреста двадцать один. **2.** $7 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5$. **3.** $4^5, 2^8, 5^3, 8^2$. **4.** 625. **5.*** 700.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. 1. $4 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1$. **2.** 605 мм. **3.** 1 439 408. **4.** 757 + 374 + 212 = 1343. **5.** 429 и 320. **6.**** $(200)_4$.

Вариант 2. 1. $5 \cdot 10^9 + 7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1$. **2.** 887 мм. **3.** 1 040 571. **4.** 426 + 97 5 + 843 = 2244. **5.** 463 и 390. **6.**** $(200)_4$.

Вариант 3. 1. $7 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^1 + 2$. **2.** 1878 мм. **3.** 1 266 930. **4.** 679 + 111 + 635 = 1425. **5.** 429 и 306. **6.**** $(1210)_4$.

Вариант 4. 1. $2 \cdot 10^9 + 1 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^5 + 8$. **2.** 1447 мм. **3.** 1 275 550. **4.** 956 + 538 + 711 = 2205. **5.** 277 и 134. **6.**** $(1322)_4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. 1. 401 132. **2.** 68 757. **3.** 120 000. **4.*** $127 \cdot 53 = 6731$. **5.** 7683. **6.**** $(111100)_2$.

Вариант 2. 1. 529 724. **2.** 66 297. **3.** 105 000. **4.*** $139 \cdot 49 = 6811$. **5.** 5973. **6.**** $(110110)_2$.

Вариант 3. **1.** 425 072. **2.** 55 944. **3.** 136 000. **4.*** $133 \cdot 47 = 6251$. **5.** 4695. **6.**** $(110010)_2$.

Вариант 4. **1.** 273 136. **2.** 98 696. **3.** 133 000. **4.*** $239 \cdot 34 = 8126$. **5.** 7577. **6.**** $(1001110)_2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. **1.** Делится. **2.** Неполное частное — 5882, остаток — 6. **3.*** 6. **4.** 8. **5.*** $(2203)_4$.

Вариант 2. **1.** Делится. **2.** Неполное частное — 5263, остаток — 3. **3.*** 6. **4.** 7. **5.*** $(2303)_4$.

Вариант 3. **1.** Не делится. **2.** Неполное частное — 7692, остаток — 4. **3.*** 4. **4.** 3. **5.*** $(2320)_4$.

Вариант 4. **1.** Не делится. **2.** Неполное частное — 4347, остаток — 19. **3.*** 4. **4.** 5. **5.*** $(3100)_4$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. **1.** $\frac{1}{3}$. **2.** $3\frac{1}{20}$. **3.** $1\frac{1}{3}$. **4.** 90. **5.*** $6\frac{1}{12}$.

Вариант 2. **1.** $\frac{7}{18}$. **2.** $\frac{248}{315}$. **3.** $\frac{5}{16}$. **4.** 91. **5.*** $5\frac{3}{4}$.

Вариант 3. **1.** $\frac{2}{15}$. **2.** $1\frac{53}{60}$. **3.** $\frac{1}{14}$. **4.** 70. **5.*** 3.

Вариант 4. **1.** $\frac{9}{25}$. **2.** $2\frac{52}{315}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** 105. **5.*** $3\frac{4}{5}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. **1.** 5,3501. **2.** а) 1,032 кг; б) 30201,073 кг. **3.** 4,097. **4.** 2,829. **5.** а) 0,0056; б) 0,024.

Вариант 2. **1.** 72,075. **2.** а) 11,0002 км; б) 4,031 м. **3.** 13,1044. **4.** 9,4024. **5.** а) 0,0124; б) 0,802.

Вариант 3. **1.** 4,402. **2.** а) 2000,011 м; б) 3,55 ч. **3.** 8,804. **4.** 4,959. **5.** а) 0,025; б) 0,014.

Вариант 4. **1.** 2,718. **2.** а) 3000,012 г; б) 2,65 мин. **3.** 5,5696. **4.** 5,522. **5.** а) 0,045; б) 0,015.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1. **1.** 4. **2.** 26,625 кг. **3.**

И	П	С
3	7	6

4. 2,4 км. **5.** 50 км.

Вариант 2. **1.** 32 руб. **2.** 11,6. **3.**

3	4	5
6	8	11

4. 30 см. **5.** 20 км.

Вариант 3. **1.** 12. **2.** 14,63. **3.**

Ч	К	В
8	5	7

4. 1:500 000. **5.** 12 га.

Вариант 4. **1.** 42 руб. **2.** 34,06. **3.**

К	Л	О
14	8	18

4. 1:20. **5.** 24 г.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1. **1.** 1064; 1253. **2.** 32°. **3.** 19 000. **4.** 292,8 км. **5.** $20\frac{5}{21}$ кг.

Вариант 2. **1.**733; 604. **2.** 36°. **3.** 15 200. **4.** 371,2 км. **5.** $8\frac{2}{27}$ кг.

Вариант 3. **1.** 656; 533. **2.** 38°. **3.** 17 290. **4.** 41,8 км. **5.** 4% .

Вариант 4. **1.** 395; 288. **2.** 41°. **3.** 13 110. **4.** 20,7 км. **5.** 35 г.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4
Глава 1								
§ 1	2	1	1	1	1, 2, 3	1	2, 4	2, 3, 4
§ 2	2	3	3	1	2, 3, 4	4	2, 3	1, 2
§ 3	3	1	3	3	2, 3	2, 4	3, 4	2, 3
Глава 2								
§ 1	2	4	2	2	1, 3, 4	1, 2	2, 3	1, 2, 3, 4
§ 2	2	2	2	2	1, 3	2, 4	2, 4	1, 2
§ 3	4	1	2	3	1, 2	4	1, 2	4
§ 4	4	3	3	3	1, 3	2, 4	1, 4	1, 2, 4
Глава 3								
§ 1	2	3	2	3	1, 2	1, 2, 3	1, 4	2, 3
§ 2	3	2	3	4	2, 3, 4	2, 4	2, 3	2, 4
§ 3	2	3	2	3	3, 4	1, 2	2, 3	2, 3
§ 4	3	2	3	4	1, 3	2, 4	1, 2, 3	2, 3, 4
§ 5	3	3	1	4	1, 2, 4	3, 4	2, 4	2, 3
Глава 4								
§ 1	2	3	3	1	3	3, 4	2	1, 4
§ 2	3	4	2	1	1, 4	4	1	2, 3
§ 3	3	2	3	4	3, 4	3, 4	2, 3, 4	1, 2
§ 4	2	4	3	3	3	1,4	1	1, 2
Глава 5								
§ 1	3	4	2	2	2, 3, 4	2, 3	1	2, 3
§ 2	3	4	2	4	1, 2, 3	1, 2, 4	1, 3	2, 3
Глава 6								
§ 1	2	2	1	4	2	2	1, 4	2, 3
§ 2	2	3	2	3	2, 3, 4	1, 2	1, 4	2, 4
§ 3	2	3	3	4	1, 4	1, 2, 3	1, 2	1, 2, 4

	Задание 1				Задание 2			
Глава 7								
§ 1	4	3	1	2	3, 4	2, 3	1, 2, 4	1, 2, 3
§ 2	4	2	3	2	1, 3	2, 3	2, 3	1, 2, 3
§ 3	4	4	3	2	1, 2, 3, 4	1, 3	3	2, 3
Глава 8								
§ 1	1	2	2	2	2, 3	1, 2	1, 4	2, 3
§ 2	4	3	4	1	1, 2	1, 3, 4	1, 4	2, 3
§ 3	2	1	3	4	1, 4	2, 4	1, 2, 3, 4	1, 2, 3
§ 4	3	3	3	4	1, 3	1, 2, 3, 4	1, 4	2, 3, 4
§ 5	4	1	4	4	1, 4	3, 4	1	1, 2, 3
Глава 9								
§ 1	4	2	3	1	1, 2	1, 4	1, 2, 3	2, 3
§ 2	2	2	1	2	1, 4	1, 2, 4	2	2, 4
§ 3	3	2	4	3	1, 3	2, 3	1, 2	1, 3, 4
§ 4	2	3	2	3	2, 3	1, 4	1, 2	1, 4
§ 5	3	2	1	2	2, 3	2, 4	2	2, 3
§ 6	2	3	3	4	1, 3, 4	1, 2, 4	1, 2, 3	1, 2, 3, 4
Глава 10								
§ 1	2	2	2	2	2, 4	1, 2, 4	2, 3	1, 3, 4
§ 2	3	2	4	1	1, 2, 4	1, 2, 3	1	1, 3, 4
§ 3	4	2	1	3	1, 2	1, 2	1, 4	1, 3
Глава 11								
§ 1	4	2	1	4	1, 2	2	1, 2, 4	2,4
§ 2	2	3	3	4	1, 2, 4	2, 4	1, 2, 4	2, 3, 4
§ 3	4	2	2	3	2, 3	2, 4	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4

	Задание 1				Задание 2			
§ 4	1	3	3	1	1, 2, 3	3, 4	1, 3	1, 4
§ 5	4	1	2	3	1, 4	1	2, 3	3, 4

Глава 12

§ 1	3	4	2	4	2, 4	2	2	1, 4
§ 2	2	4	2	3	1, 2	2, 3, 4	1, 3	2
§ 3	2	3	3	3	2, 4	2, 3	3, 4	1, 2
§ 4	2	3	3	2	2	2, 3, 4	1, 2, 3	2, 3
§ 5	3	2	1	4	2, 4	1, 2, 4	2, 3	1, 3
§ 6	3	4	3	3	1, 3, 4	1	1,2	3, 4

Глава 13

§ 1	2	3	3	1	2, 4	2, 4	1, 2, 4	1, 2
§ 2	1	4	2	4	1, 3	2, 3	1, 3	1, 2, 4
§ 3	2	3	4	1	1, 3, 4	2, 3	1, 3, 4	2
§ 4	4	3	1	2	1, 3, 4	3, 4	2, 4	3, 4
§ 5	2	2	4	2	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 3	1, 3, 4

Глава 14

§ 1	1	2	1	3	2, 3	1, 3, 4	2, 3, 4	3, 4
§ 2	3	3	4	2	3, 4	2, 3, 4	2, 3	1, 2
§ 3	2	3	2	3	3, 4	1, 2, 3	4	2, 3, 4

Глава 15

§ 1	4	2	2	2	1, 3	1, 2, 4	3, 4	3, 4
§ 2	3	1	3	2	2, 3, 4	3, 4	1, 2, 4	1, 3
§ 3	1	3	3	4	1, 3	2, 3	1, 2	1, 4

СОДЕРЖАНИЕ